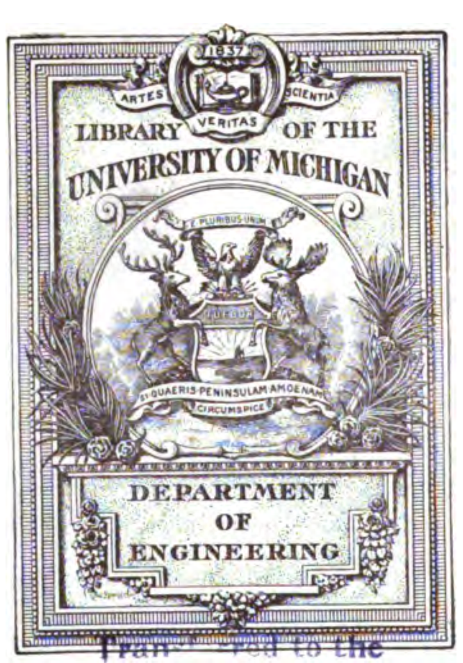
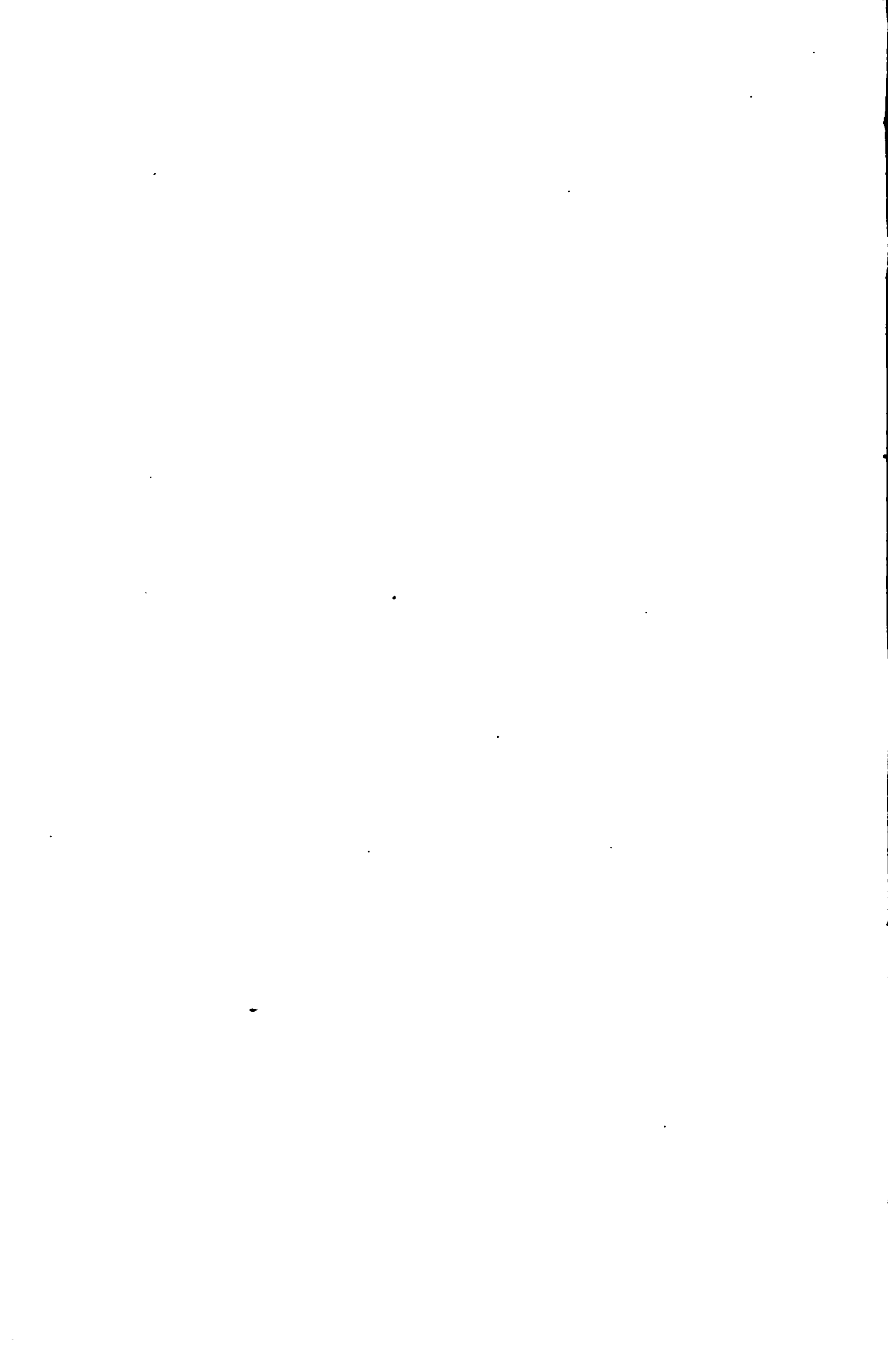

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

weil. Königl. sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

Zweiter Theil:

Die Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen.

Fünfte

umgearbeitete und vervollständigte Auflage

bearbeitet von

Gustav Herrmann,

Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1882.

Die
Statik der Bauwerke
und die
Mechanik der Umtriebsmaschinen.

Für den
Unterricht an technischen Lehranstalten
sowie zum
Gebrauche für Techniker.

Zweiter Theil
von
Dr. Julius Weisbach's
Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Bearbeitet von
Gustav Herrmann,
Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

Fünfte umgearbeitete und vervollständigte Auflage.

Erste Abtheilung.
Die Statik der Bauwerke.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1882.

Inhalt des zweiten Theiles.

Erste Abtheilung.

Erstes Capitel.

Von dem Erddrucke.

Zweites Capitel.

Die Theorie der Gewölbe.

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen.

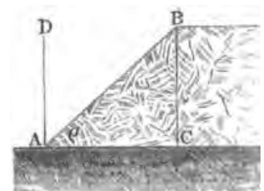
Erstes Capitel.

Von dem Erddrucke.

Erde. Unter Erde ist hier eine lockere, aus kleinen Körpern, wie z. B. Sandkörnern, zusammengesetzte Masse zu verstehen, welche, in gewissem Sinne zwischen den festen und flüssigen Körpern stehend, auch wohl als eine halbflüssige Masse bezeichnet worden ist. Die Erde unterscheidet sich von den festen Körpern, durch ihren Mangel an Cohäsion, in Folge dessen sie unfähig ist, Zugkräften zu widerstehen, während sie von den Flüssigkeiten dadurch unterschieden ist, daß bei der Verschiebung ihrer Theilchen an einander gewisse Reibungswiderstände auftreten, welche, wie bei festen Körpern, durch die zwischen ihren Theilchen wirkenden Druckkräfte hervorgerufen werden. Nicht alle Erden sind übrigens gänzlich cohäsionslos, vielmehr erlangen die meisten, namentlich die lehmhaltigen Erden, im feuchten Zustande, besonders wenn sie durch Stampfen comprimirt oder durch langdauernden Druck verdichtet worden sind, eine gewisse Cohäsion oder Widerstandskraft auch gegen Zugkräfte, welcher Widerstand im Allgemeinen von dem Drucke unabhängig und proportional mit der Fläche anzunehmen ist, in welcher eine Trennung der Masse durch die Zugkraft angestrebt wird. Auf diese Cohäsion darf man wohl Rücksicht nehmen, wenn es sich darum handelt, die Stabilität von Erdkörpern zu prüfen, die aus gewachsenem Boden bestehen (Einschnitte), dagegen pflegt man die Cohäsion außer Acht zu lassen bei frisch aufgeschichteten Massen, wie sie zur Herstellung von Dämmen und zur Hinterfüllung von Futtermauern &c. verwendet werden. Im Folgenden soll zunächst von gänzlich cohäsionslosen Massen die Rede sein und der Einfluß der Cohäsion in einem besonderen Paragraphen besprochen werden. §. 1.

Zufolge der angegebenen Eigenschaften der Erde wird dieselbe zwar einerseits nicht, wie feste Körper, in beliebigen bestimmt begrenzten Formen auftreten können, sie wird aber andererseits auch nicht zur Erhaltung des Gleichgewichtes eines so vollständigen Umschließens durch Gefäße bedürfen, wie es für Flüssigkeiten nöthig ist. Während letztere immer in Folge der Schwerkraft und wegen der leichten Verschieblichkeit ihrer Theilchen eine horizontale Oberfläche annehmen, können Erdmassen in ihrer freien Oberfläche bis zu einem bestimmten Grenzbetrage gegen den Horizont geneigt sein. Man erhält diese Grenze der Neigung für irgend eine cohäsionslose lockere Masse einfach durch Abgraben derselben, wobei von selbst die Masse an der angestochenen Stelle zusammenstürzt und sich in einer gegen den Horizont unter einem Winkel ϱ geneigten Ebene AB (Fig. 1) anordnet. Man bemerkt dabei, daß, so lange noch Erdtheilchen oberhalb dieser Ebene vorhanden sind, dieselben wie auf einer schrägen festen Unterlage herabgleiten, und man muß daher nach dem in Thl. I über die Reibung auf der schiefen Ebene Gesagten schließen, daß der Neigungswinkel BAC, oder wie er genannt wird, der natürliche Böschungswinkel mit dem Reibungswinkel übereinstimmt, welcher der Masse zukommt, so daß die Beziehung gilt:

Fig. 1.



$$tang\, \varrho = \varphi,$$

wenn φ den Reibungscoefficienten für die Erdtheilchen an einander bedeutet.

In manchen Schriften wird unter der Böschung der Neigungswinkel verstanden, den die natürliche Oberfläche mit der verticalen Richtung AD bildet, also $90^0 - \varrho$; im Folgenden soll unter Böschungswinkel immer die Neigung gegen den Horizont gedacht werden. Auch bezeichnet man häufig im Bauwesen die Neigung einer Fläche durch Angabe der horizontalen Basisbreite AC für eine Höhe BC gleich Eins, indem man z. B. unter anderthalbfacher Böschung eine solche versteht, für welche $AC = 1{,}5\, BC$, also $tang\, \varrho = \frac{1}{1{,}5}$ und $\varrho = 33^0\, 40'$ ist.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der specifischen Gewichte γ, der natürlichen Böschungswinkel ϱ und der Reibungscoefficienten φ der hauptsächlich beim Erdbau in Betracht kommenden Materialien nach den Versuchen von Martony*):

*) S. Holzhey, Vorträge über Baumechanik. Wien 1879.

Erdart		Specifisches Gewicht γ	Natürlicher Böschungswinkel ϱ	Reibungscoefficient $\varphi = tang\, \varrho$
Dammerde	locker und trocken . .	1,33	39° 18′	0,818
	etwas feucht	1,33	41° 17′	0,877
	ganz naß	1,86	34° 28′	0,686
Lehm . .	locker und trocken . .	1,44	39° 39′	0,828
	etwas feucht	1,44	39° 44′	0,831
	ganz naß	1,99	33° 41′	0,667
Sand . .	trocken	1,68	37° 1′	0,754
	etwas feucht	1,68	39° 45′	0,832
	ganz naß	1,95	41° 51′	0,890
Schotter		1,68	40° 46′	0,862
Also Erde im Durchschnitt . . .		1,65	38° 40′	0,80

Für ganz feinen Sand hat man die Böschung $^5/_8$, daher den Böschungswinkel $\varrho = 31^0$ gefunden; Roggenkörner haben $\varrho = 30^0$, sowie Erbsen $\varrho = 27^0$ gegeben, dagegen lockerer Haldensturz aus Gneisstücken von 18 cbcm bis 0,03 cbm bestehend, sowie Steinkohlen und Schlacken in Stücken von 50 bis 120 cbcm im Mittel $\varrho = 38^0$. Für Schrotkörner hat man ferner $\varrho = 25^0$, für Vogeldunst $\varrho = 22^1/_2{}^0$ und für Sägespäne $\varrho = 44^0$ gefunden. Versuche über die natürliche Böschung lockerer Massen werden durch Aufschütten und Streichen dieser Massen von unten nach oben angestellt. Dabei ist eine hinreichende Rauhigkeit der Bodenfläche vorausgesetzt, damit dieselbe vermöge ihrer Reibungsfähigkeit die horizontale Druckcomponente der auf ihr ruhenden Erdmasse aufzunehmen vermag *).

§. 2. **Activer und passiver Erddruck.** Wenn eine cohäsionslose Erdmasse E, Fig. 2 (a. f. S.), unter einer steileren Neigung gegen den Horizont, als dem natürlichen Böschungswinkel BAC entspricht, erhalten werden soll, so muß man ihrem Bestreben, auf BA abwärts zu gleiten, durch eine stützende Mauer oder Bohlenwand M entgegenwirken. Diese Stützmauer wird auf ihrer hinteren Fläche AD einem gewissen Drucke P der Erde ausgesetzt sein, welchem sie durch ihre Reaction $-P$ das Gleichgewicht zu halten hat. Man nennt diesen Druck der Erde, welcher ein Umstürzen oder Verschieben der Mauer anstrebt und auch bewirkt, sobald die Mauer nicht

*) S. Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857.

das erforderliche Stabilitätsmoment besitzt, den activen Erddruck, oder auch wohl schlechtweg Erddruck. Im Gegensatze hierzu versteht man unter dem passiven Erddrucke oder Erdwiderstande denjenigen Widerstand, den die Erdmasse E, Fig. 3, einer Verschiebung entgegensetzt, welche durch die Mauer M, etwa in Folge der Schubkraft P des Gewölbes G angestrebt wird. Die Kenntniß des Erddruckes ist daher von besonderer Wichtigkeit für die Festsetzung der Stabilitätsverhältnisse von Futtermauern, Fig. 2, welche der Erddruck umzustürzen bezw. zu verschieben strebt. In Fig. 3 kommt der Erdwiderstand der Stabilität der Widerlagsmauer zu Hülfe, ebenso wie der passive Erddruck der Erdmasse E' in Fig. 2 die Widerstandsfähigkeit der Futtermauer M erhöht, doch muß im Allgemeinen die Berücksichtigung des passiven Erddruckes mit Vorsicht geschehen, da auf diese Wirkung von Erdmassen wegen der mehr oder minder großen Zusammendrückbarkeit der letzteren nicht mit unbedingter Sicherheit zu rechnen ist.

Fig. 2.

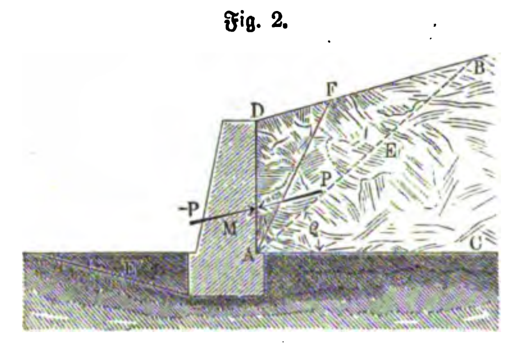
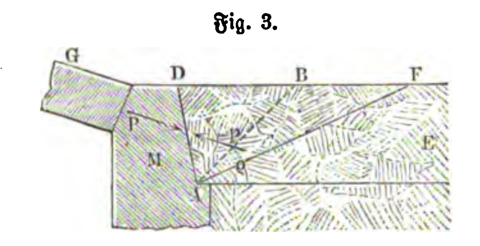


Fig. 3.



Die Theorien, welche bislang zur Bestimmung des Erddruckes aufgestellt worden sind, können sämmtlich nur als Annäherungen gelten, da die für den Erddruck geltenden Gesetze nur ungenügend bekannt sind, und die strenge Durchführung der bezüglichen Rechnungen zu unüberwindlichen Schwierigkeiten führt. Die verschiedenen zur Anwendung gekommenen Theorien fußen auf der Annahme, daß von der Erdmasse beim Ausweichen der Mauer M, Fig. 2, ein keilförmiges Prisma DAF auf einer ebenen Trennungsfläche AB wie auf einer schiefen Ebene herabgleite, so daß der auf die Mauer ausgeübte Druck P durch die betreffende Gewichtscomponente dieses Erdprismas dargestellt ist. Diese die Rechnung vereinfachende Annahme einer ebenen Gleitfläche wird durchgehends zu Grunde gelegt, obwohl sich aus

allgemeinen Betrachtungen erkennen läßt, daß bei einem eintretenden Zusammenstürzen des Bauwerkes die Bruchfläche eine gekrümmte sein muß. Ferner nahm man in den ersten Theorien an, daß die Bruchfläche mit der Ebene AB der natürlichen Böschung zusammenfalle, worauf später zuerst Coulomb von der ohne Zweifel richtigeren Voraussetzung ausging, daß unter allen möglichen Erdprismen, welche betreffenden Falles zum Abgleiten kommen können, jedenfalls dasjenige am ehesten zum Abbruche gelangt, welches, Fig. 2, den größten Druck P auf die Wand AB ausübt, oder welches, Fig. 3, dem ausgeübten Schube P den kleinsten Widerstand entgegensetzt. Demgemäß spricht man von einem Prisma des größten Druckes und einem solchen des kleinsten Widerstandes.

Diese Annahme ist in den späteren Arbeiten über den Erddruck fast allgemein angenommen worden, und man hat dabei behufs Ermittelung des ausgeübten Druckes oder Widerstandes die betreffenden Gleitflächen AF der ausgesprochenen Bedingung gemäß zu bestimmen, daß die von der Erde ausgeübte Kraft in dem einen Falle, Fig. 2, ein Maximum, in dem anderen, Fig. 3, ein Minimum sei.

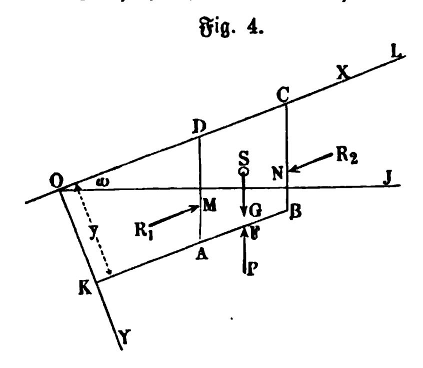
In der letzten Zeit hat man sich ferner bemüht, über die Gesetze, welchen die Druckvertheilung im Innern einer unbegrenzten Erdmasse unterworfen ist, ins Klare zu kommen, und wenn auch die erzielten Resultate dieser Arbeiten noch nicht das Problem als gelöst erscheinen lassen, so sind doch die Ergebnisse für die Beurtheilung der vorliegenden Fragen von entschiedener Bedeutung. Es sollen daher im Folgenden zunächst die Gesetze angeführt werden, welche für die Vertheilung des Druckes im Innern einer unbegrenzten homogenen Erdmasse gelten. Bei dieser Darstellung soll der Einfachheit und Anschaulichkeit wegen im Wesentlichen die graphische Methode befolgt werden, welche in der vorzüglichen Arbeit von Mohr*) angegeben ist.

Druckkräfte im Innern einer Erdmasse. §. 3. In dem Folgenden werde eine Erdmasse von durchaus gleichmäßiger Beschaffenheit vorausgesetzt, welche nur oberhalb durch eine Ebene OL, Fig. 4 (a. f. S.), begrenzt ist. Diese Begrenzung sei gegen den Horizont OJ unter dem Winkel ω geneigt, wobei ω nicht größer als der natürliche Böschungswinkel ϱ, sonst aber beliebig groß sein kann. Die Erdoberfläche selbst sei als die eine Coordinatenebene (xz) und als Y-Axe die in dem beliebigen Punkte O auf der Oberfläche senkrechte Gerade gewählt, so zwar, daß die Z-Axe horizontal und auf der Bildebene in O senkrecht ist. Man denke sich zunächst in einem

*) Zeitschr. d. Hannov. Architekten- u. Ingenieur-Vereins. 1871.

beliebigen Abstande $OK = y$ von der Oberfläche ein zu der letzteren paralleles Flächenstück, etwa ein Rechteck von der Breite $AB = a$ und der zur Bildebene senkrechten Höhe $z = 1$, und betrachte dieses Rechteck als die Basis eines verticalen, bis an die Oberfläche reichenden schiefwinkeligen Parallelepipedums, $ABCD$. Auf die vier verticalen Seitenflächen wirkt die umgebende Erdmasse mit vier gewissen Kräften, welche allgemein mit R_1, R_2, R_3 und R_4 bezeichnet sein mögen; ferner wird die Grundfläche AB ebenfalls einem gewissen Drucke P der darunter befindlichen Erde ausgesetzt sein, und endlich wirkt das Gewicht G des betrachteten Parallelepipedes in dessen Schwerpunkte S vertical abwärts. Diese sechs Kräfte müssen nun mit einander im Gleichgewichte sein.

Fig. 4.



Wegen der vorausgesetzten Gleichmäßigkeit der Erdmasse wird der Druck R_1 auf AD mit demjenigen R_2 auf BC nicht nur gleich und entgegengesetzt sein, sondern auch ihre Angriffspunkte M und N müssen dieselbe Lage in den Flächen haben, denn in Bezug auf die beiden Flächen AD und BC sind alle Verhältnisse genau dieselben. Ganz dieselbe Betrachtung läßt sich natürlich in Bezug auf die beiden Kräfte R_3 und R_4 anstellen, welche auf die mit der Bildebene parallelen Flächen des Prismas wirken. Folglich hat man die algebraische Summe der vier Kräfte R gleich Null, da $R_2 = -R_1$ und $R_4 = -R_3$ ist. Daraus folgt weiter, daß auch die beiden anderen Kräfte G und P gleich und entgegengesetzt sein müssen, also $P = -G$ ist. Es ist aber auch deutlich, daß die Kraft P in dem Schwerpunkte F der Bodenfläche, also vertical unter S angreifen muß, da die Massen um die Verticale durch den Schwerpunkt S herum symmetrisch vertheilt sind. Die Kräfte P und G wirken daher in einer und derselben Geraden, und bilden somit kein auf Drehung wirkendes Kräftepaar. Daraus geht aber für die Kräfte R wiederum hervor, daß dieselben parallel zu der Oberfläche OL gerichtet sein müssen, denn wäre dies nicht der Fall, so würden R_1 und R_2 sowie R_3 und R_4 Kräftepaare bilden, also würde der Gleichgewichtszustand nicht möglich sein. Von den vier mit der Oberfläche parallelen Kräften R wirken natürlich diejenigen R_1 und R_2 parallel mit der X-Axe, während die Kräfte R_3 und R_4 mit der horizontalen Z-Axe parallel sind.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt daher, daß in einer homogenen und unbegrenzten Erdmasse der Druck auf ein verticales Flächen-

element parallel zu der Erdoberfläche gerichtet ist, während ein der Oberfläche paralleles Flächenstück einen verticalen Druck empfängt, welcher, in dem Schwerpunkte der Fläche angreifend, gleich dem Gewichte des über dem Flächenstücke befindlichen Erdprismas ist.

Bezeichnet man mit F die Größe der betrachteten Bodenfläche AB, so ist das Gewicht des besagten Erdprismas $ABCD$ durch $G = \gamma F y = P$ ausgedrückt, wenn γ das Gewicht einer Cubikeinheit Erde bedeutet. Der specifische Druck auf die Bodenfläche, d. h. der Druck pro Flächeneinheit derselben ist daher durch

$$p = \frac{P}{F} = \gamma y$$

gegeben, welcher Druck eine zur Fläche normale Pressung

$$n = p \cos \omega$$

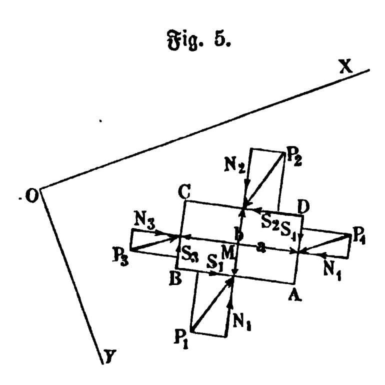
und eine tangentiale oder Schubspannung

$$s = p \sin \omega$$

hervorruft.

In Betreff der Schubspannungen läßt sich noch ein wichtiges Gesetz angeben. Denkt man sich nämlich im Innern einer unendlichen Erdmasse ein unendlich kleines rechtwinkeliges Parallelepipedum $ABCD$, Fig. 5, dessen Seiten in der Bildebene $AB = a$ und $AD = b$ sein mögen, während die dazu senkrechte der Z-Axe parallele Abmessung gleich 1 gesetzt werden mag, so wirken auf die vier Flächen AB, CD, BC und AD irgendwie vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4, von denen jede in ihre betreffende Normalcomponente N und Tangentialkraft S zerlegt werde. Die vier Normalkräfte gehen sämmtlich durch den Mittelpunkt M des unendlich kleinen Parallelepipedums, in welchem auch das Gewicht des letzteren angreifend zu denken ist, welches übrigens gegen die Kräfte N und S als unendlich Kleines höherer Ordnung vernachlässigt werden kann.

Fig. 5.



Bezeichnet man die specifischen Spannungen mit n und s, so ist zunächst ersichtlich, daß $s_1 = s_2$ und $s_3 = s_4$ zu setzen ist, da die Unterschiede $s_2 - s_1$ und $s_4 - s_3$ ebenfalls nur unendlich klein sind, während die specifischen Spannungen s endliche Größen darstellen. Man hat daher,

wenn man $S_1 = S_2 = a s_1$ und $S_3 = S_4 = b s_3$ setzt und den Mittelpunkt M als Momentenmittelpunkt wählt, für das Gleichgewicht die Bedingung:

$$a s_1 \,.\, b = b s_3 \,.\, a,$$

woraus

$$s_1 = s_3 = s_2 = s_4$$

folgt.

Hieraus schließt man, daß je zwei in einem beliebigen Punkte zu einander senkrechte Flächen gleich großen Schubspannungen pro Flächeneinheit ausgesetzt sind.

§. 4. Um nun den Druck auf irgend welches Flächenelement im Innern einer unbegrenzten Erdmasse zu ermitteln, sei $a b c$, Fig. 6, die Grundfläche eines unendlich kleinen, der Z-Axe parallelen dreiseitigen Prismas, dessen untere Fläche $a b$ parallel zu der gegen den Horizont unter dem beliebigen Winkel ω geneigten Oberfläche der Erdmasse, und dessen Fläche bc senkrecht auf der Grundfläche $a b$ steht, während die dritte Fläche $a c$ unter dem beliebigen Winkel α gegen $a b$ geneigt sein soll. Die Länge des Prismas in der Richtung der Z-Axe möge gleich der Einheit angenommen werden. Auf diese drei Flächen wirken drei Kräfte P_1 auf $a b$, P_2 auf $b c$ und P auf $a c$. Bezeichnet man mit p_1, p_2 und p die entsprechenden specifischen Druckkräfte dieser Flächen, so hat man, wenn man auch $a b$ gleich der Einheit annimmt, $P_1 = p_1$, $P_2 = p_2 \tang \alpha$ und $P = p \sec \alpha$. Diese drei Kräfte müssen mit einander im Gleichgewichte sein, da die auf die beiden dreieckigen verticalen Endflächen des Prismas wirkenden Druckkräfte nach dem Vorstehenden sich gegenseitig aufheben, und das Eigengewicht des unendlich kleinen Prismas gegen die Flächendrucke als unendlich Kleines verschwindet. Um die Bedingungen des Gleichgewichtes zu erkennen, sei nun das Kräftepolygon gezeichnet, und zwar sei nach einem gewissen Maßstabe der auf die Fläche $a b$ wirkende Druck P_1, welcher nach dem Vorstehenden vertical gerichtet und gleich γy ist, durch die Verticale DF in der Mitte D von $a b$ ausgedrückt. Wenn man die Gerade FB senkrecht zu $a b$ zieht, so erhält man offenbar in

$$FB = P_1 \cos \omega = \gamma y \cos \omega = N_1$$

den Normaldruck und in

$$DB = P_1 \sin \omega = \gamma y \sin \omega = S_1$$

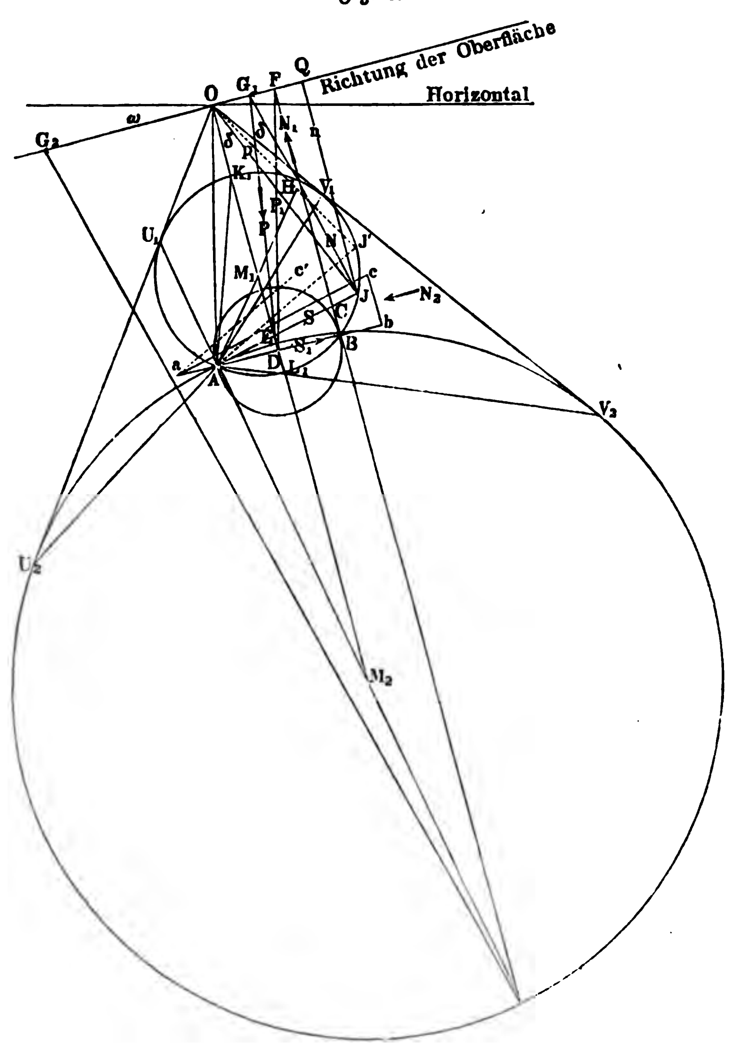
die Schubkraft der Fläche $a b$. Der Druck P auf $a c$ ist vorläufig unbekannt, und von der Druckkraft P_2 auf die Fläche $b c$ weiß man nur, daß nach dem Vorhergehenden die specifische Schubspannung s_2 gleich derjenigen s_1 der Fläche $a b$ ist, folglich hat die auf $b c$ wirkende Schubspannung die Größe:

$$S_2 = bc \cdot s_1 = S_1 \frac{bc}{ab} = S_1 \, tang \, \alpha$$

Macht man daher $DA = DB = S_1$, und zieht durch A die Gerade AC parallel mit ac, so erhält man in

$$ED = AD \, tang \, \alpha = S_1 \, tang \, \alpha$$

Fig. 6.



die Schubkraft S_2 der Fläche bc. Die drei Kräfte S_2, S_1 und N_1 sind daher durch den Linienzug $EDBF$ dargestellt.

Um die Größe zu finden, welche die vorläufig noch ganz unbestimmte Normalkraft N_2 der Fläche bc möglicher Weise haben kann, sei N_2 zunächst beliebig groß angenommen und gleich FG_1 parallel mit der Basis ab oder der Terrainfläche angetragen. Unter dieser Voraussetzung giebt die Schlußlinie G_1E des Kräftepolygons $EDBFG_1$ bekanntlich der Größe und Richtung nach die Kraft P auf die dritte Prismenfläche ac. Zieht man von G_1 die Linie G_1J senkrecht zu dieser Fläche ac, so giebt $EG_1J = \delta$ den Winkel, unter welchem die Kraft P gegen die Normale der Fläche ac geneigt ist, und man hat daher in

$$G_1J = P\cos\delta = N$$

die Normalkraft, und in

$$JE = P\sin\delta = S$$

die Schubkraft der besagten Fläche.

Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß die Punkte A, B und J mit dem Durchschnittspunkte H der beiden Geraden G_1J und FB auf der Peripherie eines Kreises liegen müssen, für welchen AH ein Durchmesser ist, da die betreffenden Winkel bei B und J Rechte sind. Zeichnet man diesen Kreis, und zieht durch seinen Mittelpunkt M_1 die Gerade M_1O senkrecht zu der Terrainfläche bis zum Durchschnitte O mit der Verlängerung von FG_1, und ebenso JQ parallel zu M_1O, so erkennt man leicht, daß

$$QO = JE\,.\,\cos\alpha = S\cos\alpha$$

und

$$QJ = G_1J\,.\,\cos\alpha = N\cos\alpha$$

ist, da offenbar die Linie JE mit der Oberfläche, sowie die Normalen G_1J und QJ mit einander den Winkel α bilden. Diese Größen QO und QJ stellen daher auch die specifischen Spannungen s und n der Fläche ac vor, denn da man

$$S = ac\,.\,s = \frac{s}{\cos\alpha}$$

und

$$N = ac\,.\,n = \frac{n}{\cos\alpha}$$

hat, so ist

$$QO = S\cos\alpha = s$$

und

$$QJ = N\cos\alpha = n.$$

Verbindet man daher noch O mit J, so erhält man in OJ nicht nur die specifische Druckkraft der Fläche ac:

$$p = \sqrt{s^2 + n^2},$$

sondern auch in $M_1 O J = \delta$ den Winkel, welchen diese Druckkraft mit der Normalen zur Fläche ac bildet. Daß der Winkel $M_1 O J = E G_1 J = \delta$ ist, erkennt man daraus, daß

$$tang\ E G_1 J = \frac{J E}{G_1 J} = \frac{S}{N} = \frac{s}{n} = \frac{Q O}{Q J} = tang\ E O J$$

ist.

Diese Beziehung giebt in sehr einfacher Art ein anschauliches Bild von der Vertheilung der Druckkräfte im Innern der Erdmasse. Da nämlich, wie man leicht erkennt, die gegenseitige Lage von A, B und O zu einander bei einer gewissen Tiefe y, also auch einem bestimmten OA von vornherein feststeht und nicht von der Neigung α der Ebene ac abhängig ist, und da auch H gegeben ist, sobald über die Größe von n_2, also von $F G_1 = N_2$ eine Annahme gemacht wird, so wird der durch A, B und H gelegte Kreis durch eine solche Annahme von n_2 unzweifelhaft festgestellt. Daher giebt dieser Kreis, immer unter der gemachten Voraussetzung über die Größe von n_2, ein Mittel an die Hand, um für jede beliebige Ebene die Größe der specifischen Druckkraft p und deren Abweichung von der Normalen zur Fläche zu finden. So erhält man z. B. für die beliebige Ebene ac', wenn man AJ' dazu parallel zieht, in der Strecke OJ' nach dem gewählten Kräftemaßstabe die specifische Druckspannung p' und in $M_1 O J'$ deren Neigung δ' gegen die Normale zu ac'.

Denkt man sich die Ebene ac um a im Kreise herumgedreht, so daß sie alle denkbaren Neigungen annimmt, so wandert bei gleichzeitiger Drehung der Sehne AJ der Punkt J auf dem Umfange des Kreises herum, und man erhält in besagter Weise in den von O ausgehenden Fahrstrahlen OJ nach dem Endpunkte J der Sehne die specifischen Spannungen p für alle entsprechenden Lagen der Ebene ac. Diese Druckspannungen nehmen offenbar für die Richtung AK_1 ihren kleinsten Werth $p_{min} = OK_1$, und für die dazu senkrechte Lage AL_1 der Fläche ihren größten Werth $p_{max} = OL_1$ an. Für beide Flächen ist der Abweichungswinkel δ zwischen Druckkraft und Normale gleich Null, d. h. diese Druckspannungen sind senkrecht zu den Flächen, also für die Ebene AK_1 in AL_1 und für die Ebene AL_1 in AK_1 fallend. Schubspannungen treten in diesen Ebenen also nicht auf. Die größte Abweichung der Druckkraft von der Flächennormale findet für diejenigen beiden Ebenen statt, deren Richtungen durch die Sehnen AU_1 und AV_1 nach den Berührungspunkten der Tangenten OU_1 und OV_1 gehen.

Wie im Obigen wiederholt bemerkt worden, gilt der betreffende Kreis zum Mittelpunkte M_1 nur unter der gemachten Voraussetzung, daß $N_2 = n_2\ tang\,\alpha$ die Größe $F G_1$ habe, d. h. also, wenn hinsichtlich der normalen specifischen Spannung n_2 auf eine zur Terrainoberfläche senkrechte

und zur Z-Axe parallele Ebene, wie bc, eine bestimmte Annahme gemacht wird. Eine andere Annahme in dieser Hinsicht liefert auch einen anderen Kreis, und es ist aus der Figur ersichtlich, wie bei einer Vergrößerung von FG_1 der Schnittpunkt H tiefer rückt, so daß der Kreis kleiner wird, und umgekehrt, wie eine Verringerung von n_2 den Kreis vergrößert.

Um nun die in der Wirklichkeit stattfindenden Verhältnisse zu ermitteln, genügt es, den Reibungscoefficienten der betrachteten Erdmasse zu kennen. Ist derselbe wieder durch φ, der Reibungswinkel ϱ also durch $\varphi = tang\, \varrho$ gegeben, so muß man bemerken, daß der Gleichgewichtszustand der Erdmasse an die Bedingung geknüpft ist, daß nirgendwo die Druckrichtung auf ein Flächenelement von der Normalen derselben um einen größeren Betrag abweiche, als der Reibungswinkel angiebt. Diese Abweichung kann sowohl nach der einen wie nach der anderen Seite, oder allgemeiner innerhalb desjenigen Kegelmantels stattfinden, welcher um die Normale als Axe gedacht wird, und dessen halber Spitzenwinkel gleich ϱ ist (Reibungskegel). Innerhalb dieser Grenzen giebt es natürlich unendlich viele Zustände, für welche das Gleichgewicht bestehen kann. Für den vorliegenden Zweck kommen indessen besonders diejenigen beiden Grenzzustände in Betracht, in denen das Gleichgewicht bei der geringsten Veränderung gestört wird, d. h. in welchen entweder eine zu stützende Erdmasse abgleitet, wenn die stützende Mauer dem activen Erddrucke nicht zu widerstehen vermag, oder in welchen durch eine überwiegende Schubkraft der passive Erdwiderstand überwunden wird.

Nach diesen Bemerkungen ist es nun deutlich, daß ein solcher Kreis, für welchen die Tangenten OU_1 und OV_1 mit der Centrallinie OM_1 einen Winkel $M_1OU_1 = M_1OV_1$ gleich dem Reibungswinkel ϱ der Erdmasse bilden, einem der besagten Grenzzustände entsprechen muß. Solcher Kreise giebt es nun offenbar zwei, welche durch die Punkte A und B gehen, und die unter dem Reibungswinkel ϱ gegen die Centrale geneigten Geraden OU_2 und OV_2 in U_1 und V_1 bezw. U_2 und V_2 berühren.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß der Kreis M_1 unter der Annahme eines bestimmten specifischen Normaldruckes n_2 auf das zur Terrainfläche senkrechte Flächenelement bc gilt, so zwar, daß die Strecke FG_1 den Normaldruck $n_2\, tang\, \alpha$ auf das Flächenelement bc darstellt, also

$$n_2 = \frac{FG_1}{tang\, \alpha}$$

angenommen werden muß. Würde man n_2, also auch FG_1 kleiner annehmen, so würde, da H emporrückt, der Kreis M_1 größer werden und das Gleichgewicht gestört sein, weil der Winkel der von O an diesen Kreis gezogenen Tangenten mit der Centrallinie OM_1 größer als der Reibungswinkel ϱ wäre. Hiernach würde es in der Erdmasse Flächen geben, für welche der Druck um einen größeren Betrag, als der Reibungswinkel ist, von

der Normalen abweicht. Hieraus geht hervor, daß der Kreis M_1 einem solchen Grenzzustande entspricht, in welchem die geringste Verkleinerung des Druckes n_2 eine Bewegung zur Folge haben müßte, und zwar würde alsdann eine Bewegung der Erdmasse auf den Flächen AU_1 und AV_1 eintreten, für welche die Abweichung der Druckkraft von der Normalen den Reibungswinkel erreicht. Diese beiden Flächen treten demnach als Gleitflächen auf, und es entspricht offenbar der Kreis M_1 demjenigen Gleichgewichtszustande, welcher für die Beurtheilung der von Stützmauern auszuhaltenden Druckkraft in Betracht kommt, da ein Abgleiten des zwischen den beiden Gleitflächen AU_1 und AV_1 befindlichen Erdprismas erfolgen muß, sobald die betreffende Stützmauer ausweicht, d. h. nur einen Druck gegen die Erdmasse auszuüben vermag, welcher geringer ist als derjenige, welcher aus dem angenommenen Drucke

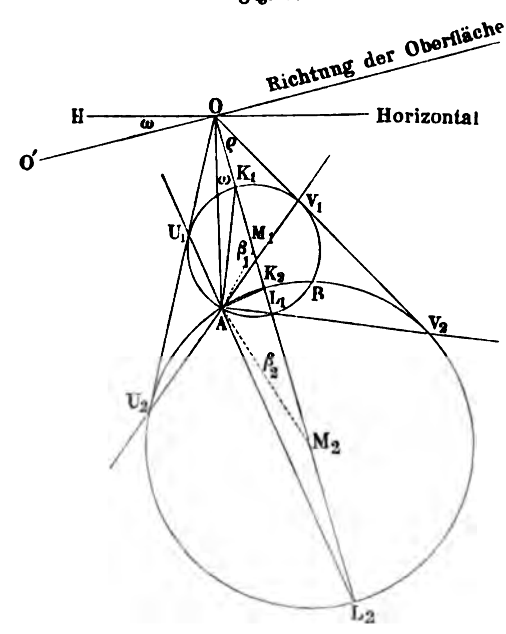
$$n_2 = \frac{FG_1}{tang\,\alpha}$$

sich ergiebt. Mohr nennt diesen Gleichgewichtszustand den unteren Grenzzustand, zum Unterschiede von dem oberen, welcher durch den Kreis zum Mittelpunkte M_2 dargestellt wird, und welcher, wie leicht zu ersehen ist, sich dadurch charakterisirt, daß die geringste Vergrößerung des Druckes n_2 eine Störung des Gleichgewichts zur Folge hat. Denkt man sich nämlich die Größe n_2 von dem Werthe des unteren Grenzzustandes $\frac{FG_1}{tang\,\alpha}$ allmälig zunehmend, trägt man also die Strecke FG_1 von F aus größer und größer an, so findet sich durch Betrachtung der Figur, daß der Kreis M_1 kleiner und kleiner wird, bis er seinen kleinsten Werth erreicht, wenn G_1 nach O trifft, in welchem Falle der Mittelpunkt M in D auf AB fällt, der Kreis also die Gerade BF in B berührt, indem der Durchschnittspunkt H in B hineinfällt. Eine weitere Vergrößerung von n_2, bei welcher der Endpunkt G der Strecke FG über O hinaus fällt, läßt den Durchmesser des Kreises wieder zunehmen, und man erhält für den zweiten die Geraden OU_2 und OV_2 berührenden Kreis M_2 den Normaldruck $n_2\,tang\,\alpha$ auf die Fläche bc in der Strecke FG_2, wenn man durch den Durchschnittspunkt H_2 dieses Kreises mit FB eine zu ac senkrechte Gerade H_2G_2 zieht. Hierdurch ist der erwähnte obere Grenzzustand dargestellt, denn es ist deutlich, daß die geringste fernere Vergrößerung von n_2 oder FG_2 eine Störung des Gleichgewichtes herbeiführen muß, wobei ein Gleiten der Erdmasse in den Gleitflächen AU_2 und AV_2 stattfindet, in welchen die Druckkraft um den Reibungswinkel ϱ von der Normalen abweicht.

Durch die vorstehende Betrachtung hat sich nun ergeben, daß der anfänglich ganz unbekannte Normaldruck N_2 auf das Flächenelement bc nur zwischen den beiden Werthen FG_1 und FG_2 gelegen sein, dazwischen aber

jeden beliebigen Werth haben kann, so daß also für die Erdmasse unendlich viele verschiedene Gleichgewichtszustände möglich sind. Für irgend einen dieser möglichen Gleichgewichtszustände ist der specifische Druck p nach verschiedenen Richtungen seiner Größe nach verschieden, und es giebt zwei zu einander senkrechte Richtungen, von denen die eine dem maximalen, die andere dem minimalen Drucke entspricht. Von diesen unendlich vielen Zuständen interessiren hier nur die beiden Grenzzustände, für welche die specifischen Drucke auf irgend ein Flächenelement mit p_1 für den unteren, mit p_2 für den oberen Grenzzustand bezeichnet werden sollen.

Fig. 7.



Der Uebersichtlichkeit wegen sind die Kreise für die beiden Gleichgewichtszustände in Fig. 7 besonders dargestellt. Man ersieht hieraus, daß $A\,U_1$ und $A\,V_1$ die Gleitflächen des unteren, sowie $A\,U_2$ und $A\,V_2$ diejenigen des oberen Grenzzustandes darstellen. Ferner hat man

$p_{1\,max} = O\,L_1$ in der Richtung $A\,K_1$ wirkend,

$p_{1\,min} = O\,K_1$ „ „ „ $A\,L_1$ „

$p_{2\,max} = O\,L_2$ „ „ „ $A\,K_2$ „

$p_{2\,min} = O\,K_2$ „ „ „ $A\,L_2$ „

Aus der Figur ist auch ohne Weiteres zu erkennen, daß wegen der Gleichheit der Kreisbögen $K\,U = K\,V$ die Richtung von $p_{1\,max}$ den Winkel der Gleitflächen für den unteren Grenzzustand halbirt, während für den oberen Grenzzustand $p_{2\,min}$ den Winkel der Gleitflächen in zwei gleiche Theile theilt. Für die Winkel der Gleitflächen zu einander hat man, da

$$U\,M\,K = V\,M\,K = 90^0 - \varrho \quad \text{ist:}$$

$$U_1\,A\,V_1 = 90^0 - \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$U_2\,A\,V_2 = 90^0 + \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Denkt man sich von dem unteren Grenzzustande aus den Druck n_2 größer und größer werdend, so verändert die größte Druckkraft allmälig ihre Richtung aus AK_1 in AK_2, während die zu p_{max} senkrechte Kraft p_{min} um den gleichen Winkel $L_1 A L_2$ gedreht wird.

Um die Größe der Druckkräfte p_{max} und p_{min} zu bestimmen, seien unter r_1 und r_2 die Halbmesser $M_1 U_1$ und $M_2 U_2$ gleich $\frac{p_{max} - p_{min}}{2}$ und unter m_1 und m_2 die Abstände OM_1 und OM_2 gleich $\frac{p_{max} + p_{min}}{2}$ verstanden, dann hat man:

$$\sin \varrho = \frac{UM}{OM} = \frac{r_1}{m_1} = \frac{r_2}{m_2} = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_{max} + p_{min}} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Hieraus folgt für beide Grenzzustände:

$$p_{max}(1 - \sin \varrho) = p_{min}(1 + \sin \varrho) \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

also:

$$\frac{p_{1\,min}}{p_{1\,max}} = \frac{p_{2\,min}}{p_{2\,max}} = \frac{1 - \sin \varrho}{1 + \sin \varrho} = \frac{1 - \cos(90^0 - \varrho)}{1 + \cos(90^0 - \varrho)}$$

$$= \tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Ferner hat man, unter β_1 und β_2 die Centriwinkel OM_1A und OM_2A, und unter ω wieder den Neigungswinkel HOO' der Oberfläche gegen den Horizont, also auch den Winkel AOM verstanden, aus den Dreiecken AOM_1 und AOM_2:

$$\frac{AM_1}{OM_1} = \frac{r_1}{m_1} = \frac{\sin \omega}{\sin(\beta_1 + \omega)} = \sin \varrho \text{ (nach 3)} \quad . \quad (6)$$

und

$$\frac{AM_2}{OM_2} = \frac{r_2}{m_2} = \frac{\sin \omega}{\sin(\beta_2 + \omega)} = \sin \varrho \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Hieraus folgt auch $\sin(\beta_1 + \omega) = \sin(\beta_2 + \omega)$, d. h.:

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^0 - 2\omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Man kann daher allgemein schreiben:

$$\sin(\beta + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

und hieraus folgt durch einige goniometrische Umformungen:

$$\sin \beta = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho}\left(\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}\right) \text{*)} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

---

*) Man erhält diesen Ausdruck durch

$\sin(\beta + \omega) = \sin\beta \cos\omega + \cos\beta \sin\omega = \sin\beta\cos\omega + \sqrt{1 - \sin^2\beta}\,.\sin\omega = \frac{\sin\omega}{\sin\varrho},$

worin das obere Zeichen dem Winkel β_1, das untere dem Winkel β_2 zukommt.

Nun hat man ferner, wenn man für AO den Werth γy setzt:

$$AM = r = AO \frac{\sin\omega}{\sin\beta} = \gamma y \frac{\sin\omega}{\sin\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und

$$OM = m = AO \frac{\sin(\omega+\beta)}{\sin\beta} = \gamma y \frac{\sin(\omega+\beta)}{\sin\beta}. \quad (12)$$

Setzt man hierin aus (9) und (10) die Werthe für $\sin(\omega+\beta)$ und $\sin\beta$ ein, so erhält man:

$$AM_1 = r_1 = \gamma y \frac{\sin\varrho}{\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} \quad . \quad . \quad (13)$$

$$AM_2 = r_2 = \gamma y \frac{\sin\varrho}{\cos\omega - \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} \quad . \quad . \quad (14)$$

$$OM_1 = m_1 = \gamma y \frac{1}{\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} \quad . \quad . \quad (15)$$

$$OM_2 = m_2 = \gamma y \frac{1}{\cos\omega - \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} \quad . \quad . \quad (16)$$

Daraus folgt endlich:

$$OK_1 = m_1 - r_1 = \gamma y \frac{1 - \sin\varrho}{\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} = p_{1\,min} \quad . \quad (17)$$

$$OL_1 = m_1 + r_1 = \gamma y \frac{1 + \sin\varrho}{\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} = p_{1\,max} \quad . \quad (18)$$

$$OK_2 = m_2 - r_2 = \gamma y \frac{1 - \sin\varrho}{\cos\omega - \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} = p_{2\,min} \quad . \quad (19)$$

$$OL_2 = m_2 + r_2 = \gamma y \frac{1 + \sin\varrho}{\cos\omega - \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}} = p_{2\,max} \quad . \quad (20)$$

---

oder:

$$1 - \sin^2\beta = \left(\frac{1}{\sin\varrho} - \sin\beta \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\right)^2,$$

welche Gleichung nach $\sin\beta$ geordnet:

$$\sin^2\beta\left(1 + \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\right) - 2\frac{\cos\omega}{\sin\omega\sin\varrho}\sin\beta = 1 - \frac{1}{\sin^2\varrho} = -\frac{\cos^2\varrho}{\sin^2\varrho}$$

giebt. Hieraus folgt:

$$\sin\beta = \frac{\sin\omega}{\sin\varrho}\left(\cos\omega \pm \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varrho}\right).$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$p_{1\,min}\, p_{2\,max} = p_{1\,max}\, p_{2\,min} = (\gamma y)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Für den Druck p in den Gleitflächen hat man nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises:

$$OU^2 = OK \,.\, OL,$$

also:

$$p = \sqrt{p_{min} \,.\, p_{max}} = \gamma y \frac{\cos \varrho}{\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad . \quad (22)$$

Es kann bemerkt werden, daß diese Gleichungen unmögliche Werthe ergeben würden, wenn man den Neigungswinkel ω der Masse gegen den Horizont größer als den natürlichen Böschungswinkel ϱ voraussetzen wollte.

Die gefundene Gleichung (5)

$$\frac{p_{min}}{p_{max}} = tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}$$

lehrt, daß das Verhältniß der größten und kleinsten Druckspannung nicht von der Tiefe y des betrachteten Punktes unter der Oberfläche, auch nicht von deren Neigung ω, sondern lediglich von dem Reibungswinkel ϱ abhängt, daß also **dieses Verhältniß in allen Punkten einer homogenen unbegrenzten Erdmasse denselben constanten Werth hat.** Andererseits erkennt man aus den Gleichungen (17) bis (20), daß die **absoluten Größen von p_{max} und p_{min} für alle Punkte von gleicher Tiefe y, d. h. für alle Punkte einer mit der Oberfläche parallelen Ebene gleich groß sein müssen.** Man ersieht auch aus (22), daß diese Gleichheit nicht nur für die Hauptdrucke p_{max} und p_{min} gilt, sondern es sind auch die **Druckkräfte p auf alle mit einander parallel gelegten Ebenen in den Punkten gleicher Tiefe (y) von einer und derselben Größe.**

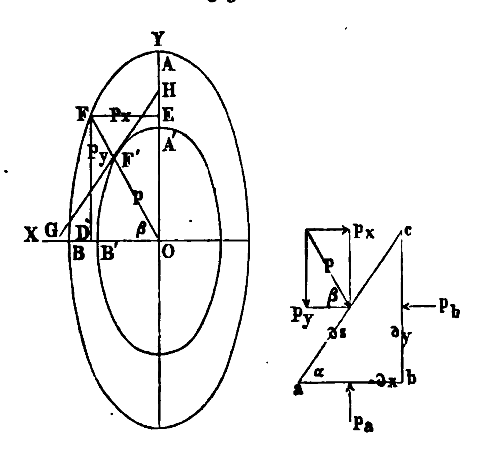
Wenn man die in einem beliebigen Punkte A der Erdmasse nach allen möglichen Richtungen stattfindenden specifischen Druckkräfte ihrer Richtung und Größe nach durch eine von dem Punkte A ausgehende Strecke darstellt, so liegen, wie Winkler*) gezeigt hat, die Endpunkte dieser Strecken in einem Ellipsoid, dessen Axen durch die Hauptdruckkräfte p_{max} und p_{min} dargestellt sind, wie man sich in folgender Art überzeugen kann.

Es seien die Coordinatenaxen OY und OX, Fig. 8 (a. f. S.), parallel mit den Richtungen AK_1 und AL_1 in Fig. 7 von p_{max} und p_{min} angenommen, und es bedeute abc ein unendlich kleines dreiseitiges Prisma, dessen Flächen $ab = \partial x$ und $bc = \partial y$ parallel mit den Coordinatenebenen ZOX und ZOY sind; die Z-Axe werde wieder in O senkrecht zur Zeichnung angenommen. Die dritte Fläche $ac = \partial s$ bilde mit der X-Axe den Winkel α, und auf diese Fläche

*) Dr. E. Winkler, Neue Theorie des Erddruckes. Wien 1872.

wirke der specifische Druck p in einer Richtung, welche mit der X-Axe den Winkel β bilden möge. Man hat dann, unter p_a und p_b den größten resp.

Fig. 8.



kleinsten specifischen Druck auf die Flächen ab und bc, und unter p_x und p_y die den Axen parallelen Componenten des Druckes p auf die Fläche ac verstanden, für das Gleichgewicht:

$$p_a \, \partial x = p_y \, \partial s,$$

$$p_b \, \partial y = p_x \, \partial s;$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha = \frac{p_y}{p_a},$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \alpha = \frac{p_x}{p_b},$$

und also:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 = \frac{p_y^{\,2}}{p_a^{\,2}} + \frac{p_x^{\,2}}{p_b^{\,2}}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Axen $OA = p_a$ und $OB = p_b$ sind.

Macht man daher für eine unter dem Winkel $\alpha = cab$ gegen die X-Axe geneigte Ebene ca die Coordinaten

$$FD = p_y = p_a \cos \alpha = OA \cos \alpha$$

und

$$FE = p_x = p_b \sin \alpha = OB \sin \alpha,$$

so erhält man in

$$OF = \sqrt{p_a^2 \cos^2 \alpha + p_b^{\,2} \sin^2 \alpha} = p$$

der Größe und Richtung nach den specifischen Druck auf die Fläche ac.

Winkler nennt diese Ellipse die **Druckellipse**, zum Unterschiede von einer anderen, der sogenannten **Stellungsellipse**, welche man erhält, wenn man bei denselben Axenrichtungen die Größe der Halbaxen

$$OA' = \sqrt{OA} = \sqrt{p_a} \quad \text{und} \quad OB' = \sqrt{OB} = \sqrt{p_b}$$

annimmt. Es ist nämlich leicht zu erweisen, daß diese Ellipse in ihrer Tangente GH an den Durchschnittspunkt F' mit irgend einer Druckrichtung OF die Richtung derjenigen Fläche angiebt, welche von dem Drucke OF afficirt wird. Die Gleichung dieser Ellipse ist nämlich unter der gemachten Voraussetzung in Betreff der Größe der Halbaxen:

$$\frac{y^2}{p_a} + \frac{x^2}{p_b} = 1,$$

und man erhält daher durch Differentiation:

$$\frac{y\,\partial y}{p_a} + \frac{x\,\partial x}{p_b} = 0,$$

oder:

$$\frac{p_a}{p_b}\,\frac{x}{y} = -\,\frac{\partial y}{\partial x} = tang\;HGO \;\ldots\ldots\ldots\; (23)$$

oder, da $\frac{x}{y} = cotg\,\beta$ ist, hat man:

$$tang\;HGO = \frac{p_a}{p_b}\;cotg\,\beta.$$

Nun hat man aber auch:

$$p_y = p\,sin\,\beta = p_a\,cos\,\alpha,$$

$$p_x = p\,cos\,\beta = p_b\,sin\,\alpha;$$

daher ist auch:

$$tang\,\alpha = \frac{p_a}{p_b}\;cotg\,\beta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (24)$$

Aus dieser Gleichung und (23) folgt daher $HGO = \alpha$, d. h. die **Richtung einer beliebigen Fläche** ac **oder** GH **und die für dieselbe geltende Druckrichtung** OF **sind zwei conjugirte Durchmesser der Stellungsellipse.** Die Tangente GH der Stellungsellipse in F' giebt sonach die Richtung der Ebene an, für welche der Druck durch OF der Größe und Richtung nach dargestellt ist.

Wenn die Oberfläche der Erdmasse horizontal, also $\omega = 0$ ist, so fallen die beiden Punkte A und B in Fig. 6 zusammen, und man erhält aus den Gleichungen (17) bis (20):

$$p_{1\,max} = p_{2\,min} = \gamma\,y;$$

$$p_{1\,min} = \gamma\,y\,\frac{1 - sin\,\varrho}{1 + sin\,\varrho} = \gamma\,y\,tang^2\,\frac{90^0 - \varrho}{2}$$

und

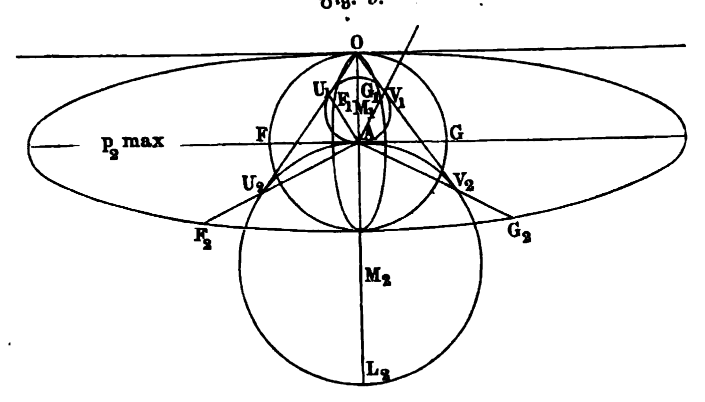
$$p_{2\,max} = \gamma\,y\,\frac{1 + sin\,\varrho}{1 - sin\,\varrho} = \gamma\,y\,tang^2\,\frac{90^0 + \varrho}{2}.$$

In Fig. 9 (a. f. S.) sind die den beiden Grenzzuständen entsprechenden Druckellipsen OF_1G_1 und OF_2G_2 dargestellt. Die Gleitflächen sind für den unteren

Grenzzustand durch AF_1 und AG_1 gegeben, welche Flächen von der Verticalen AO nach jeder Seite um den Winkel $\frac{90^0 - \varrho}{2}$ abweichen, und die auf diese Gleitflächen wirkende specifische Druckspannung beträgt nach (22):

$$OU_1 = AF_1 = AG_1 = p_{f_1} = \gamma y \; tang \; \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

Fig. 9.



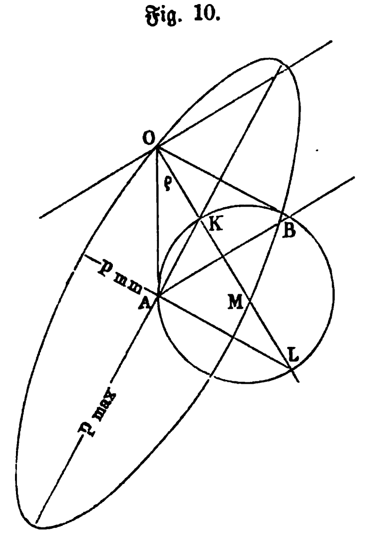
während der Druck auf die Gleitflächen AF_2 und AG_2 für den oberen Grenzzustand durch

$$OU_2 = AF_2 = AG_2 = p_{f_2} = \gamma y \; tang \; \frac{90^0 + \varrho}{2}$$

ausgedrückt ist.

Wenn man, wie vorstehend erwähnt, durch Vergrößerung des Normaldruckes n_2 auf eine zur Z-Axe parallele verticale Ebene den unteren Grenzzustand in den oberen überführt, so wird der Kreis $U_1 V_1$ kleiner und kleiner, bis er in einem gewissen Augenblicke, wenn $n_2 = \gamma y$ geworden ist, in den Punkt A zusammenschrumpft. Die Druckellipse hat während dieser Zeit unter Beibehaltung ihrer großen Axe $2AO = 2\gamma y$ ihre kleine Axe mehr und mehr vergrößert und ist in dem erwähnten Augenblicke in den Kreis FG übergegangen. Der Zustand der Erdmasse entspricht in diesem Augenblicke demjenigen einer vollkommenen Flüssigkeit ohne Reibungswiderstände und ohne Schubspannungen; der specifische Druck ist auf jede irgendwie gelegene Ebene senkrecht gerichtet und gleich γy. Bei

Fig. 10.



noch weiterer Vergrößerung des Druckes n_2 wächst der horizontale Druck unter steter Beibehaltung der constanten Größe γy für den verticalen Druck, welcher nunmehr als $p_{2\,min}$ auftritt.

Setzt man eine Neigung der Erdoberfläche unter der natürlichen Böschung voraus, so fällt bei der Ausführung der Construction in Fig. 6 die Tangente OU mit der Verticalen OA zusammen, und man erhält in diesem Falle nur einen einzigen Berührungskreis, Fig. 10; es giebt daher hier auch nur einen Grenzzustand. Die beiden Gleitflächen AO und AB sind hier vertical und parallel zur Oberfläche gerichtet, und der Druck auf dieselben ist:

$$p_f = AO = BO = \gamma y.$$

Ferner ergiebt sich aus (17) und (19):

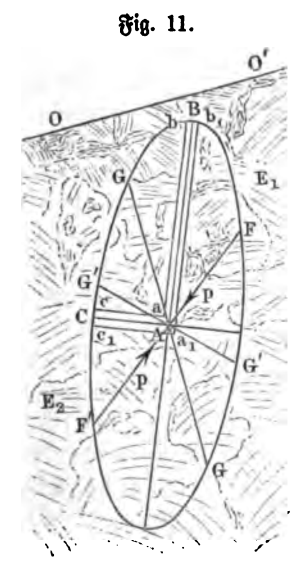
$$p_{min} = OK = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \varrho} = \gamma y \tang \frac{90^0 - \varrho}{2}$$

und aus (18) und (20):

$$p_{max} = OL = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \varrho} = \gamma y \tang \frac{90^0 + \varrho}{2}.$$

Druck der Erde gegen Stützmauern. Um nunmehr der vorstehenden Theorie gemäß den Erddruck gegen stützende Wände oder Futtermauern zu ermitteln, kann man folgende Betrachtung anstellen. Es sei CBF, Fig. 11, die Druckellipse für irgend einen Punkt A einer Erdmasse, deren Oberfläche OO' sei, so daß also für den vorauszusetzenden unteren Grenzzustand BA der Größe und Richtung nach den Druck p_{max} und CA den Druck p_{min} darstellt. Denkt man sich in den Richtungen BA und CA §. 5.

Fig. 11.



durch je zwei unendlich nahe liegende Ebenen, wie ba, ca, zwei röhrenförmige oder prismatische Räume begrenzt, so wirkt innerhalb derselben auf die Begrenzungsflächen ba, ca dieser Räume der Druck überall normal, also etwa so, als ob diese Räume mit Flüssigkeiten von bestimmter Dichte gefüllt sein würden. Während indessen bei einer Flüssigkeit der Druck nach allen Richtungen von gleicher Größe ist, so verursacht bei der Erdmasse die zwischen den Theilchen auftretende Reibung, daß in der Richtung CA schon der kleinere Druck p_{min} ausreicht, um zusammen mit der Reibung dem eine Bewegung anstrebenden Drucke p_{max} das Gleichgewicht zu halten. Man hat sich daher vorzustellen, daß die Druckkraft p_{max} als eine *active*,

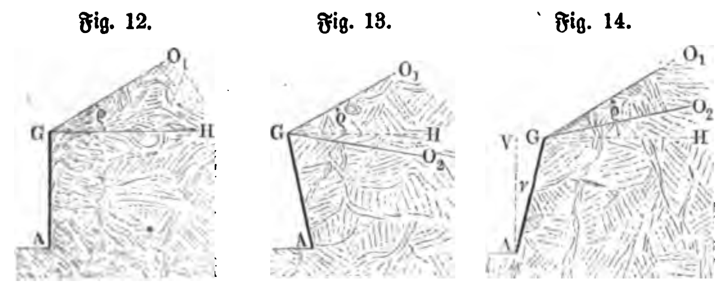
d. h. Bewegung anstrebende Kraft auftritt, während der Druck p_{min} einen passiven Widerstand vorstellt, welcher die Bewegung so lange verhindert, als er noch nicht unter den dem Grenzzustande entsprechenden Werth herabgesunken ist. Denkt man sich nun durch den Punkt A irgend welche Ebene AG gelegt, welche die ganze Erdmasse in zwei Theile E_1 und E_2 zerlegt, so ist zunächst deutlich, daß, wenn FA nach dem Vorhergehenden den Druck p auf diese Fläche der Richtung und Stärke nach darstellt, also die Erdmasse E_1 auf die Ebene AG mit einer Kraft $FA = + p$ drückend wirkt, die Erdmasse E_2 mit einer gleich großen entgegengesetzten Reaction $F'A = - p$ auf E_1 zurückwirkt. Man kann daher auch den Druck $- p$ der unteren Erdmasse E_2 als den passiven, durch die Wirkung der oberen Erdmasse E_1 hervorgerufenen Widerstand ansehen, und es ist klar, daß bei einer beliebigen Lage der betrachteten Trennungsebene AG diejenige Erdmasse in dem gedachten Sinne als activ angesehen werden muß, welche die gegen den Punkt A gerichtete Druckkraft p_{max} in sich enthält. Stellt man sich nun vor, die gedachte Trennungsebene werde durch eine feste Wandfläche ersetzt, so kann man die Erdmasse E_2 beseitigen, indem die feste Wand ebenso gut eine Reaction $- p = F'A$ gegen die von oben drückende Erdmasse auszuüben vermag, wie zuvor die Erdmasse E_2. Wollte man dagegen die Erdmasse E_1 beseitigen, so würden die Verhältnisse wesentlich andere sein, als sie in der unbegrenzten Erdmasse stattfinden, denn die feste Stützmauer, welche wohl im Stande ist, einem auf sie von E_1 ausgeübten activen Drucke p eine gleiche Reaction $-p$ entgegenzusetzen, vermag offenbar nicht, den besagten Druck p der Erdmasse E_1 auf diejenige E_2 auszuüben, welcher Druck lediglich den Schwerkräften der nunmehr beseitigten Erdmasse E_1 seine Entstehung verdankt. Es wird dieses Verhältniß deutlich werden, wenn man z. B. die Trennungsebene AG etwa in AG' unter einem Winkel gegen den Horizont gelegt denkt, welcher kleiner als der natürliche Böschungswinkel ist. In der unbegrenzten Erdmasse wird auf diese Fläche ein bestimmter Druck p' von E_1 auf E_2 ausgeübt werden, wogegen nach Beseitigung von E_1 die verbleibende Erdmasse E_2 einer stützenden Wand in AG' offenbar nicht bedarf, sobald die Begrenzung AG' nicht steiler ist, als die natürliche Böschung.

Aus solchen Betrachtungen folgert daher Mohr, daß die vorstehende Theorie des Erddruckes in unbegrenzten Erdkörpern auf die Bestimmung des Wanddruckes gegen Stützmauern angewandt werden darf, so lange die Gerade, welche nach jener Theorie die Richtung der Maximalpressung gegen den Fußpunkt der Wandfläche angiebt, **innerhalb** des gestützten Erdkörpers liegt.

Hiernach wird, wie aus der Betrachtung der Figuren 9 und 10 leicht ersichtlich ist, diese Theorie für verticale Stützflächen AG, Fig. 12, gültig

sein, so lange die Oberfläche GO des Terrains zwischen der Horizontalen GH und der aufsteigenden Ebene der natürlichen Böschung GO_1 gelegen ist, und wenn die Stützfläche AG, wie in Fig. 13, eine gewisse Neigung nach vorn (der Erdmasse abgewendet) hat, so ist die Theorie auch noch gültig bis zu einer gewissen abwärts gerichteten Neigung GO_2 der Erdmasse. Nur wenn die Stützfläche nach Fig. 14 eine der Erdmasse zugekehrte Neigung hat, ist die Zulässigkeit der Erddrucktheorie eine für die Lagen der Terrainfläche zwischen GO_1 und GO_2 beschränkte. Die Größe

Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14.

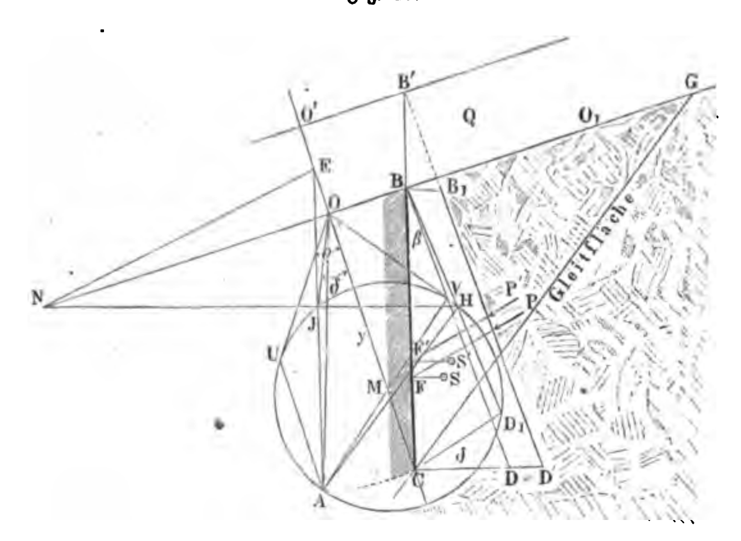


des Winkels O_1GO_2 für diesen Geltungsbereich hängt natürlich von der Neigung ν der Wand AG gegen die Verticale AV ab, und man ersieht aus der Figur 10, daß bei einer Zurückneigung der Wand um den Winkel $\nu = VAG = \frac{90^0 - \varrho}{2}$ eine Anwendbarkeit der vorstehenden Erddrucktheorie nur noch zulässig sein wird, wenn das Terrain unter der natürlichen Böschung GO_1 ansteigt (Fig. 14). Für die gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fälle, welche meistens den Figuren 12 und 13 entsprechen, kann daher die vorstehende Theorie des Erddruckes zu Grunde gelegt werden, in den Ausnahmefällen der Fig. 14 dagegen wird man sich der seitherigen Theorie des Prismas vom größten Drucke zur Ermittelung des Wanddruckes bedienen müssen, worüber im folgenden Paragraphen das Nähere enthalten ist.

Unter Zugrundelegung der vorstehend entwickelten Theorie des Erddruckes bestimmt sich nun die auf eine Futtermauer ausgeübte Druckkraft auf graphischem Wege in sehr einfacher Art, bei deren Darstellung hier ebenfalls im Wesentlichen die von Mohr angegebenen Constructionen zu Grunde gelegt sind. Es sei BC, Fig. 15 (a. f. S.), die dem Drucke der Erde ausgesetzte Fläche einer Futtermauer, und es sei $OC = y$ der normale Abstand der untersten Kante C von der ebenen Terrainfläche OO_1 der Erdmasse. Wählt man nun für die graphische Ermittelung das Gewicht γ der Cubikeinheit Erdmasse als Einheit für den Kräftemaßstab (s. Thl. I, Anhang), so stellt offenbar die durch O vertical gezogene Strecke $OA = OC$

die Pressung γy vor. Trägt man nun noch den Reibungswinkel $\varrho = COU$ an CO an, und beschreibt den Kreis, welcher durch A hindurch-

Fig. 15.



geht, OU berührt und seinen Mittelpunkt M auf der zur Terrainfläche senkrechten Geraden OC hat, so entspricht dieser Kreis dem unteren Grenzzustande des Gleichgewichtes. Zieht man daher durch A eine zur Wandfläche CB Parallele AE, so gelangt man durch den Schnittpunkt J dieser letzteren mit dem Kreise zu der Strecke OJ, welche die Pressung p pro Flächeneinheit der Wandfläche in C angiebt, während der Winkel $MOJ = \delta$ die Abweichung der Druckrichtung von der Normalen CD zur Wandfläche in C angiebt. Macht man daher $DCD_1 = MOJ$ und $CD_1 = OJ$, so stellt CD_1 der Richtung und Größe nach die Pressung der Wandfläche in C, d. h. den Druck pro Flächeneinheit vor. Da die Pressung auf alle übrigen Punkte der ebenen Wandfläche CB dieselbe Richtung hat, so gilt dies natürlich auch von der Mittelkraft P der Druckkräfte auf alle Wandelemente. Auch ist leicht ersichtlich, daß der Angriffspunkt F dieser Mittelkraft P von der unteren Mauerkante C einen Abstand $FC = \frac{1}{3}\, BC$ haben muß. Da nämlich nach dem vorigen Paragraphen die Pressungen der einzelnen Punkte der Wandfläche proportional mit den Abständen derselben von der Oberfläche, also auch von dem Punkte B sind, so erkennt man, daß das rechtwinkelige Dreieck BCD, in welchem $CD = CD_1 = p$ ist, die Größe und Vertheilung des Druckes auf die Wandfläche darstellt. Zieht man daher von dem Schwerpunkte S dieses Dreiecks die Normale SF

zur Wandfläche, so erhält man in F den Angriffspunkt für die mit CD_1 parallele Mittelkraft P aller Einzelpressungen, welche Mittelkraft selbstredend auch durch den Schwerpunkt des Dreiecks BCD_1 hindurchgeht.

Anstatt die Richtung des Erddruckes durch Antragen des Winkels δ an CD zu erhalten, könnte man auch diese Richtung direct finden, indem man den Durchmesser AH zieht, durch H und J eine Gerade legt und deren Durchschnitt N mit der Oberfläche OO_1 mit dem Durchschnitte E zwischen AJ und OM verbindet. Man erhält dann nach dem Vorhergehenden in EN die Richtung des Erddruckes auf die Wandfläche BC.

Die hier angegebene Construction behält noch ihre Gültigkeit, wenn die Oberfläche OO_1 der Erdmasse durch eine besondere Belastung Q gleichmäßig beschwert ist. In diesem Falle denke man sich diese Belastung Q durch das Gewicht einer ebenso schweren Erdmasse von der Höhe BB' dargestellt, deren durch B' gehende Begrenzung wegen der gleichmäßig vorausgesetzten Vertheilung der Last parallel zu OO_1 anzunehmen ist. Hierdurch wird in dem Gleichgewichtszustande der Erdmasse nichts weiter geändert, als daß für jeden Punkt der Wandfläche der in dem Vorhergehenden mit y bezeichnete normale Abstand von der Erdoberfläche um die Größe OO' vergrößert wird. Daher wird auch für jeden Punkt die mit diesem Abstande y proportionale Pressung um einen constanten von OO' abhängigen Werth vergrößert werden, welcher in $BB_1 = DD'$ gefunden wird, wenn man durch B' die Gerade $B'D'$ parallel zu BD zieht. Die Größe des nunmehr auf die ganze Mauer wirkenden Druckes, dessen Richtung durch die Belastung nicht geändert wird, ist jetzt durch das Trapez CBB_1D' dargestellt, dessen Schwerpunkt S' durch die zur Wandfläche Normale $S'F'$ in F' den Angriffspunkt des Erddruckes P' liefert. Die Figur läßt unmittelbar erkennen, daß durch die Belastung der Oberfläche nicht nur der Wanddruck im Verhältniß der Flächenräume CBD und CBB_1D', sondern auch der Hebelarm im Verhältniß FC zu $F'C$ vergrößert wird.

Um den Abstand $CF' = a$ des Fußes C von dem Angriffspunkte F' des Erddruckes P' der belasteten Erde zu finden, setze man $CB = l$ und $BB' = l'$, sowie

$$\frac{CD}{CB} = tang\,\beta,$$

dann hat man für den Fußpunkt C die Momentengleichung:

$$\frac{l^2}{2}\,tang\,\beta \cdot \frac{l}{3} + l\,l'\,tang\,\beta \cdot \frac{l}{2} = \left(\frac{l^2}{2} + l\,l'\right) tang\,\beta\ .\ a,$$

woraus

$$a = \frac{l^2 + 3\,l\,l'}{3\,l + 6\,l'} = \frac{l}{3}\,\frac{l + 3\,l'}{l + 2\,l'}$$

folgt, also zwischen $\frac{l}{3}$ für $l' = 0$ und $\frac{l}{2}$ für $l' = \infty$ liegend.

Verbindet man in der Figur den Punkt A mit dem Berührungspunkte U und V der Tangenten an den Kreis, so erhält man die Ebenen, in welchen der Erddruck den Reibungswinkel ϱ mit der Normalen zur Fläche bildet. Man erhält daher im vorliegenden Falle in AV die Richtung der Gleitfläche CG, d. h. derjenigen Ebene, in welcher bei einem Ausweichen der Mauer voraussichtlich ein Erdprisma BCG von der übrigen Erdmasse abgleiten wird. Dieser Gleitfläche kann man sich zur Ermittelung des Wanddruckes bedienen in dem Falle, in welchem die Oberfläche der Erdmasse, Fig. 16, nicht durch eine Ebene gebildet wird. Ist hier z. B. die Erdmasse oben durch $BDEF$ begrenzt, und kann man die Lage CF der Gleitfläche bestimmen, so findet man den Wanddruck genau wie in Fig. 15 angegeben, sobald man jetzt für die wirkliche Erdoberfläche $BDEF$ eine ideale ebene Begrenzung nach BG von solcher Neigung annimmt, daß die beiden Flächenräume CBG und $CBDEF$ gleich groß sind, weil von dem Gewichte des abrutschenden Prismas allein der Wanddruck abhängt. Zu dieser Bestimmung muß allerdings die Lage der Gleitfläche CF zuvörderst bekannt sein, welche nach dem Obigen wiederum von der Neigung der Linie BG abhängt, doch wird man leicht diese Lage mit genügender Schärfe ermitteln können, wenn man sie zuerst schätzungsweise annimmt, dann die Neigung BG ermittelt, und dann für diese Neigung nach Fig. 15 die wahre Gleitfläche bestimmt, um, wenn nöthig, eine entsprechende Correction vornehmen zu können.

Fig. 16.

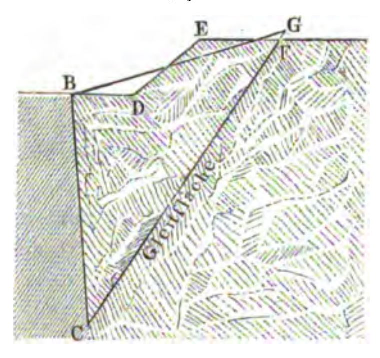
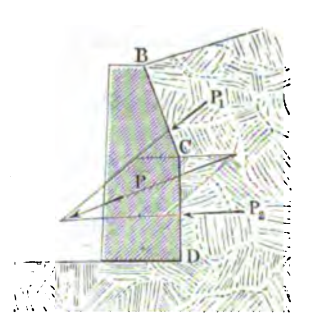


Fig. 17.



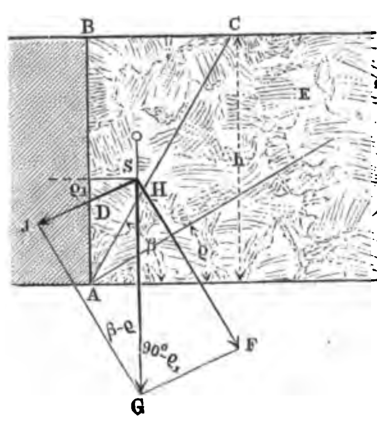
Wenn andererseits die Wandfläche nicht durch eine einzige Ebene begrenzt ist, sondern etwa nach Fig. 17 mehrere Parthien BC, CD von verschiedener Neigung enthält, so ergiebt sich von selbst, daß man den gesammten Erddruck auf die Wandfläche nach bekannten Regeln als die Mittelkraft P aus den auf die einzelnen Wandtheile wirkenden Drucken P_1 und P_2 zu ermitteln hat.

Wenn man in der vorgedachten Art den Erddruck auf eine Wandfläche bestimmt, so findet man, daß derselbe, je nach der Lage der Wandfläche, um den mehr oder minder großen Winkel δ von der Normalen zur Wandfläche abweicht. Der Druck wirkt nur dann zur Wandfläche normal, wenn diese die Richtung von p_{max} in sich aufnimmt, wie dies z. B. nach Fig. 9 bei verticaler Wand und horizontaler Oberfläche der Fall ist. Andererseits erreicht der Abweichungswinkel δ einen um so größeren Werth, je mehr sich die Wandfläche einer Gleitfläche nähert, und beim Zusammenfallen beider wird $\delta = \varrho$, wie dies nach Fig. 10 eintritt, wenn eine verticale Wandfläche eine Erdmasse mit natürlich geböschter Oberfläche stützt. Im Allgemeinen ist daher der Neigungswinkel des Erddruckes gegen die Normale zur Stützfläche kleiner als der Reibungswinkel ϱ. Diesem Umstande zufolge hat man wohl Einwände gegen die Anwendbarkeit der allgemeinen Theorie des Erddruckes zur Bestimmung des Wanddruckes erhoben, welche darauf begründet sind, daß für den Fall des Ausweichens der Futtermauer an derselben ein Herabgleiten der Erdmasse stattfindet, demzufolge man annehmen muß, daß der Druck zwischen dieser Erdmasse und der Wandfläche von der Normalen der letzteren um den Reibungswinkel ϱ_1 zwischen beiden, oder da derselbe meistens gleich dem der Erdmasse gesetzt werden darf, um den Winkel ϱ abweicht. Demgemäß hat man wohl die Zulässigkeit der Erddrucktheorie nur auf diejenigen höchst seltenen Ausnahmefälle beschränken zu müssen geglaubt, in denen die Wandfläche mit einer Gleitfläche zusammenfällt. Diese Einwände hat schon M o h r durch die Bemerkung widerlegt, daß der gedachte Zustand des Ausweichens der Mauer nicht der bei Stabilitätsuntersuchungen allein in Frage kommende G l e i c h g e w i c h t s z u s t a n d d e r R u h e, sondern vielmehr ein Z u s t a n d d e r B e w e g u n g ist, und wenn für den letzteren durch die Bewegung selbst jene Richtung der zwischen der Wand und Erdmasse wirkenden Kraft auch bedingt wird, so kann daraus doch nicht geschlossen werden, daß schon v o r d e r B e w e g u n g diese Reibungswiderstände vorhanden waren. Auch aus den Resultaten der über den Erddruck angestellten Versuche läßt sich, insofern hierbei immer der Druck der Erdmasse bei b e g i n n e n d e r B e w e g u n g gemessen wird, in dieser Beziehung kein Beweis für die Richtigkeit des gedachten Einwandes herleiten. Man darf daher die hier angeführte Methode der Bestimmung des Erddruckes nach der allgemeinen Theorie desselben in allen den Fällen, für welche nach dem Obigen ihre Anwendbarkeit gezeigt wurde, als zuverlässig und sicher betrachten. Um indessen auch die bisher meist angewendete Bestimmungsart mittelst der Theorie vom Prisma des größten Druckes kennen zu lernen, soll diese Methode in den nächsten Paragraphen noch behandelt werden. Dies erscheint schon mit Rücksicht auf diejenigen Fälle erforderlich, für welche nach dem vorstehend Bemerkten die Anwendbarkeit der Erddrucktheorie nicht zu-

lässig ist, und für welche man den Wanddruck nach der Theorie von dem Prisma des größten Erddruckes wird bestimmen müssen.

§. 6. **Das Prisma des grössten Erddruckes.** Es sei in Fig. 18 eine Erdmasse E durch eine verticale Futtermauer AB gestützt und vorausgesetzt, daß die letztere dem Erddrucke nicht genügenden Widerstand entgegensetzen kann, sondern nach der Seite ausweiche, so wird eine gewisse Erdmasse ABC herabgleiten. Ueber die Form dieser abgleitenden Masse ist nun etwas Bestimmtes nicht anzugeben, und man begnügt sich bei der folgenden Untersuchung damit, anzunehmen, daß die Erdmasse in einer ebenen Trennungsfläche AC abgleite. Zu dieser Annahme ist man veranlaßt, um die an sich schon sehr verwickelten Rechnungen überhaupt durchführen zu können, obwohl, wie oben bereits erwähnt wurde, die Wahrscheinlichkeit eine viel größere ist, daß die Trennung der Erdmasse in einer gekrümmten Fläche erfolgt.

Fig. 18.



Setzt man eine ebene Trennungsfläche in AC voraus, so wird also ein dreiseitiges Prisma ABC auf der als feste Ebene zu denkenden Erdmasse E abrutschen und man kann dieses abgleitende Stück vom Gewichte G wie einen Keil ansehen, welcher einen gewissen Druck auf die Gleitfläche AC sowohl wie gegen die Wandfläche AB ausübt. Bei der gedachten Bewegung stellen sich Reibungswiderstände ebenfalls an beiden Flächen AC und AB ein, und man hat sich dann zu denken, daß die resultirende Druckkraft gegen jede dieser Flächen für den Zustand der beginnenden Bewegung um den entsprechenden Reibungswinkel von der Normalen zur Fläche abweicht. Für die Gleitfläche AC hat man den natürlichen Böschungswinkel ϱ der Erdmasse als Reibungswinkel anzunehmen, während der Winkel ϱ_1 für die Wand AB dem Reibungscoefficienten zwischen der Erde und der Mauerfläche entspricht. Dieser Winkel ϱ_1 wird von verschiedenen Autoren verschieden angegeben. Während nach den Versuchen von Audé für die Reibung von Sand an einer hölzernen Bekleidungswand

$$\varphi_1 = tang\, \varrho_1 = 0{,}6, \text{ also } \varrho_1 = 31^0$$

angenommen wird, ist nach Poncelet für grob behauenen Stein und verschiedene Erdarten φ_1 zwischen 0,51 und 0,34 schwankend. Jedenfalls darf

φ_1 niemals größer als φ in Rechnung gestellt werden, denn wenn die Reibung zwischen der Erde und der Wandfläche größer ist, als diejenige zwischen Erde und Erde, so wird der letztere Widerstand überwunden, indem man sich zu denken hat, daß an der Mauerfläche eine unendlich dünne Erdschicht haften wird, an welcher das Erdprisma gleitet. Aus diesem Grunde wird von Rebhann und Scheffler der Reibungscoefficient φ_1 gleich demjenigen φ für die Erdmasse angenommen. Für den gedachten Grenzzustand, d. h. für ein beginnendes Abgleiten des Prismas ABC vom Gewichte G müssen die beiden Reactionen R der Gleitfläche AC und P der Wandfläche AB mit diesem Gewichte G im Gleichgewichte sein. Setzt man diese drei Kräfte, von denen also R und P um die Reibungswinkel ϱ und ϱ_1 von den Normalen der Gleitflächen abweichen, zu dem Dreiecke SFG zusammen, in welchem nach der Figur

$$SGF = GSJ = 90^0 - \varrho_1$$

und

$$FSG = \beta - \varrho$$

ist, so erhält man:

$$\frac{P}{G} = \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\sin(90 - \varrho_1 + \beta - \varrho)} = \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]},$$

also den Druck gegen die Wand:

$$P = G \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]} = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{cotg} \beta \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]}, \quad (1)$$

da man das Gewicht des Erdprismas

$$G = \gamma \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{cotg} \beta$$

zu setzen hat, unter γ wie früher das Gewicht einer Raumeinheit Erde verstanden, und eine Länge des Prismas senkrecht zur Bildebene gleich der Einheit vorausgesetzt.

Der in (1) gefundene Werth für den Wanddruck P ist mit dem Winkel β veränderlich, unter welchem die vorausgesetzte Gleitfläche gegen den Horizont geneigt ist. Jedes von den unzählig vielen Prismen ABC, welche man erhält, wenn man der Ebene AC alle möglichen Lagen ertheilt denkt, wird in dem Bestreben, abzugleiten, einen gewissen von β abhängigen Druck P auf die Wand ausüben, welchem Drucke die letztere widerstehen muß, wenn sie das gedachte Prisma an dem Abgleiten verhindern soll. Damit nun von allen diesen möglichen Prismen kein einziges abgleite, ist es nöthig, daß die Wandfläche einen Gegendruck $-P$ gegen die Erdmasse ausübe, welcher gleich dem größten aller derjenigen Erddrucke ist, die von den verschiedenen Erdprismen auf die Wand ausgeübt werden. Dieses Prisma

nennt man das **Prisma des größten Erddruckes**, und daher läuft die Bestimmung des Erddruckes gegen die Wandfläche auf die Aufgabe hinaus, in jedem speciellen Falle denjenigen Winkel β für die Neigung der Gleitfläche zu ermitteln, für welchen der Druck P ein Maximum wird.

Diese Bestimmung führt, wenn sie analytisch vorgenommen wird, im Allgemeinen zu verwickelten und wenig übersichtlichen Formeln, so daß man in neuerer Zeit in der Praxis meistens den bequemeren Weg der graphischen Ermittelung einschlägt. Um indessen den Gang des analytischen Verfahrens zu zeigen, soll dasselbe zunächst für den der Fig. 18 zu Grunde gelegten Fall durchgeführt werden, d. h. für eine verticale Wandfläche und horizontale Erdbegrenzung.

Hierfür fand sich die Größe des Erddruckes gegen die Wand zu

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \cot g \beta \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]},$$

welcher Ausdruck umgeformt werden möge in:

$$\frac{\gamma h^2}{2} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{\sin\beta\cos\varrho - \cos\beta\sin\varrho}{\cos\beta\cos(\varrho+\varrho_1) + \sin\beta\sin(\varrho+\varrho_1)}$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin\varrho}{\sin(\varrho+\varrho_1)} \frac{\cot g\varrho - \cot g\beta}{\cot g(\varrho+\varrho_1) + \operatorname{tang}\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzt man, um P_{max} zu finden, den Differentialquotienten nach β gleich Null, so erhält man:

$$\frac{\cot g(\varrho+\varrho_1) + \operatorname{tang}\beta}{\sin^2\beta} = \frac{\cot g\varrho - \cot g\beta}{\cos^2\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder

$$\cot g(\varrho+\varrho_1) + \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}^2\beta\cot g\varrho - \operatorname{tang}\beta,$$

d. i.

$$\operatorname{tang}^2\beta - 2\operatorname{tang}\varrho\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\varrho\cot g(\varrho+\varrho_1).$$

Diese quadratische Gleichung liefert den Neigungswinkel β für die Gleitfläche des Prismas vom größten Drucke:

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\varrho\left[1 + \sqrt{1 + \cot g\varrho\cot g(\varrho+\varrho_1)}\right] \quad . \quad . \quad (4)$$

und man erhält durch Einsetzen des so gefundenen Werthes von β in die Gleichung (1) für P den Erddruck, welchen die Wandfläche mindestens aushalten muß, wofür nach einigen Umformungen

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin\varrho}{\cos^2(\varrho+\varrho_1)} \left[\sqrt{\frac{\cos\varrho_1}{\sin\varrho}} - \sqrt{\sin(\varrho+\varrho_1)}\right]^2 \quad . \quad (5)$$

folgt *).

---

*) Dieser Ausdruck ermittelt sich wie folgt: Man findet aus Gleichung (4) auch

Diese Kraft P ist unter dem Winkel ϱ_1 gegen die Normale zu der Wandfläche geneigt, und greift in einem Punkte D an, welcher von dem Fußpunkte A um die Höhe $DA = \frac{1}{3} h$ entfernt ist. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man den obigen Werth von P aus (5) durch $P = \gamma \frac{h^2}{2} A$ ausdrückt, unter A den constanten nur von ϱ und ϱ_1 abhängigen Factor verstanden. Für einen beliebigen Punkt der Wandfläche, welcher um y unter B gelegen ist, hat man dann

$$P = \frac{\gamma A}{2} y^2,$$

und daher erhält man den Druck auf ein Element daselbst von der Höhe ∂y zu

$$\partial P = \gamma A y \, \partial y.$$

Diese elementare Druckkraft hat für den Punkt B als Drehpunkt ein statisches Moment

$$\partial P y \cos \varrho_1 = \gamma A \cos \varrho_1 y^2 \partial y,$$

folglich erhält man das Moment M des gesammten Erddruckes auf die Wand BA durch Integration zu

$$M = \gamma A \cos \varrho_1 \int_0^h y^2 \partial y = \frac{\gamma A}{3} \cos \varrho_1 h^3 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dieses Moment ist nun aber auch, wenn $b = BD$ den Abstand des Angriffspunktes D des Erddruckes von B bezeichnet, durch

$$M = P \cos \varrho_1 b = \frac{\gamma h^2}{2} A \cos \varrho_1 b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\cot g \beta = \frac{\sqrt{1 + \cot g \varrho \cot g (\varrho + \varrho_1)} - 1}{\cot g (\varrho + \varrho_1)},$$

und aus Gleichung (3)

$$\cot g^2 \beta = \frac{\cot g \varrho - \cot g \beta}{\cot g (\varrho + \varrho_1) + \operatorname{tang} \beta},$$

folglich wird nach (2)

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\sin (\varrho + \varrho_1)} \frac{\cot g \varrho - \cot g \beta}{\cot g (\varrho + \varrho_1) + \operatorname{tang} \beta}$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\sin (\varrho + \varrho_1)} \left[\frac{\sqrt{1 + \cot g \varrho \cot g (\varrho + \varrho_1)} - 1}{\cot g (\varrho + \varrho_1)}\right]^2$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\cos^2 (\varrho + \varrho_1)} \left[\sqrt{\frac{\sin (\varrho + \varrho_1) \sin \varrho + \cos (\varrho + \varrho_1) \cos \varrho}{\sin \varrho}} - \sqrt{\sin (\varrho + \varrho_1)}\right]^2$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\cos^2 (\varrho + \varrho_1)} \left[\sqrt{\frac{\cos \varrho_1}{\sin \varrho}} - \sqrt{\sin (\varrho + \varrho_1)}\right]^2.$$

ausgedrückt, so daß man durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (6) und (7)

$$b = {}^2/_3\, h = {}^2/_3\, AB$$

erhält.

Wenn man, wie dies häufig geschieht, auf die Reibung der Erde an der Futtermauer keine Rücksicht nehmen will, wodurch man den Erddruck größer, das Bauwerk daher entsprechend sicherer erhält, so hat man in obigen Formeln $\varrho_1 = 0$ zu setzen, und erhält dann aus (5):

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{1 - \sin\varrho}{1 + \sin\varrho} = \frac{\gamma h^2}{2} \tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

und aus (4):

$$\tang\beta = \frac{1 + \sin\varrho}{\cos\varrho} = \tang \frac{90^0 + \varrho}{2},$$

woraus man ersieht, daß unter dieser Voraussetzung die Trennungsebene AC den Winkel zwischen der Wand AB und der natürlichen Böschung AE halbirt.

In ähnlicher Art, wie im Vorstehenden der active Erddruck gegen Futtermauern durch die Ermittelung des Prismas vom größten Drucke bestimmt worden ist, läßt sich auch der passive Erddruck oder der Widerstand bestimmen, welchen die Erdmasse einem gegen dieselbe ausgeübten Schube entgegensetzt, indem man von allen verschiedenen Prismen, welche hierbei möglicher Weise fortgeschoben werden können, dasjenige ermittelt, welches seiner Verschiebung den kleinsten Widerstand entgegensetzt. In diesem Sinne spricht man von einem Prisma des kleinsten Widerstandes, bei dessen Ermittelung man selbstredend die Reibungswiderstände in einer der oben vorausgesetzten entgegengesetzten Richtung, d. h. ebenfalls in einem der angestrebten Verschiebung entgegenwirkenden Sinne anzunehmen hat. Die Formeln für den activen Erddruck gelten ohne Weiteres auch für den passiven Schub, sobald man darin $\varphi = -\varphi$ und $\varphi_1 = -\varphi_1$ einführt.

Beispiel. Wie groß ist der active Erddruck gegen eine 3 m hohe verticale Futtermauer, hinter welcher die Erde horizontal abgeglichen ist, wenn das specifische Gewicht der Erdmasse zu 1,5, der natürliche Böschungswinkel zu $\varrho = 36^0$ und der Reibungswinkel zwischen der Erde und der Mauerfläche zu $\varrho_1 = 25^0$ angenommen wird?

Man erhält den Druck P gegen eine Mauer von 1 m Länge nach (5) zu:

$$P = \frac{1500 \,.\, 3 \,.\, 3}{2} \frac{\sin 36^0}{\cos^2 61^0} \left(\sqrt{\frac{\cos 25^0}{\sin 36^0}} - \sqrt{\sin 61^0}\right)^2$$

$$= 6750 \frac{0{,}5878}{0{,}4848^2} (\sqrt{1{,}542} - \sqrt{0{,}8746})^2$$

$$= 6750 \,.\, 2{,}501 \,.\, 0{,}0942 = 1590 \text{ kg}.$$

Für den Gleitwinkel β findet sich aus (4):

$$tang\,\beta = tang\,36^0\,(1 + \sqrt{1 + cotg\,36^0\,cotg\,61^0})$$
$$= 0{,}7265\,(1 + \sqrt{1 + 1{,}3764\,.\,0{,}5543})$$
$$= 0{,}7265\,.\,2{,}326 = 1{,}6898 = tang\,59^0\,23'.$$

Ohne Berücksichtigung der Reibung an der Wand hätte man:

$$\beta_0 = \frac{90^0 + 36^0}{2} = 63^0$$

und den Erddruck:

$$P_0 = \frac{1500\,.\,9}{2}\,tang^2\,\frac{90^0 - 36^0}{2} = 6750\,.\,0{,}5095^2 = 1752 \backsim 1750\,\text{kg},$$

also um 162 kg größer als mit Berücksichtigung der Reibung. Von dem gefundenen Erddrucke P wirkt die horizontale Componente

$$H = P\,cos\,25^0 = 1590\,.\,0{,}9063 = 1441\,\text{kg}$$

auf Umstürzen der Mauer, während die verticale Seitenkraft

$$V = P\,sin\,25^0 = 1590\,.\,0{,}4226 = 672\,\text{kg}$$

die Mauer belastet und dadurch die Stabilität erhöht.

Der passive Erdschub würde sich, wenn man die Reibung an der Wandfläche vernachlässigt, zu

$$P = \frac{1500\,.\,9}{2}\,tang^2\,\frac{90^0 + 36^0}{2} = 6750\,.\,1{,}9626^2 = 26000\,\text{kg}$$

berechnen, entsprechend einem Gleitwinkel

$$\beta = \frac{90^0 - 36^0}{2} = 27^0.$$

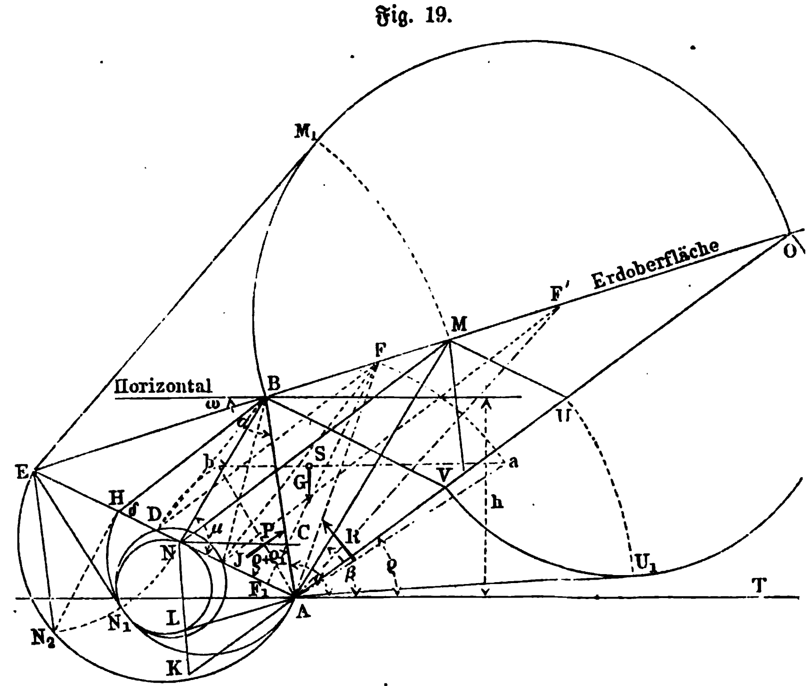
Graphische Druckermittelung. Die im vorhergehenden Paragraphen unter den beschränkenden Voraussetzungen einer verticalen Stützwand und einer horizontalen Erdoberfläche angegebene rechnerische Bestimmung des Erddruckes führt für den allgemeinen Fall einer beliebig geneigten Futtermauer und einer beliebig begrenzten Erdoberfläche zu so verwickelten Formeln, daß es für alle Fälle der Praxis jedenfalls vorzüglicher erscheint, zu dieser Druckermittelung sich graphischer Methoden zu bedienen, welche in vergleichsweise einfacher Art in fast allen vorkommenden Fällen zum Ziele führen. Deshalb soll hier noch das von Poncelet*) angegebene Verfahren angeführt werden. §. 7.

Zu dem Behufe sei AB, Fig. 19 (a. f. S.), die stützende Fläche einer unter dem beliebigen Winkel α gegen den Horizont AT geneigten Futtermauer, welche einer Erdmasse zu widerstehen hat, deren ebene Oberfläche BO unter dem Winkel ω gegen den Horizont geneigt ist, wobei ω ebenfalls beliebig groß, wenn nur kleiner als der Böschungswinkel ϱ der Erdmasse

*) Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, von Poncelet, übersetzt von W. Lahmeyer. Braunschweig 1844.

sein kann. Es werde als Gleitfläche eine beliebige Ebene AF angenommen, so hat man sich im Schwerpunkte S des dreiseitigen Prismas ABF das

Fig. 19.



Gewicht G der abrutschenden Erdmasse zu denken. Durch dieses Gewicht G werden Reactionen R und P der Gleitfläche AF und der Mauerfläche AB erzeugt, welche mit G im Gleichgewichte sein müssen. Von den Richtungen dieser Reactionen muß man annehmen, daß sie im Momente des Abgleitens um die Reibungswinkel ϱ bezw. ϱ_1 von den Normalen der Gleitfläche bezw. der Wandfläche abweichen. Würde man diese Kräfte der Richtung und Größe nach an einander antragen, so erhielte man als Kräftepolygon ein geschlossenes Dreieck, dessen Seiten den Kräften verhältnißgleich sind. Es ist auch deutlich, daß man ein mit diesem Kräftedreieck ähnliches Dreieck erhalten wird, wenn man irgendwo zu den Kraftrichtungen senkrechte Gerade zieht; ein solches Dreieck ist z. B. Aab, worin Aa senkrecht zu R, Ab senkrecht zu P und ab senkrecht zu G, also horizontal gezogen ist. Offenbar sind auch die Seiten dieses Dreiecks mit den Kräften proportional, und zwar jede Seite mit derjenigen Kraft, auf welcher sie senkrecht steht, z. B. stellt Ab die Kraft P nach demjenigen Maßstabe vor, nach welchem das Gewicht G durch ab ausgedrückt ist. Von dem Dreiecke Aab bildet ferner

die Seite Aa mit der Gleitfläche AF ebenso den Winkel ϱ, wie die entsprechende Kraft R mit ihrer Flächennormale, und wenn man daher dem besagten Dreiecke Aab eine Linksdrehung um A im Winkelbetrage ϱ ertheilt denkt, so fällt die Seite Aa in die Gleitfläche AF hinein, und zwar trifft a nach F, wenn man von vornherein die willkürliche Länge $Aa = AF$ machte. Die das Gewicht G darstellende horizontale Seite ab gelangt durch die Drehung um ϱ in eine Lage FD parallel zur natürlichen Böschung der Erdmasse, während die dritte Seite Ab, welche zuvor den Winkel ϱ_1 mit der Wandfläche AB bildete, nach der Drehung mit der Wandfläche AB offenbar den Winkel $BAD = \varrho + \varrho_1$ einschließt. Das Dreieck AFD repräsentirt also in seinen Seitenlängen die Größen der Kräfte R, G und P, wenn man einen Kräftemaßstab von solcher Eintheilung zu Grunde legt, daß die Länge FD danach dem Gewichte des dreiseitigen Erdprismas ABF entspricht, dabei immer eine Dimension des Prismas senkrecht zur Bildebene gleich 1 m vorausgesetzt. Daher folgt ohne Weiteres die Größe des Erddruckes auf die Wandfläche:

$$P = G \frac{AD}{DF} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Um das Gewicht G des Erdprismas ABF zu bestimmen, kann man, wenn BJ parallel FA geführt wird, anstatt des Dreiecks ABF das flächengleiche Dreieck AJF setzen, dessen Inhalt durch

$$\frac{1}{2} AJ \,.\, FF_1 = \frac{1}{2} AJ \,.\, DF \sin\delta$$

gefunden wird, wenn FF_1 die senkrechte Höhe zur Grundlinie AJ und δ der Winkel FDA ist. Man hat daher, unter γ das Gewicht von 1 cbm Erde verstanden, das Gewicht des Prismas:

$$G = \frac{1}{2} \gamma \sin\delta \,.\, AJ \,.\, DF,$$

und daher den Wanddruck nach (1):

$$P = G \frac{AD}{DF} = \frac{1}{2} \gamma \sin\delta \,.\, AJ \,.\, AD \quad \ldots \quad (2)$$

Man hat also, um das Prisma vom größten Drucke zu erhalten, die Lage der Gleitfläche AF so zu wählen, daß das Product $AJ \,.\, AD$ zu einem Maximum wird. Um zu erkennen, unter welcher Bedingung dies der Fall ist, ziehe man noch durch den obersten Punkt B der Wandfläche die Gerade BH parallel zu FD, also unter dem Winkel ϱ gegen den Horizont, alsdann hat man wegen des Parallelismus der beiden von B und F ausgehenden Linienpaare

$$EH : ED = EB : EF = EJ : EA,$$

folglich auch

$$ED \,.\, EJ = EH \,.\, EA = Const.$$

Die beiden Punkte D und J, welche sich in vorstehender Art für irgend eine angenommene Gleitfläche AF ergaben, haben also die Eigenschaft, daß das Product ihrer Abstände $ED \,.\, EJ$ von dem bekannten Punkte E eine constante Größe, nämlich gleich $EH.EA = EN_1^2$ ist, wenn EN_1 die von E aus an den über AH gezeichneten Halbkreis gezogene Tangente bedeutet. Aus den bekannten Eigenschaften des Kreises geht nunmehr hervor, daß ein Kreis, welcher durch die drei Punkte D, J und N_1 gelegt wird, in N_1 ebenfalls von der Geraden EN_1 berührt werden muß. Zieht man nun von A aus an diesen letztgedachten Kreis die Tangente AL, so hat man:

$$AL^2 = AJ \,.\, AD,$$

also auch nach (2) in AL^2 ein Maß für den gefundenen Erddruck:

$$P = {}^1/_2\, \gamma \sin\delta \,.\, AJ \,.\, AD.$$

Es ist nun aber ersichtlich, daß von allen möglichen Kreisen $N_1 L$, welche die Gerade EN_1 in N_1 berühren und durch zwei Punkte D und J der Geraden AH gehen, derjenige die größte von A aus gezogene Tangente AL hat, welcher AH ebenfalls berührt, d. h. für welchen die beiden Punkte D und J zusammenfallen. Dieser fragliche Kreis berührt offenbar die Gerade AE in einem Punkte N, für welchen $EN = EN_1$ ist, und man findet durch die Tangente AN an diesen Kreis von A aus und zwar in $\overline{AN^2}$ das Maximum von $AJ \,.\, AD$, und daher das Maß für den größten Erddruck. Es ist nun leicht zu erkennen, daß man das diesem größten Erddrucke entsprechende Prisma erhält, wenn man durch N die Gerade NM parallel mit DF oder HB, d. h. parallel zur natürlichen Böschung der Erdmasse legt, und M mit A verbindet. Man hat dann in ABM das Prisma des größten Druckes erhalten, für welches die Ebene AM als Bruchfläche anzusehen ist. Es ist übrigens leicht ersichtlich, daß diese Gleitfläche AM auch parallel mit NB ausfällt, so daß man auch N mit B verbinden und in der durch A zu NB parallelen Geraden AM die Gleitfläche construiren kann. Ebenso ergiebt sich, wenn man noch AO parallel zu HB legt, daß auch $EB \,.\, EO = \overline{EM^2}$ sein muß, woraus eine andere Construction von M folgt, indem man EM gleich der mittleren Proportionale EM_1 zwischen EB und EO aufträgt. Selbstredend würde man den Punkt N auch dadurch bestimmen können, daß man in H eine zu AE senkrechte Gerade bis zum Durchschnitte N_2 mit dem über AE beschriebenen Halbkreise zeichnet und $EN = EN_2$ anträgt. Ebenso ist es ersichtlich, daß man zu dem Punkte M gelangt, wenn man BV parallel zu AE zieht, und zu AV und AO die mittlere Proportionale AU_1 sucht, dieselbe nach AU überträgt und durch U eine Parallele zu AE zieht, denn es gilt auch die Gleichung $\overline{AU^2} = AV \,.\, AO$ u. s. f. Man wird von diesen verschiedenen Con-

structionen zur Ermittelung von N oder M in jedem besonderen Falle die bequemste auswählen.

Wenn man ferner noch durch J eine Parallele zu AO zieht, so findet man einen Punkt F', von welchem sofort zu erkennen ist, daß das durch die Ebene AF' begrenzte Prisma ABF' denselben Wanddruck P erzeugen muß, wie das Prisma ABF, denn für beide gilt die Beziehung

$$P = {}^1/_2 \gamma \sin \delta \,.\, AJ \,.\, AD.$$

Von dem Erddrucke $P = {}^1/_2 \gamma \sin \delta \,.\, \overline{AN^2}$ giebt die Figur ebenfalls eine Darstellung in dem Dreiecke ANK, welches man erhält, wenn man OA rückwärts um $AK = AN$ verlängert, denn der Inhalt dieses Dreiecks NAK ist dann offenbar durch ${}^1/_2 \sin \delta \,.\, \overline{AN^2}$ ausgedrückt, und es verhält sich daher der Erddruck P zu dem Gewichte des abgleitenden Prismas BAM wie der Inhalt des Dreiecks NAK zu demjenigen des Dreiecks BAM.

Man kann bemerken, daß es außer dem gezeichneten Kreise NN_1 noch einen zweiten solchen giebt, welcher AE auf der Verlängerung über E hinaus berührt, und es ist ersichtlich, daß diesem Kreise von allen denjenigen, welche EN_1 in N_1 berühren, und die Verlängerung von AE in zwei Punkten schneiden, die kleinste von A aus gezogene Tangente zukommt, deren Größe durch $AE + EN$ sich ausdrückt. Dieser Kreis entspricht dem oberen Grenzzustande und ist daher zu benutzen, wenn es sich um die Ermittelung des Prismas vom kleinsten Widerstande behufs Bestimmung des passiven Erddruckes handelt.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, die Construction anzugeben, vermöge deren in irgend einem vorliegenden Falle der Erddruck, bezw. der Erdwiderstand in Hinsicht auf eine Futtermauer gefunden wird.

Es sei zu dem Ende AB, Fig. 20 und 21 (a. f. S.), die betreffende Mauerfläche und EO die ebene, beliebig gegen den Horizont geneigte Oberfläche der Erde, deren Druck (Fig. 20) bezw. Widerstand (Fig. 21) zu ermitteln ist. Hierzu lege man durch den Fußpunkt A die beiden Geraden AO unter dem natürlichen Böschungswinkel ϱ gegen den Horizont AH, und AE unter dem Winkel $BAE = \varrho + \varrho_1$ gegen die Mauerfläche, und zwar zur Ermittelung des Erddruckes (Fig. 20) von der Mauerfläche AB nach außen und zur Bestimmung des Erdwiderstandes (Fig. 21) nach der Erdmasse hin gerichtet. Zieht man dann an den über OB gezeichneten Halbkreis die Tangente EM_1 und trägt $EM = EM_1$ auf, so erhält man in AM die Gleitfläche, und wenn man MN parallel der natürlichen Böschung AO führt, so liefert die Strecke AN ein Maß für den Druck auf die Wandfläche, welcher durch

$$P = {}^1/_2 \sin \delta \,.\, \overline{AN^2}$$

ausgedrückt und durch das Dreieck ANK dargestellt ist, in welchem

$AK = AN$ gemacht ist. Es ist nach dem Vorhergehenden deutlich, daß man anstatt des Halbkreises über OB auch denjenigen über AB_1 benutzen kann, nachdem man durch B die zu AO parallele Gerade BB_1 gezogen hat.

Fig. 20.

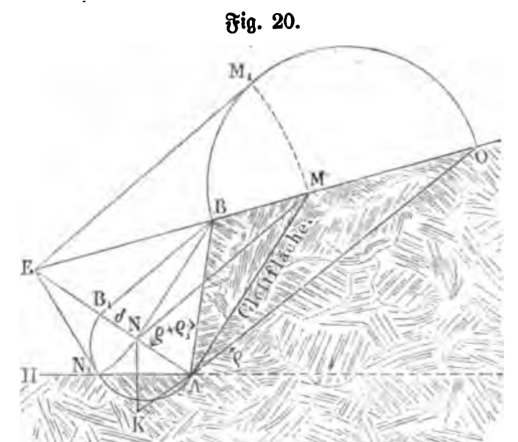
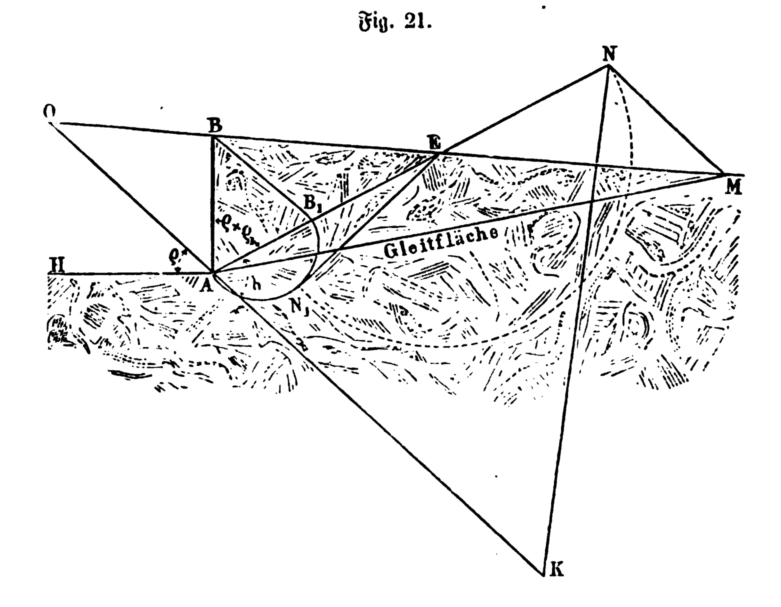


Fig. 21.



Wenn die Oberfläche der Erdmasse nicht, wie bisher angenommen wurde, durch eine einzige Ebene gebildet, sondern etwa nach einer gebrochenen Linie BCE, Fig. 22, profilirt ist, so hat man für die Untersuchung zunächst das

Profil $ABCM$ in ein dreieckiges AB_1M zu verwandeln, dessen Spitze in A und dessen Basis B_1M in die verlängerte Terrainfläche EC hineinfällt, in welcher muthmaßlich die Bruchfläche AM zu Tage tritt. Hierauf ist obiges Verfahren so anzuwenden, daß nunmehr B_1 als obere Kante der Mauer angesehen wird. Wenn sich hierbei herausstellen würde, daß die Bruchfläche nicht zwischen C und E, sondern zwischen B_1 und C, etwa in M', die Ebene CE schneidet, so hätte man die Construction nur unter Berücksichtigung des Profils ABC zu wiederholen, indem die Begrenzung CE hinterhalb der Gleitfläche alsdann ohne Einfluß auf den Wanddruck ist. Den Punkt B_1 findet man leicht in dem Durchschnitte der verlängerten Terrainlinie EC mit einer von B aus zu AC gezogenen Parallelen.

Fig. 22.

Wenn ferner die Oberfläche der Erdmasse durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung gedrückt wird, so hat man sich diese Last wie eine parallel zur Oberfläche begrenzte Erderhöhung zu denken, deren Höhe so bemessen ist, daß sie dasselbe Gewicht repräsentirt, wie die vorhandene Belastung, der Wanddruck wird dadurch natürlich entsprechend vergrößert, in der Neigung der Bruchfläche und der Richtung des Druckes wird durch die zusätzliche Belastung nichts geändert, wohl aber wird, wie in §. 5 bereits gezeigt wurde, dadurch der Angriffspunkt des Erddruckes höher gerückt.

Formeln für den Erddruck. Vermittelst der im vorigen Paragraphen angegebenen Construction ist es nun leicht, für die Größe des Erddruckes eine allgemeine Formel aufzustellen, da es nur darauf ankommt, in der daselbst für den Erddruck gefundenen Gleichung §. 8.

$$P = \frac{1}{2} \gamma \sin \delta \,.\, \overline{AN^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die Strecke AN durch die gegebenen Größen auszudrücken. Der Winkel $\delta = MNA = NAK$, Fig. 19, bestimmt sich zunächst nach der Figur durch

$$\delta + \varrho + \varrho_1 + \alpha - \varrho = 180^0 \text{ zu } \delta = 180^0 - (\alpha + \varrho_1) \quad . \quad (2)$$

so daß man hat

$$\sin \delta = \sin (\alpha + \varrho_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Ferner ist

$$AN = EA - EN = EA - \sqrt{EH \cdot EA} = EA\left(1 - \sqrt{\frac{EH}{EA}}\right) \quad (4)$$

Nun folgt aus dem Dreiecke ABE:

$$EA = AB \frac{\sin EBA}{\sin AEB} = AB \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)}$$

$$= \frac{h}{\sin\alpha} \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

und

$$\frac{EH}{EA} = \frac{EH}{EB}\frac{EB}{EA} = \frac{\sin(\varrho - \omega)}{\sin(\alpha + \varrho_1)} \frac{\sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha - \omega)} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Mit den Werthen von (5) und (6) erhält man aus (4):

$$AN = \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)}\left(1 - \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \omega)\sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1)\sin(\alpha - \omega)}}\right)$$

$$= c\frac{h}{\sin\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

wenn man den Coefficienten von $\frac{h}{\sin\alpha}$ der Kürze wegen mit c bezeichnet. Daher wird schließlich nach (1) und (3) der Erddruck:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin(\alpha + \varrho_1)}{\sin^2\alpha} \frac{\sin^2(\alpha - \omega)}{\sin^2(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)}\left(1 - \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \omega)\sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1)\sin(\alpha - \omega)}}\right)^2$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin(\alpha + \varrho_1)}{\sin^2\alpha} c^2 = k\gamma\frac{h^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wenn man

$$\frac{\sin(\alpha + \varrho_1)}{\sin^2\alpha} c^2 = k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

setzt.

Dieser Ausdruck für P, welcher allgemein für alle Fälle gilt, in denen die Oberfläche der Erdmasse durch eine Ebene begrenzt ist, läßt die Analogie des Erddruckes mit dem Drucke einer Flüssigkeit erkennen. Da der Werth k nur von den Winkeln α, ω, ϱ und ϱ_1 abhängig ist, also für alle Punkte im Innern der Erdmasse derselbe ist, so kann man der Gleichung (8) zufolge den Druck der Erde gegen die Wandfläche wie den hydrostatischen Druck einer Flüssigkeit ansehen, welche das Gewicht $k\gamma$ pro Cubikeinheit hat. Dem entsprechend wird auch der Angriffspunkt des resultirenden Erddruckes wie bei Flüssigkeiten in $1/3$ der Höhe h über dem Fußpunkte A der gedrückten Wandfläche AB gelegen sein, wie dies auch schon früher gefunden wurde.

Aus der Fig. 19 kann man auch einen analytischen Ausdruck für den Winkel $\beta = MAT$ entnehmen, welchen die Gleitfläche MA mit dem Horizonte bildet. Bezeichnet man zu dem Zwecke mit μ den Winkel BNA, welchen die Richtung der Gleitfläche mit der unter der Neigung $\varrho + \varrho_1$ gegen die Wandfläche gezogenen Geraden AE bildet, so ersieht man aus dem Dreiecke ABN, daß

$$tang\, \mu = \frac{AB \sin(\varrho + \varrho_1)}{AN - AB \cos(\varrho + \varrho_1)} \text{ ist.}$$

Setzt man hierin $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$ und nach Gleichung (7) $AN = c\frac{h}{\sin \alpha}$ ein, so folgt:

$$tang\, \mu = \frac{\sin(\varrho + \varrho_1)}{c - \cos(\varrho + \varrho_1)} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

Da nun aber nach der Figur, wenn NC horizontal ist,

$$\mu = BNA = BNC + CNA = \beta + 180^0 - (\alpha + \varrho + \varrho_1)$$

ist, so hat man auch:

$$\beta = \alpha + \varrho + \varrho_1 - 180^0 + \mu,$$

und mit Bezug auf (10):

$$\beta = \alpha + \varrho + \varrho_1 - 180^0 + arc.tang \frac{\sin(\varrho + \varrho_1)}{c - \cos(\varrho + \varrho_1)} \quad . \quad (11)$$

worin man für c den aus (7) zu entnehmenden Werth:

$$c = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)}\left(1 - \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \omega)\sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1)\sin(\alpha - \omega)}}\right) \quad (12)$$

einzuführen hat.

Es mögen noch die obigen Formeln auf einige besondere, häufiger vorkommende Fälle angewendet werden.

Setzt man, wie in §. 6, eine verticale Wandfläche und eine horizontale Oberfläche, also $\alpha = 90^0$ und $\omega = 0$ voraus, so erhält man, wenn man auch die Reibung an der Wand vernachlässigt, also mit $\varrho_1 = 0$, aus (12):

$$c = \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \varrho} = tang \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

und aus (8):

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}.$$

Ferner ist nach (10):

$$tang\, \mu = \frac{\sin \varrho}{c - \cos \varrho} = \frac{\sin \varrho \cos \varrho}{1 - \sin \varrho - \cos^2 \varrho} = \frac{\cos \varrho}{\sin \varrho - 1}$$

$$= - cotg \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

daher folgt:

$$\mu = 90^0 + \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

und aus (11):

$$\beta = \frac{90^0 + \varrho}{2},$$

wie schon früher gefunden.

Setzt man ϱ_1 nicht gleich Null, so wird in diesem Falle:

$$c = \frac{1}{\cos(\varrho + \varrho_1)}\left(1 - \sqrt{\frac{\sin\varrho\ \sin(\varrho + \varrho_1)}{\cos\varrho_1}}\right),$$

und damit

$$k = \left(\frac{\sqrt{\cos\varrho_1} - \sqrt{\sin\varrho\ \sin(\varrho + \varrho_1)}}{\cos(\varrho + \varrho_1)}\right)^2.$$

Nimmt man ferner bei ebenfalls verticaler Wandfläche $\omega = \varrho$ und $\varrho_1 = 0$ an, so erhält man aus (12) $c = \cos\varrho$, und damit aus (8):

$$P = \frac{\gamma h^2}{2}\cos^2\varrho;$$

ferner aus (10) $tang\,\mu = \infty$, also:

$$\mu = 90^0 \quad \text{und} \quad \beta = \varrho.$$

Würde man im letzteren Falle den Reibungswinkel ϱ_1 für die Wandfläche gleich dem ϱ der Erdmasse annehmen, so erhielte man:

$$c = 1 \quad \text{und} \quad P = \frac{\gamma h^2}{2}\cos\varrho,$$

während auch dann $\beta = \varrho$ bleibt. Diese Resultate stimmen mit den für denselben Fall nach der Mohr'schen Theorie des Erddruckes in §. 4 gefundenen überein, wie es auch in der Natur der Sache ist, da in diesem Falle (s. Fig. 10) die eine Gleitfläche der Erdmasse, in welcher der Druck um den Winkel ϱ gegen die Normale zur Fläche abweicht, mit der Wandfläche zusammenfällt.

Beispiel. Es soll der Druck einer Erdmasse gegen eine 5 m hohe Mauer gefunden werden, deren dem Erddrucke ausgesetzte Fläche einen Anlauf von $\frac{1}{20}$ hat, wenn die Erdoberfläche unter dem Winkel $\omega = 20^0$ gegen den Horizont geneigt ist, wenn ferner der Reibungswinkel für die Erde $\varrho = 35^0$ und derjenige für die Mauerfläche $\varrho_1 = 25^0$ ist, und 1 Cubikmeter Erde 1600 kg wiegt?

Man hat hier für die überhängende Mauerfläche

$$\alpha = 90^0 + arc\ tang\ 0{,}05 = 93^0 \quad \text{und} \quad \omega = 20^0.$$

Mit diesen Werthen erhält man zunächst aus (12):

$$c = \frac{\sin 73^0}{\sin 133^0}\left(1 - \sqrt{\frac{\sin 15^0\ \sin 60^0}{\sin 128^0\ \sin 73^0}}\right) = 1{,}307\ .\ 0{,}4546 = 0{,}595,$$

und damit aus (8) den Erddruck für jede Mauerfläche von 1 m Länge:

$$P = \frac{1600 \cdot 25}{2} \frac{\sin 118^0}{\sin^2 93^0} 0{,}595^2 = 20000 \cdot 0{,}885 \cdot 0{,}354 = 6260 \text{ kg},$$

welcher Druck unter einem Winkel von $3^0 + 25^0 = 28^0$ gegen den Horizont in einer Höhe $a = \frac{5}{3} = 1{,}667$ m über dem Fußpunkte der Mauer wirkt. Zur Bestimmung des Neigungswinkels β der Gleitfläche hat man zunächst nach (10):

$$\tang \mu = \frac{\sin 60^0}{0{,}595 - \cos 60^0} = 9{,}116,$$

womit $\mu = 83^0 44'$ und nach (11):

$$\beta = 93^0 + 35^0 + 25^0 - 180^0 + 83^0 44' = 56^0 44'$$

folgt.

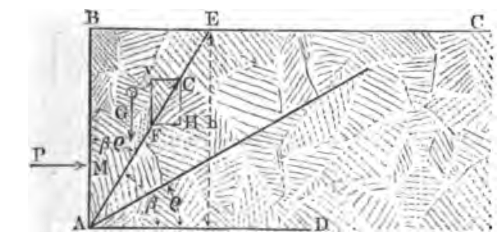
Cohäsion lockerer Massen. Bei den bisherigen Ermittelungen wurde die Cohäsion ganz außer Acht gelassen, welche gewisse, besonders lehmhaltige Massen ihrer Trennung entgegensetzen. Da diese Kraft indessen bei festgestampfter Erde und bei gewöhnlichem Boden oft nicht unbedeutend ist, so soll hier noch die Untersuchung mit Berücksichtigung der Cohäsion geführt werden. Während die Reibung proportional mit dem Normaldrucke, jedoch unabhängig von der Berührungsfläche ist, hat man dagegen die Cohäsion als von dem Drucke unabhängig und mit der Größe der Trennungsfläche im directen Verhältnisse stehend anzunehmen. Als Maß oder Modul der Cohäsion möge diejenige Kraft c angenommen werden, welche erforderlich ist, um den Zusammenhang der Erdmasse in einer Trennungsfläche gleich 1 Quadratmeter aufzuheben. §. 9.

Um nun den Druck der durch eine horizontale Ebene BC, Fig. 23, begrenzten Erdmasse gegen die verticale Stützwand AB zu ermitteln, sei wieder vorausgesetzt, daß ein keilförmiges Prisma ABE vom Gewichte G auf der schiefen Ebene AE vom Neigungswinkel

$$EAD = \beta$$

herabzugleiten strebe, und durch die von der Futtermauer AB ausgeübte Reaction P daran verhindert werde. Außer den beiden Kräften G und P und der Reibung auf der schiefen Ebene wirkt nun hier noch in AE die Cohäsionskraft

Fig. 23.



$$C = c \cdot AE = c \frac{h}{\sin \beta},$$

welche in gleichem Sinne wie die Reibung eine Bewegung zu hindern strebt, also im vorliegenden Falle aufwärts gerichtet ist. Die Cohäsionskraft C läßt sich nun in zwei Componenten, horizontal und vertical, zerlegen, von denen die erstere

$$H = C \cos \beta = c h \operatorname{cotg} \beta$$

in gleichem Sinne mit dem Drucke P der Futtermauer wirkt, während die verticale Componente

$$V = C \sin \beta = c h$$

dem Gewichte G des Erdprismas direct entgegenwirkt. Man kann daher für den vorliegenden Fall die bekannte Gleichung der schiefen Ebene

$$K = Q \operatorname{tang} (\beta - \varrho)$$

anwenden, wenn man für die vertical wirkende Last Q hier $G - V$ und für die horizontale Kraft K die Summe $P + H$ einführt. Hierdurch erhält man:

$$P + H = (G - V) \operatorname{tang} (\beta - \varrho),$$

oder, wenn man hierin für H und V die obigen Werthe und

$$G = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{cotg} \beta$$

setzt:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tang} (\beta - \varrho) - c h \operatorname{tang} (\beta - \varrho) - c h \operatorname{cotg} \beta \quad (1)$$

Nun hat man wieder denjenigen Werth von β zu ermitteln, für welchen P ein Maximum wird, um den activen Erddruck zu erhalten. Um der Gleichung (1) zu dem Zwecke die geeignete Form zu ertheilen, addire und subtrahire man $c h \operatorname{cotg} \varrho \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tang} (\beta - \varrho)$, so erhält man:

$$P = h \left[\left(\frac{\gamma h}{2} + c \operatorname{cotg} \varrho \right) \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tang} (\beta - \varrho) - c \operatorname{cotg} \beta \right.$$
$$\left. - c (1 + \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \varrho) \operatorname{tang} (\beta - \varrho) \right].$$

Nun folgt aber leicht

$$(1 + \operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \varrho) \operatorname{tang} (\beta - \varrho) = \operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \beta \text{ *)},$$

folglich erhält man auch:

$$P = \left[\left(\frac{\gamma h}{2} + c \operatorname{cotg} \varrho \right) \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tang} (\beta - \varrho) - c \operatorname{cotg} \varrho \right] h \quad . \quad (2)$$

*) Man erhält diesen Ausdruck durch:

$$\operatorname{tang} (\beta - \varrho) = \frac{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \varrho}{1 + \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \varrho} = \frac{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \varrho}{1 + \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \varrho} \, \frac{\operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \varrho}{\operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \varrho}$$
$$= \frac{\operatorname{cotg} \varrho - \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} \beta \operatorname{cotg} \varrho + 1}.$$

Um nun das Maximum von P zu finden, setzt man $\frac{\partial P}{\partial \beta} = 0$, und erhält dadurch:

$$\frac{cotg\, \beta}{cos^2\, (\beta - \varrho)} = \frac{tang\, (\beta - \varrho)}{sin^2\, \beta},$$

woraus

$$sin\, 2\beta = sin\, 2(\beta - \varrho),$$

also

$$2\beta = 180^0 - 2\, (\beta - \varrho),$$

d. i.

$$\beta = \frac{90^0 + \varrho}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

folgt.

Die unter diesem Winkel β gegen den Horizont geneigte Gleitfläche bildet also mit der natürlichen Böschung und der Wand gleiche Winkel $\frac{90^0 - \varrho}{2}$.

Setzt man diesen Werth für β in die Gleichung (1), so erhält man, da hierfür $cotg\, \beta = tang\, (\beta - \varrho) = tang\, \frac{90^0 - \varrho}{2}$ ist, die Größe des activen Erddruckes zu:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2}\, tang^2\, \frac{90^0 - \varrho}{2} - 2\, c\, h\, tang\, \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad \ldots \quad (4)$$

Diese Kraft wird gleich Null für

$$\frac{\gamma h}{2}\, tang\, \frac{90^0 - \varrho}{2} = 2\, c,$$

d. h. für die Höhe:

$$h_0 = \frac{4\, c}{\gamma\, tang\, \frac{90^0 - \varrho}{2}} = \frac{4\, c}{\gamma}\, tang\, \frac{90^0 + \varrho}{2} \quad \ldots \quad (5)$$

Auf diese Höhe h_0 läßt sich also eine cohärente Erdmasse, deren Cohäsionsmodul c ist, senkrecht abstechen, ohne daß ein Nachrollen erfolgt, und umgekehrt läßt sich aus der Höhe h_0, auf welche man eine Erdmasse senkrecht anschneiden kann, der Cohäsionsmodul c bestimmen durch:

$$c = \frac{\gamma\, h_0}{4}\, tang\, \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Führt man noch diesen Werth für c in die Gleichung (4) ein, so erhält man auch:

$$P = \frac{\gamma h}{2}\, (h - h_0)\, tang^2\, \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Bei Sand, Getreide, Schrot, sowie bei aufgelöster und frisch gegrabener Erde ist h_0 nahezu gleich Null, bei zusammengedrückter oder feucht gewesener

Erde jedoch ist die Höhe h_0 oft beträchtlich, und zwar geringer bei Gartenerde, größer bei thoniger und lehmiger Erdmasse. Für lockere, etwas feuchte Dammerde z. B. fand Martony $h_0 = 0,9$ Fuß (0,285 m), dagegen bei ganz mit Wasser durchweichter Erde $h_0 = 0$. Dichte Pflanzenerde läßt sich höchstens bis 2 m, thonige Erde dagegen etwa 3 bis selbst 4 m hoch senkrecht abgraben. In den meisten Fällen der Anwendung, insbesondere bei angeschütteter Erde, ist es rathsam, die Cohäsionskraft unbeachtet zu lassen.

Zur Bestimmung des passiven Erddruckes hat man in den vorstehenden Formeln nur ϱ und c mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet einzuführen, da sowohl die Reibung, wie die Cohäsion für diesen Fall in entgegengesetzter Richtung wirken. Man erhält daher für den passiven Erddruck oder Erdwiderstand:

$$P' = \frac{\gamma h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 + \varrho}{2} + 2ch\, tang \frac{90^0 + \varrho}{2},$$

oder:

$$P' = \frac{\gamma h}{2} (h + h')\, tang^2 \frac{90^0 + \varrho}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wenn man noch:

$$h' = \frac{4c}{\gamma\, tang \frac{90^0 + \varrho}{2}} = \frac{4c}{\gamma} tang \frac{90^0 - \varrho}{2} = h_0\, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad (9)$$

setzt.

Durch die Cohäsion der Erdmasse wird nicht nur die Größe, sondern auch der Angriffspunkt der Kraft oder deren Moment verändert. Der Erddruck

$$P = \frac{\gamma h}{2} (h - h_0)\, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}$$

besteht aus zwei Theilen, nämlich aus:

$$P_1 = \frac{\gamma h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

dessen Angriffspunkt, wie oben mehrfach gezeigt, um die senkrechte Höhe $^2/_3\, h$ unter der Oberfläche der Erdmasse liegt, und aus:

$$P_2 = - \frac{\gamma h h_0}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

dessen Angriffspunkt, entsprechend der in der Mitte F von AE angreifend zu denkenden Cohäsionskraft um $\frac{h}{2}$ unter der oberen Mauerkante B gelegen ist. Man hat folglich das Moment des ganzen Erddruckes in Bezug auf den Mauerfuß A durch

$$P.AM = \frac{h}{3}\,\frac{\gamma h^2}{2}\,tang^2\,\frac{90^0-\varrho}{2} - \frac{h}{2}\,\frac{\gamma h h_0}{2}\,tang^2\,\frac{90^0-\varrho}{2}$$

$$= \frac{\gamma h^2}{2}\,tang^2\,\frac{90^0-\varrho}{2}\left(\frac{h}{3}-\frac{h_0}{2}\right).$$

Dividirt man diese Gleichung durch den Werth von P in (7), so folgt für den Abstand des Erddruckes von A:

$$AM = a = \frac{h\left(\frac{h}{3}-\frac{h_0}{2}\right)}{h-h_0} = \frac{2h-3h_0}{h-h_0}\,\frac{h}{6} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder annähernd, wenn h_0 klein gegen h ist,

$$a \sim \left(1-\frac{3}{2}\,\frac{h_0}{h}\right)\frac{h}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,a)$$

Durch die Cohäsion der Erdmasse wird also der active Erddruck verringert und der Angriffspunkt desselben tiefer gerückt. Für den Erdwiderstand erhält man den Abstand a' des Angriffspunktes vom Fußpunkte der Mauer, ebenso, wenn man die Zeichen von ϱ und c umkehrt, und wieder

$$h' = \frac{4c}{\gamma\,tang\,\frac{90^0+\varrho}{2}}$$

setzt. Dadurch wird

$$P'a' = \frac{\gamma h^2}{2}\,tang^2\,\frac{90^0+\varrho}{2}\left(\frac{h}{3}+\frac{h'}{2}\right)$$

und

$$a' = \frac{2h+3h'}{h+h'}\,\frac{h}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

oder annähernd:

$$a' \sim \left(1+\frac{3}{2}\,\frac{h'}{h}\right)\frac{h}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

Durch die Cohäsion wird also der passive Erddruck vergrößert und sein Angriffspunkt höher gerückt.

Beispiel. Man soll für eine Höhe von 5 m die Größe und den Angriffspunkt des Druckes einer Erdmasse bestimmen, deren Reibungswinkel 40°, und deren specifisches Gewicht $\gamma = 2000$ kg beträgt, und welche sich, ohne nachzustürzen, 1,2 m hoch senkrecht abstechen läßt.

Ohne Rücksicht auf Cohäsion ist der active Erddruck für die Mauerfläche von 1 m Breite:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2}\,tang^2\,\frac{90^0-\varrho}{2} = \frac{5\,.\,5\,.\,2000}{2}\,tang^2\,25^0 = 5435\ \text{kg},$$

und der passive Erddruck:

$$P_1 = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2000}{2} \, tang^2 \, 65^0 = 114\,972 \text{ kg},$$

dagegen erhält man mit Rücksicht auf Cohäsion den activen Erddruck, da $h_0 = 1{,}2$ m ist:

$$P = \frac{\gamma h}{2} (h - h_0) \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} = \frac{5 \cdot 2000}{2} (5 - 1{,}2) \, tang^2 \, 25 = 4130 \text{ kg}.$$

Der passive Erddruck folgt, da $h' = h_0 \, tang^2 \, 25^0 = 0{,}260$ m ist, zu

$$P_1 = \frac{\gamma h}{2} (h + h') \, tang^2 \, 65^0 = \frac{5 \cdot 2000}{2} \, 5{,}26 \cdot 4{,}599 = 120\,950 \text{ kg}.$$

Wenn man von der Cohäsion absieht, kann man den Angriffspunkt des activen wie des passiven Erddruckes um $\frac{h}{3} = 1{,}667$ m über dem Fuße der Mauer wirkend annehmen. Mit Berücksichtigung der Cohäsion jedoch erhält man für diese Höhe bezw.:

$$a = \frac{2h - 3h_0}{h - h_0} \frac{h}{6} = \frac{10 - 3{,}6}{5 - 1{,}2} \frac{5}{6} = 1{,}403 \text{ m}$$

für den activen Erddruck, und

$$a_1 = \frac{2h + 3h'}{h + h'} \frac{h}{6} = \frac{10 + 3 \cdot 0{,}260}{5{,}260} \frac{5}{6} = 1{,}707 \text{ m}$$

für den passiven Erddruck.

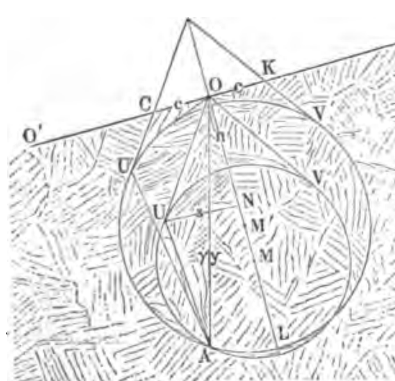
Die Cohäsionskraft der Erde pro 1 qm Trennungsfläche berechnet sich im vorliegenden Falle zu

$$c = \frac{2000 \cdot 1{,}2}{4} \, tang \, 25^0 = 280 \text{ kg}.$$

Wenn man sich zur Bestimmung des Erddruckes des graphischen Verfahrens bedient, so kann man nach Mohr die Cohäsion der Erdmasse in folgender Art berücksichtigen. Nach §. 4 hat man, um die Druckspannungen p für irgend einen Punkt A, dessen Tiefe oder normaler Abstand von der Oberfläche gleich y ist, auf der Verticalen OA, Fig. 24, nach einem gewissen Kräftemaßstabe $OA = \gamma y$ zu machen, durch O die Gerade OO' parallel zur Oberfläche und OL senkrecht zu OO' zu ziehen. Trägt man dann den Winkel

$$\varrho = UOL = VOL$$

Fig. 24.



an, so erhält man in dem durch A gehenden, die beiden Geraden OU und OV berührenden Kreise M die Darstellung des unteren Grenzzustandes für eine cohäsionslose Erdmasse. Die größte Abweichung ϱ des Druckes von der Normalen findet hiernach in der Ebene AU statt, in welcher die Spannung durch $p = OU$ ausgedrückt ist, während die normale Componente nach dem Früheren durch $ON = n$ und die tangentiale Componente durch $UN = s$ dargestellt ist.

Während nun für cohäsionslose Massen die Bedingungsgleichung für den Grenzzustand

$$max \frac{s}{n} = tang\ \varrho = \varphi$$

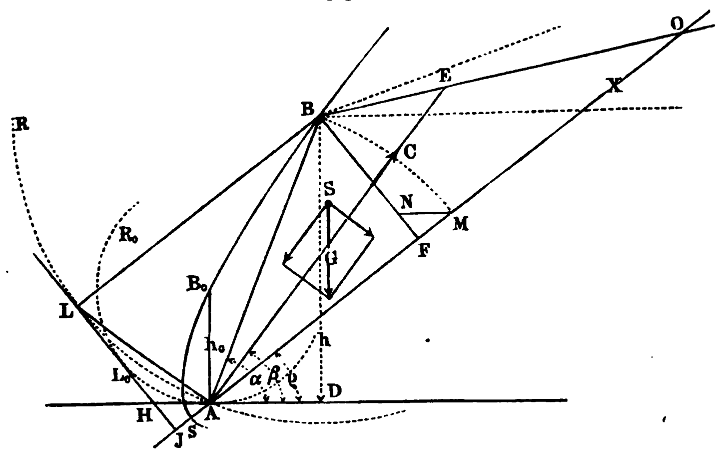
gilt, ist diese Bedingung in dem Falle, in welchem durch die Cohäsion von der Schubspannung s direct ein gewisser Theil bis zum Betrage c neutralisirt wird, durch

$$max \frac{s - c}{n} = tang\ \varrho = \varphi$$

gegeben. Demzufolge ergiebt sich die Construction dahin, daß man $OC = OK = c$ zu machen und durch C und K die Geraden CU' parallel mit OU und KV' parallel mit OV zu ziehen hat, um in dem durch A gehenden Kreise M', welcher CU' und KV' berührt, die graphische Darstellung für die Spannungen der einzelnen Flächen in dem Punkte A zu erhalten. Für die Ebene AU' ist dann die Spannung durch $OU' = OC + CU'$ ausgedrückt, von welcher die Componente $OC = c$ durch die Cohäsionskraft direct neutralisirt wird, während die Componente CU' von der Fläche wegen deren Reibungsfähigkeit noch aufgenommen werden kann.

Böschung cohärenter Erdmassen. §. 10. Während eine cohäsionslose, durch eine Futtermauer nicht gestützte Masse nach dem Vorstehenden nur bei einem Abhange im Gleichgewichte sein kann, welcher den natürlichen Böschungswinkel ϱ nicht übersteigt, können mit Cohäsion begabte Massen auch bei steileren Böschungen im Gleichgewichte sein, ohne einer Stützung

Fig. 25.



gegen Abgleiten zu bedürfen. Schon im Vorstehenden wurde gefunden, daß eine Erdmasse vom Cohäsionsmodul c auf eine Höhe

$$h_0 = \frac{4c}{\gamma} tang \frac{90^0 + \varrho}{2}$$

vertical abgestochen werden kann, indem für diesen Fall der active Erddruck gleich Null ausfällt.

Wenn die Höhe der Erdmasse größer ist, als dieser Werth h_0, so kann sich die Masse ohne Stützung nur halten, wenn sie unter einer bestimmten Böschung ansteigt, deren Betrag sich folgendermaßen bestimmen läßt. Es sei AB, Fig. 25 (a. v. S.), die vordere gegen den Horizont unter dem Winkel α ansteigende ebene Fläche einer cohärenten Erdmasse, welche von dem Punkte B in der Höhe $DB = h$ über dem Fuße aus durch eine ebene unter dem Winkel ω gegen den Horizont geneigte Oberfläche begrenzt ist, wobei ω den natürlichen Böschungswinkel ϱ nicht überschreiten soll, sonst aber ganz beliebig sein kann. Damit diese Masse im Gleichgewichte verharre, muß irgend ein keilförmiges Prisma ABE vom Gewichte G an dem Abgleiten auf der Ebene AE von der Länge l durch die Reibung daselbst und die Cohäsion $C = lc$ verhindert werden. Man hat daher, unter $\beta = EAD$ die Neigung dieser Gleitfläche verstanden, die Bedingung:

$$G \sin\beta = \varphi\, G \cos\beta + l c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Für das Gewicht G kann man setzen:

$$G = \gamma \frac{AB . AE}{2} \sin(\alpha - \beta) = \frac{\gamma}{2} \frac{h}{\sin\alpha} l \sin(\alpha - \beta),$$

und daher erhält man mit diesem Werthe aus (1)

$$\frac{\gamma}{2} \frac{h}{\sin\alpha} l \sin(\alpha - \beta)(\sin\beta - \varphi \cos\beta) = l c$$

oder

$$c = \gamma \frac{h}{2} \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varrho)}{\sin\alpha \cos\varrho} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Diese Gleichung muß bestehen, wie groß man auch die Neigung β der Gleitfläche annehmen möge, also muß für ein bestimmtes h und α der Cohäsionsmodul c mindestens einen Werth gleich dem Maximum haben, welches der Gleichung (2) zukommt. Dieser größte Werth von c ergiebt sich aus:

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = \sin(\alpha - \beta) \cos(\beta - \varrho) - \cos(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varrho) = 0;$$

d. h. für $\sin(\alpha + \varrho - 2\beta) = 0$, woraus für das Prisma, welches die größte Tendenz zum Abgleiten hat,

$$\beta = \frac{\alpha + \varrho}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

folgt, und zwar erhält man mit diesem Werthe von β aus (2) den Cohäsionsmodul:

$$c = \gamma \frac{h}{2} \frac{\sin^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}}{\sin \alpha \cos \varrho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Die Gleitfläche AE halbirt also auch hier den Winkel BAO, welchen die vordere Ebene AB mit der natürlichen Böschung AO bildet, indem sie mit jeder dieser beiden Ebenen den Winkel

$$BAE = OAE = \frac{\alpha - \varrho}{2}$$

einschließt. Die durch (4) bestimmte Größe c muß der Cohäsionsmodul der Masse haben, wenn die Vorderfläche derselben bei einer Neigung α gegen den Horizont die Höhe h erhalten soll, oder aber, die Höhe h darf bei gegebenen Werthen von c und α die Größe

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\sin \alpha \; \cos \varrho}{\sin^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

nicht übersteigen.

Mit $\alpha = 90^0$ erhält man wieder den schon oben gefundenen Werth:

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \varrho}{\sin^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}} = \frac{4c}{\gamma} \tang \frac{90^0 + \varrho}{2} = h_0,$$

während man mit $\alpha = \varrho$, $h = \infty$ erhält. Da die Länge $l = AE$ der Trennungsebene aus der Rechnung herausgefallen ist, so folgt, daß das Resultat von dieser Länge, d. h. also von der Neigung ω der Oberfläche ganz unabhängig ist, so lange nur ω nicht größer als ϱ ist, und so lange die obere ebene Begrenzung BO der Erdmasse sich hinreichend weit erstreckt, um den Punkt E zu enthalten, in welchem die Gleitlinie AE zu Tage tritt (s. weiter unten). Mit dem Werthe

$$h_0 = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \varrho}{\sin^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}}$$

und (5) erhält man auch:

$$\frac{h}{h_0} = \sin \alpha \frac{\sin^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Hieraus oder aus (5) kann man jederzeit für einen gegebenen Neigungswinkel α die Höhe h oder umgekehrt berechnen, je nachdem h_0 oder c für die Erdmasse bekannt sind.

Hierzu dient folgende

Tabelle der Werthe von

$$\frac{h}{h_0} = \sin\alpha \frac{\sin^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha - \varrho}{2}}.$$

$\alpha =$	80^0	70^0	60^0	50^0	45^0	40^0	35^0	30^0
$\varrho = 45^0$	1,595	2,938	7,444	58,96	∞			
$\varrho = 40^0$	1,504	2,511	5,130	18,01	66,38	∞		
$\varrho = 35^0$	1,434	2,216	3,942	9,587	19,85	72,03	∞	
$\varrho = 30^0$	1,379	2,008	3,232	8,351	10,38	21,16	75,37	∞

Denkt man sich die Höhe h für jeden beliebigen Werth von α aufgetragen, so erhält man als den geometrischen Ort für den oberen Endpunkt B der Böschung eine Parabel, deren Brennpunkt im Fußpunkte A liegt, und deren Axe unter dem natürlichen Böschungswinkel ϱ gegen den Horizont geneigt ist. Um dies zu erkennen, sei der Fußpunkt A als Anfangspunkt rechtwinkeliger Coordinaten gewählt, und die Axe AX unter dem Winkel $\varrho = DAX$ gegen den Horizont angenommen. Dann ist:

$$AB = \frac{h}{\sin\alpha} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sin(\alpha - \varrho) = \frac{BF}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$\cos(\alpha - \varrho) = \frac{AF}{AB} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Schreibt man nun die Gleichung (5)*

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos\varrho}{\sin\frac{\alpha-\varrho}{2}\cos\frac{\alpha-\varrho}{2}\,tang\frac{\alpha-\varrho}{2}}$$

$$= \frac{4c}{\gamma}\frac{\cos\varrho}{\sin(\alpha-\varrho)}\frac{\sin(\alpha-\varrho)}{1-\cos(\alpha-\varrho)} = \frac{4c}{\gamma}\frac{\cos\varrho}{1-\cos(\alpha-\varrho)},$$

so erhält man mit obigen Werthen:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4c}{\gamma}\cos\varrho \frac{1}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{4c}{\gamma}\cos\varrho\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-x},$$

oder

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + \frac{4c}{\gamma}\cos\varrho;$$

woraus

$$y^2 = 2\frac{4c}{\gamma}\cos\varrho\left(x + \frac{2c}{\gamma}\cos\varrho\right) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Gleichung gilt offenbar für eine Parabel, deren Brennpunkt in A gelegen, und deren Scheitel um $AS = \frac{2c}{\gamma} \cos \varrho$ von A in der Richtung der natürlichen Böschung entfernt ist. Da die Tangente der Parabel den Winkel zwischen der Axe und dem an ihren Berührungspunkt gezogenen Brennstrahl halbirt, so folgt ferner nach dem Vorstehenden, daß die einer Begrenzung AB des Terrains entsprechende Gleitfläche AE mit der Tangente der Parabel in B parallel ist.

Aus den bekannten Eigenschaften der Parabel ergiebt sich nun leicht, wie man in jedem Falle die zu einem gegebenen Neigungswinkel α der Böschung gehörige Höhe h derselben construiren kann. Zu dem Ende macht man $AH = \frac{4c}{\gamma}$ und zieht HJ senkrecht zur natürlichen Böschung AF, um in $AJ = \frac{4c}{\gamma} \cos \varrho$ den Parameter und in JH die Directrix der betreffenden Parabel zu finden. Für irgend einen Böschungswinkel $DAB = \alpha$ hat man demnach nur den Winkel BAJ durch AL zu halbiren und von dem Durchschnittspunkte L der Halbirungslinie mit der Directrix eine Parallele LB zur natürlichen Böschung zu ziehen, um in dem Durchschnitte B den Endpunkt der Böschung zu erhalten, da dieser auf der gedachten Parabel liegt, weil das Dreieck ALB wegen der Gleichheit der Winkel bei A und L gleichschenkelig ist.

Ebenso findet man für eine gegebene Höhe h den Böschungswinkel α, wenn man in der Höhe h über AD eine Horizontale zieht, und deren Durchschnittspunkt B mit der Parabel durch eine Gerade BA mit dem Brennpunkte der Parabel verbindet.

Wenn von der Erdmasse nur der natürliche Böschungswinkel ϱ gegeben, der Cohäsionscoefficient c aber noch unbekannt ist, so kann man den letzteren leicht finden, sobald man durch Beobachtung festgestellt hat, bis zu welcher Höhe $h = BD$ sich die Erdmasse bei einem beliebigen Böschungswinkel $BAD = \alpha$ noch abgraben läßt, ohne einzustürzen. Zu dem Ende hat man nur mit dem Halbmesser BA um B den Kreis R zu beschreiben und an denselben die zur natürlichen Böschung AO senkrechte Tangente LJ zu ziehen, um darin die Directrix der betreffenden Parabel und in AJ den Werth $\frac{4c}{\gamma} \cos \varrho$ zu erhalten. Zu demselben Werthe gelangt man auch, wenn man nach Culmann $AM = AB$ auf der Linie der natürlichen Böschung AO anträgt, und BF senkrecht zu AO zieht. Dann ist:

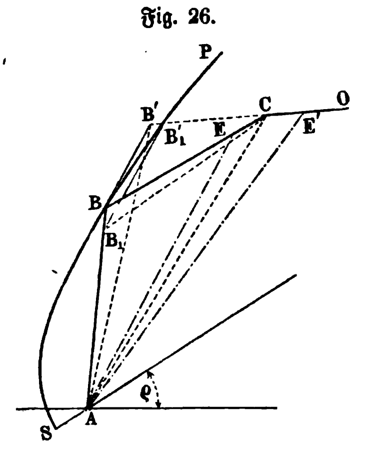
$$MN = AH = \frac{4c}{\gamma},$$

wenn MN horizontal gezogen wird.

Wenn endlich für eine gewisse Erdart weder ϱ noch c bekannt ist, so genügt es zu deren Bestimmung, für zwei verschiedene Böschungswinkel α die Höhen h zu beobachten, bis zu welchen dabei die Erde sich noch abstechen läßt. Wäre z. B. für $\alpha = 90^0$ die Höhe $h_0 = AB_0$, und für $\alpha = BAD$ die Höhe $h = BD$ beobachtet, so erhält man die Directrix der entsprechenden Parabel in der Tangente LL_0, welche gleichzeitig die beiden Kreise R und R_0 berührt, welche um B und B_0 bezw. mit den Halbmessern BA und B_0A beschrieben werden. Die zu dieser gemeinschaftlichen Tangente durch A geführte Normale AJ liefert dann in $JAH = \varrho$ den natürlichen Böschungswinkel der Erdart, und in $\frac{1}{4}\,AH \,.\, \gamma$ deren Cohäsionsmodul c u. s. f.

Die vorstehende Untersuchung beruht auf der Voraussetzung, daß die Erdmasse von dem oberen Punkte B der vorderen Böschung durch eine Ebene BO von solcher Ausdehnung begrenzt ist, daß die Gleitfläche AE in dieser Ebene bei E zu Tage tritt. Für diesen Fall bleiben die gefundenen Resultate unverändert dieselben, wie man auch die Neigung ω dieser Ebene BO gegen den Horizont annehmen möge, vorausgesetzt nur, daß diese Neigung nicht größer ist, als der natürliche Böschungswinkel. Wollte man dagegen ω größer als ϱ annehmen, so ist es klar, daß diese Ebene BO' die betreffende Parabel außer in B noch in einem zweiten Punkte treffen müßte, welcher in der Figur nicht angegeben ist und etwa durch B' bezeichnet sein mag, und dessen verticale Höhe über der Horizontalen AD durch h' ausgedrückt werde. In diesem Falle würde, unter G den Durchgang der Gleitebene durch jene Ebene BO' verstanden, das auf der Gleitfläche gelegene dreiseitige Prisma den Querschnitt ABG haben, welcher um das Dreieck ABB' größer wäre als der Querschnitt $AB'G$ desjenigen Prismas, welches der gefundenen Beziehung gemäß im Grenzzustande gerade nur noch von der Gleitebene getragen werden könnte. Hieraus ergiebt sich mit Nothwendigkeit, daß ω nicht größer als ϱ werden darf.

Fig. 26.



Einer besonderen Untersuchung bedarf der meistens vorkommende Fall, in welchem die obere Begrenzung der Erdmasse hinter dem Punkte B der vorderen Böschung nicht durch eine Ebene von großer Ausdehnung, sondern durch mehrere Ebenen BC, CO, Fig. 26, gebildet wird, das Profil also durch die gebrochene Linie $ABCO$ dargestellt ist. Hier wird immer erst festzustellen sein, in welcher der be-

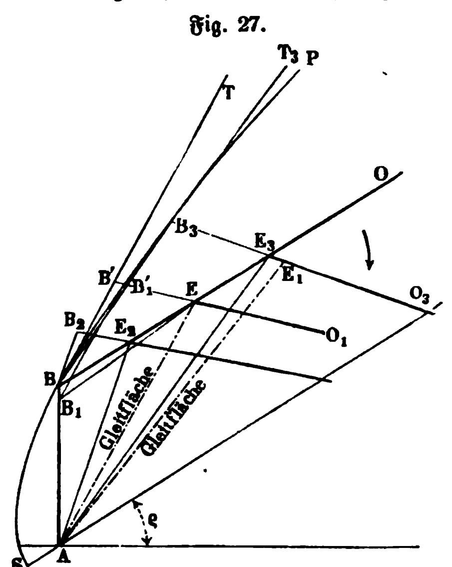
grenzenden Ebenen BC oder CO die Gleitfläche AE zu Tage tritt, d. h. ob bei einem eintretenden Einsturze ein dreiseitiges Erdprisma ABE in AE, oder ein vierseitiges Prisma $ABCE'$ in AE' von der übrigen Masse sich löst. Zu dieser Untersuchung hat man nur nöthig, das Dreieck ABC in ein flächengleiches $AB'C$ zu verwandeln, welches auf derselben Basis AC steht, und von welchem die Seite CB' in die erweiterte Ebene CO hineinfällt. Zieht man daher durch B eine Parallele zu AC, so erhält man in B' die Spitze dieses Dreiecks, und man hat nun die Untersuchung nach dem Vorstehenden so zu führen, als ob man es mit einer Erdmasse von der Begrenzung $AB'O$ zu thun hätte. Die vorstehend erwähnte, der Erdart zugehörige Parabel SP giebt auch hier ein schnelles Urtheil darüber, an welcher Stelle die Gefahr eines Einsturzes die größere sein wird. Wäre z. B., wie in der Figur, die vordere Begrenzung AB so gewählt, daß der Punkt B in der Parabel liegt und B' außerhalb derselben fällt, so würde ein Abgleiten eines vierseitigen Prismas etwa $ABCE'$ stattfinden müssen, und man hätte, um dasselbe zu vermeiden, das Profil so zu reduciren, daß der Punkt B' aus der Parabel nicht heraustritt, sondern höchstens nach B_1' fällt. Man hat daher, wenn der Punkt C und die Neigung der vorderen Fläche AB festgehalten werden sollen, durch B_1' eine Parallele $B_1'B_1$ zu CA zu ziehen, und die Begrenzung der Erdmasse nach AB_1CO vorzunehmen. Dadurch rückt der Punkt B nach B_1 in das Innere der Parabel, was darauf hindeutet, daß der vordere Theil AB_1C der Erdmasse einen gewissen Ueberschuß an Stabilität besitzt, wenn der Erdkörper AB_1CO an der Grenze des Gleichgewichtes sich befindet, für welche die geringste Verkleinerung der Reibung oder Cohäsion das Abrutschen eines vierseitigen Erdprismas in einer Gleitebene AE' bewirken müßte, welche parallel mit der Tangente der Parabel in B_1' ist. Wenn dagegen bei der Verwandlung des Dreiecks ABC in $AB'C$ der Punkt B' innerhalb der Parabel fiele, so würde die Gefahr in dem Abgleiten eines dreiseitigen Prismas ABE entlang einer Gleitfläche AE zu erkennen sein, welche der Parabeltangente in B parallel wäre.

Wenn endlich der Punkt B' gleichzeitig mit B in die Parabellinie fallen sollte, so wäre die Wahrscheinlichkeit gleich groß, daß ein dreiseitiges Prisma ABE parallel der Tangente in B, oder ein vierseitiges Prisma $ABCE'$ parallel der Tangente in B' zum Abgleiten käme, sobald eine Verringerung der Cohäsion oder Reibung stattfinden würde.

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse sei in Fig. 27 (a. f. S.) SP die der Erdmasse entsprechende Parabel und $AB = h_0$ die zugehörige verticale Höhe, auf welche sich diese Erdmasse abstechen läßt, wenn ihre Oberfläche durch eine Ebene BO von unbeschränkter Ausdehnung begrenzt ist. Die voraussichtliche Gleitfläche ist dann durch AE parallel der Parabel-

tangente BT festgelegt. Man denke sich nunmehr die Ebene EO um die zur Bildebene in E senkrechte Gerade, wie um eine Axe im Sinne des Pfeiles herumgedreht, wobei die Begrenzung von B bis E aber ihre Lage beibehalten soll, so gelangt man offenbar zu dem vorstehend betrachteten Falle eines gebrochenen Profils. Nimmt man jetzt die oben angegebene Dreiecksverwandlung vor, so wird die Spitze B' des verwandelten Dreiecks, da AE parallel der Tangente BT ist, immer auf dieser Tangente BT, also außerhalb der Parabel verbleiben, wie weit man auch die Ebene EO um E gedreht hat. Die Böschung, welche für die Ebene BEO im Grenzzustande des Gleichgewichtes sich befand, wird daher aufhören, stabil zu sein, sobald die Ebene EO sich um den geringsten Betrag dreht, oder mit anderen Worten, die Böschung stürzt beim ersten Spatenstiche, welcher bei E gemacht wird, zusammen. Wollte man z. B. für die Lage der oberen Begrenzung EO_1 die Böschung stabil erhalten, so hätte man durch den Schnittpunkt B_1' mit der Parabel die zu AE parallele Gerade $B_1'B_1$ zu ziehen, um in AB_1EO_1 das erforderliche Profil zu erlangen. Es leuchtet ohne Weiteres ein, daß eine Verminderung der Stabilität und zwar in noch höherem Maße eintreten muß, wenn man als Drehaxe für die obere Begrenzungsebene einen Punkt wie E_2 wählt, welcher tiefer gelegen ist als E, da dann die Spitze B_2 des Verwandlungsdreiecks auf einer Geraden BB_2 liegt, welche mit AE_2 parallel ist, also von der Parabel noch weiter nach außen sich entfernt, als die Tangente BT.

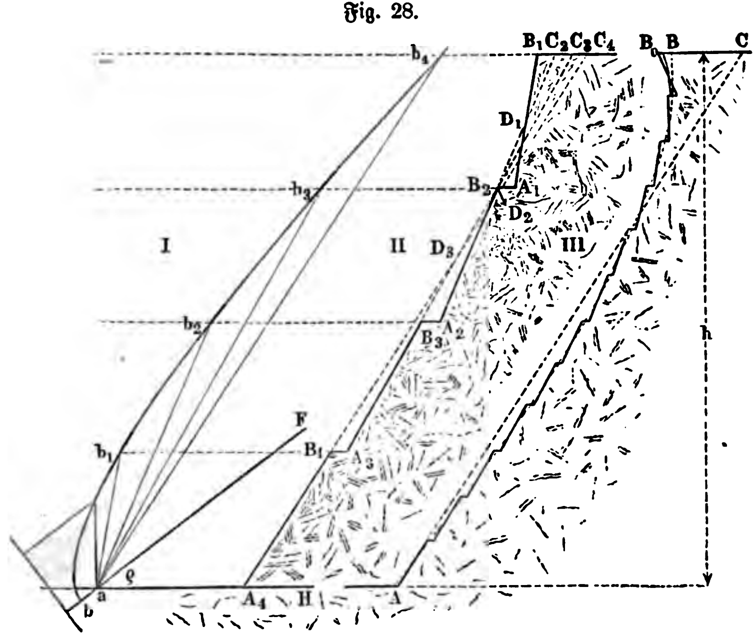
Fig. 27.



Denkt man andererseits den Drehpunkt für die Begrenzungsebene von E nach oben hin, etwa nach E_3 versetzt, so erhält man als geometrischen Ort für die Spitze des Verwandlungsdreiecks die Gerade BB_3 parallel mit AE_3, welche, da sie flacher ist als die Tangente in B, offenbar die Parabel außer in B noch in einem zweiten Punkte B_3 schneidet. Denkt man sich die obere Begrenzungsebene aus der Lage E_3O bis in die Lage E_3O_3 gedreht, welche durch den besagten Schnittpunkt B_3 geht, so wandert dabei die Spitze des

Verwandlungsdreiecks auf der Geraden BB_3 von B bis B_3, verbleibt also fortwährend innerhalb der Parabel. Daher wird während der betrachteten Drehung der Ebene von $E_3 O$ nach $E_3 O_3$ die Stabilität der Böschung nicht gefährdet, und in der Lage $E_3 O_3$ tritt der oben erwähnte Fall ein, daß gleiche Gefahr vorhanden ist für ein Abgleiten des dreiseitigen Prismas ABE auf der Gleitfläche AE parallel der Tangente BT in B, und des vierseitigen Prismas ABE_3E_1 auf der Gleitfläche AE_1 parallel der Tangente B_3T_3 in B_3. Bei einer weiteren Drehung der Ebene $E_3 O$ über O_3 hinaus tritt die Spitze des Verwandlungsdreiecks wieder aus der Parabel hinaus, so daß die Stabilität der Böschung dadurch ebenfalls gefährdet wird, und in der schon angegebenen Weise durch eine Verminderung der Höhe AB einem Einstürzen vorgebeugt werden muß.

Fig. 28.



Die mehrerwähnte Parabel kann auch dazu dienen, für gebrochene oder gekrümmte Böschungsprofile, wie man sie in Einschnitten häufig anwendet, die Verhältnisse zu ermitteln. Denkt man sich nämlich die Aufgabe gestellt, daß ein Einschnitt von der Höhe AB, Fig. 25, in einem Boden von bekannter Cohäsion c hergestellt werden soll, so kann man nach den oben angegebenen Gleichungen den dieser Höhe h zugehörigen Böschungswinkel α ermitteln, und danach den geradlinig begrenzten Einschnitt feststellen. Gesetzt dieser Winkel wäre zu HA_4C_4 gefunden, Fig. 28, II, also die

Böschung durch $A_4 C_4$ festgestellt. Man erkennt nun sogleich, daß, während in dem untersten Punkte A_4 die Böschung der Stabilität halber nicht steiler sein darf, doch für jeden darüber liegenden Punkt, wie B_3, B_2 u. s. w., die gefundene Böschung $A_4 C_4$ unnöthigerweise flach ist, und daß die Begrenzung der Erdmasse an irgend welcher Stelle um so steiler gemacht werden darf, je höher diese Stelle gelegen, d. h. je geringer die darüber befindliche Erdmasse ist. Dächte man sich ein Profil von solcher Art, daß an jeder Stelle gerade derjenige Böschungswinkel vorhanden ist, welcher bei der betreffenden Höhenlage aus Stabilitätsrücksichten noch möglich ist, so würde offenbar in allen Theilen die Cohäsion der Erdmasse in gleichem Maße in Anspruch genommen, in ähnlicher Art etwa, wie es bei den Körpern gleichen Widerstandes auch der Fall ist. Um ein solches Profil wenigstens annähernd zu zeichnen, sei in Fig. 28, I zur Axe aF, welche mit dem Horizonte den Winkel ϱ bildet, in oben angegebener Art die Parabel $b b_1 b_2 \ldots$ entworfen, deren Entfernung zwischen dem Brennpunkte a und dem Scheitel b zu $\frac{2c}{\gamma} \cos \varrho$ anzunehmen ist. Theilt man nun die ganze Höhe h des Einschnittes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (in der Figur vier), und legt durch die Theilpunkte die Horizontalen $B_4 b_1$, $B_3 b_2 \ldots$, so erhält man, wie leicht ersichtlich ist, in den von unten nach oben folgenden Brennstrahlen $a b_1$, $a b_2$, $a b_3 \ldots$ der Parabel die Neigungen für die Böschungen, welche den von oben nach unten folgenden Sectionen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3 \ldots$ zugehören. Zeichnet man daher zunächst $B_1 A_1$ parallel $a b_1$, so erhält man die Begrenzung des Profils für die oberste Section, bei welcher in dem tiefsten Punkte A_1 noch Stabilität vorhanden ist. Die Begrenzung $B_2 A_2$ der zweiten Section ist ebenso parallel mit $b_2 a$ vorzunehmen, doch darf diese Begrenzung nicht an A_1 angeschlossen, sondern sie muß so angeordnet werden, daß die Verlängerung von $A_2 B_2$ das Terrain in einem Punkte C_2 trifft, derartig, daß die beiden Dreiecke $B_1 D_1 C_2$ und $B_2 A_1 D_1$ einander flächengleich sind. In diesem Falle wird nämlich die Böschung $B_2 A_2$ in Wirklichkeit durch die Erdmasse $B_1 A_1 B_2 A_2$ genau so stark belastet, als wenn die Masse durch die Ebene $A_2 C_2$ begrenzt wäre, d. h. also so, wie es die Neigung $B_2 A_2$ verträgt. Es ist aus der Figur ersichtlich, daß in dem Falle, wo die Begrenzung des Banketts $A_1 B_2$ parallel zu der Terrainfläche $B B_1$ genommen wird, die beiden gedachten Dreiecke $B_1 C_2 D_1$ und $A_1 B_2 D_1$ gleich groß werden, sobald der Durchschnittspunkt D_1 in die Mitte von $A_1 B_1$ fällt. In ganz derselben Weise schließt man nun weiter, daß die Begrenzung $B_3 A_3$ der folgenden Section parallel dem folgenden Brennstrahle $b_3 a$ und so angenommen werden muß, daß die Dreiecke $A_2 B_3 D_2$ und $C_2 C_3 D_2$ gleich groß werden, und ebenso ist $B_4 A_4$ parallel mit $b_4 a$ zu ziehen, so daß das Dreieck $A_3 B_4 D_3$ gleich demjenigen $C_3 C_4 D_3$ wird.

Es ergiebt sich ohne Weiteres, daß die Banketts hierbei um so geringere Breite erlangen, je niedriger man die Höhe der einzelnen Sectionen annimmt, und daß bei hinreichend großer Anzahl von Sectionen das gebrochene Profil sich dem curvenförmigen Profile gleichen Widerstandes nähert. In Fig. III ist dieselbe Construction für 12 Sectionen wiederholt und die Curve eines Profils von gleichem Widerstande punktirt eingezeichnet. Daß diese Curve oben bei B_0 überhängt und sich der Theorie zufolge asymptotisch an die Horizontale anschließen müßte, hat kein praktisches Interesse, man wird vielmehr das Profil in dem oberen Theile bei B vertical begrenzen.

Es ist aus der Figur auch ersichtlich, in welchem Betrage man durch Anwendung eines derartigen gebrochenen oder gekrümmten Profils das Erforderniß des von dem Einschnitte beanspruchten Terrains ermäßigt, indem offenbar $B_1 C_4$ in II oder $B\,C$ in III diejenige Terrainbreite darstellt, welche durch das gebrochene bezw. gekrümmte Profil im Vergleiche mit dem geradlinig begrenzten $A_4 C_4$ erspart wird. Daß die zur Herstellung des Einschnittes zu bewegenden Erdmassen dagegen in beiden Fällen gleich groß sind, geht aus dem Obigen hervor.

Futtermauern. Zur Stützung von Erdmassen, welche steilere Neigungen gegen den Horizont haben, als die natürliche Böschung ist, dienen die Futtermauern, welche bei Dammschüttungen, Einschnitten, Canalbauten u. s. w. vielfach zur Anwendung kommen. Der Erddruck gegen die Futtermauer ist bestrebt, dieselbe zur Seite zu drängen, sei es durch Verschiebung oder Drehung, und es muß daher die Futtermauer in beiden Hinsichten die genügende Widerstandsfähigkeit haben. Hierbei kann die Mauer lediglich vermöge ihres Eigengewichtes widerstehen, durch welches einestheils eine genügende Reibung der Mauer auf ihrem Untergrunde erzeugt wird, um eine Verschiebung zu hindern, und anderentheils ein Kraftmoment rege gemacht wird, welches dem umstürzenden Momente des Erddruckes das Gleichgewicht zu halten vermag. Bestände die Futtermauer aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke von hinreichender Festigkeit, so würde es genügen, die Bedingungen des Gleichgewichtes nur für die Grundfläche der Mauer zu erfüllen, in welcher sie den Boden berührt; wegen der Zusammensetzung der Mauer aus einzelnen Steinen, welche durch den Mörtel meist nur lose verbunden sind, wird man aber auch darauf zu rücksichtigen haben, daß möglicher Weise eine Trennung der Mauer in den einzelnen Fugen durch den Erddruck herbeigeführt werden kann. Denkt man sich durch irgend eine Lagerfuge die Mauer getrennt, und vereinigt alle äußeren Kräfte, welche auf den oberhalb dieser Fuge gelegenen Theil wirken, zu einer Resultirenden R, so ist zum Gleichgewichte erforderlich, daß diese Mittelkraft diesen Fugenschnitt selbst innerhalb der Mauer trifft, und daß sie mit der Normalen

§. 11.

der Schnittebene einen Winkel bildet, welcher kleiner ist als der Reibungswinkel für die Theile des Mauerwerkes auf einander. Wenn die Mittelkraft nämlich die Ebene der Lagerfuge außerhalb der Mauer treffen würde, so müßte ein Umkippen des betreffenden oberen Mauertheiles erfolgen, während eine Abweichung der Mittelkraft von der normalen Richtung um einen größeren als den Reibungswinkel ein Fortschieben des oberen Mauertheiles über den unteren zur Folge haben würde, vorausgesetzt, daß man von der Cohäsion des Mörtels absieht. Es wird zwar in den meisten Fällen der Anwendung der unterste Querschnitt, d. h. die Grundfläche der Mauer am meisten gefährdet sein, auch wird in der Regel das Umkippen früher eintreten, als das Fortschieben, doch können auch Ausnahmen hiervon stattfinden, so daß jedenfalls eine dementsprechende Prüfung nöthig ist.

Hierzu bietet die sogenannte Widerstandslinie oder Mittellinie des Druckes, auch Stützlinie genannt, ein geeignetes Mittel. Man versteht hierunter diejenige Linie, welche man erhält, wenn man für sämmtliche Fugen die Angriffspunkte der auf dieselben wirkenden Kräfte durch eine stetige Linie mit einander verbindet. Es sei etwa ein Mauerkörper $ABCD$, Fig. 29, welcher in E von einer Kraft P angegriffen wird, durch die Fugenschnitte F_1, F_2, F_3 in einzelne Theile zerlegt, deren Gewichte G_1, G_2, G_3 ꝛc. in ihren Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 ... wirksam zu denken sind. Eine Vereinigung der Kraft P mit dem Gewichte G_1 des obersten Steines durch das Parallelogramm der Kräfte $a_1 b_1 c_1 d_1$ liefert in $a_1 c_1$ die Mittelkraft R_1, welche die Fuge F_1 in o_1 trifft. Vereinigt man weiter die Mittelkraft R_1 mit dem Gewichte G_2 des zweiten Steines durch das an den Durchschnitt a_2 beider angetragene Parallelogramm $a_2 b_2 c_2 d_2$, so erhält man in $R_2 = a_2 c_2$ die Mittelkraft aller Kräfte, welche auf den oberhalb der Fuge

Fig. 29.

F_2 gelegenen Mauerkörper wirken, d. h. die Mittelkraft von P und $G_1 + G_2$, und in o_2 den Angriffspunkt dieser Kraft in der Fuge F_2. Führt man diese Construction durch Zusammensetzung der Kraft R_2 mit G_3 fort, so erhält man in o_3 den Angriffspunkt der Mittelkraft R_3 von P, G_1, G_2 und G_3 in der Fuge F_3 u. s. w. Eine Verbindung je zweier auf einander folgender Punkte durch gerade Linien liefert das Polygon $o_0 o_1 o_2 o_3 \ldots$, welches in eine stetige Curve, nämlich die besagte Mittellinie des Druckes übergeht, sobald man die Fugen unendlich nahe an einander liegend voraussetzt. Es ist übrigens klar, daß man nicht nöthig hat, die einzelnen Parallelogramme wirklich zu construiren, denn wenn man aus den einzelnen Kräften $P, G_1, G_2, G_3 \ldots$ das Kräftepolygon $p o g_1 g_2 g_3 \ldots$ zeichnet, so erhält man in $p g_1, p g_2, p g_3 \ldots$ der Größe und Richtung nach die Mittelkräfte $R_1, R_2, R_3 \ldots$, mit denen man bezw. $a_1 c_1, a_2 c_2, a_3 c_3 \ldots$ parallel zu ziehen hat.

Damit also die Mauer in jedem Querschnitte hinreichende Sicherheit gegen Umkippen darbiete, muß diese Widerstandslinie in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Mauerkörpers verbleiben, denn es ist leicht ersichtlich, daß ein Umstürzen des oberen Mauertheiles durch eine Linksdrehung um den Punkt f_2 der Fuge F_2 erfolgen würde, wenn die Stützlinie diese Fuge in einem Punkte o_2' außerhalb der Mauer treffen sollte. Als äußerste mit dem Gleichgewichte noch verträgliche Grenzlage für den Punkt o_2 hätte man daher die Kante f_2 anzusehen, wenn die Mauer aus absolut festem Material bestände, welches einer Zerbröckelung durch den darauf wirkenden Druck nicht unterworfen wäre. Da aber das Baumaterial nur einen gewissen erfahrungsmäßig zu bestimmenden Druck gestattet, ohne zerstört zu werden, so wird die Mittelkraft in keiner Fuge durch die äußerste Kante gehen dürfen, sondern von dieser Kante so weit zurückstehen müssen, daß der Druck sich auf eine genügend große Fläche vertheilt, wie dies im Folgenden noch näher erläutert werden soll. Damit ferner ein Abgleiten in keiner Fuge stattfinde, ist es, wie schon erwähnt, nöthig, daß in irgend welchem Punkte der Mittellinie des Druckes die Richtung der Kraft von der Normalen zur Druckfläche um weniger als den Reibungswinkel abweicht.

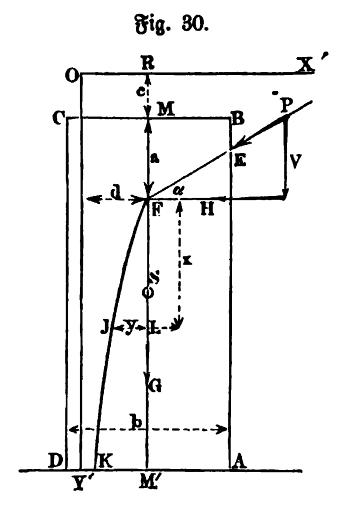
Der für die Sicherheit gegen Verschieben gefundenen Bedingung wird bei der beträchtlichen Größe des Reibungswinkels zwischen Mauerwerk in der Regel leicht genügt werden können, auch hat man in einer entsprechenden Neigung der Lagerfugen gegen den Horizont ein Mittel, um den besagten Abweichungswinkel zwischen der Mittelkraft und der Normalen immer hinreichend klein zu halten.

Es muß hierbei bemerkt werden, daß die Richtung der Mittelkraft in irgend welchem Punkte der Stützlinie $o_0 o_1 o_2 \ldots$ keineswegs mit der Tangente der Stützlinie daselbst zusammenfällt, da z. B. die Richtung der Kraft

in o_1 nicht durch $o_1 o_2$, sondern durch $a_1 c_1$ gegeben ist. Es hüllen vielmehr die Kraftrichtungen $a_1 c_1$, $a_2 c_2$, $a_3 c_3$ . . . eine gewisse andere Curve ein von der Beschaffenheit, daß die Tangente $o a$ an diese Curve von einem beliebigen Punkte o der Stützlinie aus die Druckrichtung in diesem Punkte o der Stützlinie angiebt. Diese Linie $a_1, a_2, a_3 \ldots$, welche etwa einem in den Eckpunkten a durch die Gewichte G belasteten Seilpolygone und bei unendlich kleinen Abständen einer Kettenlinie entspricht, wird gewöhnlich die Drucklinie, von Scheffler auch die Richtungslinie des Druckes genannt.

Die Form der Stütz- oder Widerstandslinie hängt, wie aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres ersichtlich ist, wesentlich von der Art der Beanspruchung der Mauer durch äußere Kräfte, wie auch von der Vertheilung der Gewichte, d. h. von der Profilform der Mauer ab. Nimmt man etwa ein 1 m langes Stück einer verticalen parallelepipedischen Mauer $ABCD$ von der Breite b, Fig. 30, an, und setzt voraus, dasselbe werde in einem Punkte E durch eine unter dem Winkel α gegen den Horizont wirkende Kraft P angegriffen, so sei die Mittellinie des Druckes durch die Curve FJK dargestellt. Für irgend eine horizontale Fuge LJ in der Tiefe $x = FL$ unter dem Durchschnittspunkte F der Kraft P und des Mauergewichtes G sei der Abstand der Stützlinie von der Mittellinie MM' durch $JL = y$ ausgedrückt.

Fig. 30.



Es muß dann für den Punkt J als Momentenmittelpunkt die Gleichung bestehen

$$P \cos\alpha \, . \, x = P \sin\alpha \, . \, y + G \, . \, y \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wenn G das Gewicht des oberhalb JL gelegenen Mauertheiles ML bedeutet. Ist nun γ_1 das specifische Gewicht des Mauerwerks, und wird die Höhe $MF = a$ gesetzt, so hat man

$$G = \gamma_1 b \, (a + x),$$

mit welchem Werthe obige Gleichung übergeht in

$$P \cos\alpha \, . \, x = P \sin\alpha \, . \, y + \gamma_1 b \, (a + x) \, y \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Denkt man noch die horizontale und verticale Componente von P durch Mauermassen von der Breite b und den Höhen d und c ersetzt, indem man

$$P \cos\alpha = H = \gamma_1 b d \text{ und } P \sin\alpha = V = \gamma_1 b c$$

setzt, so erhält man auch

$$\gamma_1 b d . x = \gamma_1 b c . y + \gamma_1 b (a + x) y$$

oder

$$x d = (c + a + x) y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man den Coordinatenanfang für die Ordinaten x' und y' von F nach O verlegt, so daß

$$FR = a + c \text{ und } OR = d$$

gewählt wird, also

$$x' = c + a + x \text{ und } y' = d - y$$

zu setzen ist. Hiermit erhält man aus (3) die Gleichung

$$x' d - (c + a) d = x' (d - y')$$

oder

$$x' y' = d (c + a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welche Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel entspricht, für welche OX' und OY' die Asymptoten sind. Man ersieht hieraus, daß der Abstand der Stützlinie von der Mitte der Mauer stets kleiner als $d = \frac{P \cos\alpha}{b \gamma_1}$ bleibt, wie hoch auch die Mauer sein möge, indem erst für $x' = \infty$, $y = d$ wird. Die Stützlinie wird daher für jede beliebige Höhe noch im Innern der Mauer verbleiben, sobald man die Breite der Mauer aus

$$\frac{b}{2} = d = \frac{P \cos\alpha}{b \gamma_1}$$

zu

$$b = \sqrt{\frac{2 P \cos\alpha}{\gamma_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

annimmt.

Wenn dagegen die Mauer nicht, wie ein Pfeiler, einer isolirten Kraft in einem Punkte, sondern dem über ihre ganze Fläche vertheilten Drucke einer Flüssigkeit oder einer Erdmasse ausgesetzt ist, so ermittelt sich die Stützlinie durch die folgende Betrachtung. Wählt man für die verticale parallelepipedische Mauer $ABCD$, Fig. 31 (a. f. S.), die Mittellinie OM als X Axe und O als Anfangspunkt rechtwinkeliger Coordinaten, so wirkt auf das Mauerstück COL von der Höhe $OL = x$ außer dem Eigengewichte $G = \gamma_1 b x$, der auf die Fläche BF vertheilte Druck der Flüssigkeit oder Erdmasse. Bei einer Flüssigkeit vom specifischen Gewichte γ_0 ist die resultirende Druckkraft bekanntlich durch $P = \gamma_0 \frac{x^2}{2}$ gegeben, welche Kraft in einem Abstande $FE = \frac{x}{3}$ von der Fuge F wirkt. Bei einer Erdmasse ist dieser Druck

außer vom specifischen Gewichte γ noch von der Neigung der Oberfläche und dem Böschungswinkel abhängig. Im Allgemeinen läßt sich nach §. 8 der Erddruck durch $P = \frac{k \gamma x^2}{2}$ ausdrücken, wenn k eine nach Gleichung (9) in §. 8 sich ergebende Größe bedeutet, welche von den dort eingeführten Winkeln α, ω, ϱ und ϱ' abhängig, für einen bestimmten Fall aber für alle Punkte der Erdmasse constant ist. Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt ebenfalls wie der Wasserdruck in der Höhe $FE = \frac{x}{3}$ über der betrachteten Fuge. Sieht man von der schrägen Richtung des Erddruckes gegen die Mauerfläche ab, und setzt den normalen Erddruck $P = \frac{k \gamma}{2} x^2$, so geht für den Punkt J der Stützlinie die Gleichung

$$P \frac{x}{3} = G y$$

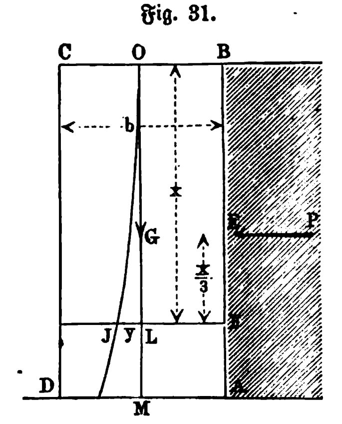
über in

$$\frac{k \gamma}{2} \frac{x^3}{3} = \gamma_1 b x y$$

oder

$$x^2 = 6 \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{b}{k} y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Fig. 31.



welche Gleichung einer Parabel angehört, für deren Scheitel O die Mittellinie OM die Tangente ist. Für Wasser würde $k = 1$ und $\gamma = 1000$ kg ausfallen, während man z. B. für Erde mit dem Reibungswinkel ϱ bei horizontaler Oberfläche ($\omega = 0$) und unter Vernachlässigung der Reibung an der Wandfläche, also für $\varrho_1 = 0$, nach §. 8

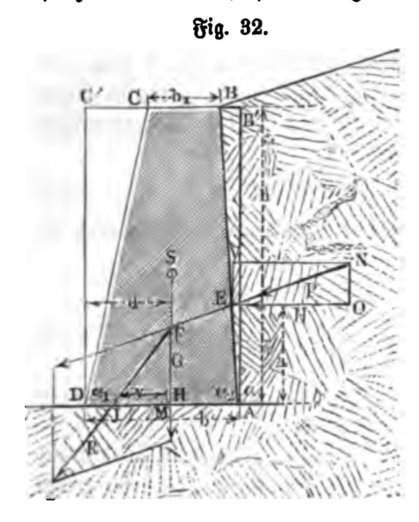
$$k = tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}$$

zu setzen hätte u. s. w.

§. 12. **Kippen der Futtermauern.** Die Stabilität einer Futtermauer gegen Umsturz erfordert nach dem Vorstehenden, daß die Widerstandslinie innerhalb der Mauer und zwar der genügenden Sicherheit halber in gewisser Entfernung von der äußeren Mauerfläche verbleibe. Man pflegt der Construction daher meistens einen gewissen Sicherheits- oder Stabilitätscoefficienten σ, welcher meist zwischen 2 und 3 liegend angenommen

wird, zu Grunde zu legen, derart, daß das durch den Erddruck erzeugte Umsturzmoment den σ fachen Betrag würde annehmen müssen, bevor die Stützlinie eine horizontale Lagerfuge AD, Fig. 32, in der äußeren Kante D treffen würde. Um dementsprechend die Dimensionen einer Futtermauer zu bestimmen, sei $ABCD$ der verticale Durchschnitt einer Stützmauer von der lothrechten Höhe h und einer Länge gleich 1 m, deren untere Breite $AD = b$ sei. Die vordere Fläche CD sei unter der Neigung

Fig. 32.



$$\nu_1 = cotg\, \alpha_1$$

und die hintere Fläche AB unter derjenigen

$$\nu_2 = cotg\, \alpha_2$$

gegen die Verticale gerichtet. Man hat dann die obere Breite BC

$$b_1 = b - (\nu_1 + \nu_2)\, h,$$

und es ist, unter γ_1 das specifische Gewicht des Mauerwerkes verstanden, das Gewicht G des betrachteten Mauerkörpers durch

$$G = \gamma_1 \frac{b + b_1}{2} h = \gamma_1 \left(b - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) h \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

gegeben. Dieses im Schwerpunkte S des Querschnittes angreifende Gewicht geht nur bei einem symmetrischen Profile, d. h. für $\nu_1 = \nu_2$, durch die Mitte M der Basis, während im Allgemeinen der Schwerpunkt S seitwärts der Mittellinie gelegen ist. Man erhält das Moment $M = Gd$ des Gewichtes in Bezug auf die äußere Kante D, wenn man die Momente der beiden Dreiecke DCC' und ABB' von demjenigen des Rechteckes $AB'C'D$ abzieht, durch

$$M = Gd = \gamma_1 b h \frac{b}{2} - \gamma_1 \frac{\nu_1 h^2}{2} \frac{\nu_1 h}{3} - \gamma_1 \frac{\nu_2 h^2}{2} \left(b - \frac{\nu_2 h}{3}\right)$$

zu

$$M = \gamma_1 b h \frac{b - \nu_2 h}{2} - \gamma_1 h^3 \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{6} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Es möge nun P der nach dem Vorstehenden zu bestimmende, unter dem Winkel δ gegen den Horizont auf die Mauerfläche AB wirkende Erddruck sein, dessen Angriffspunkt E in verticaler Richtung um die Höhe a über

dem Fußpunkte A gelegen ist, so zerlegt man diesen Erddruck in seine horizontale und verticale Componente

$$H = P \cos \delta \text{ und } V = P \sin \delta.$$

Unter der Voraussetzung eines Sicherheitscoefficienten gleich σ muß nun das Moment der Kraft σP, welche in E wirkend gedacht wird, in Bezug auf den Punkt D ein Moment gleich demjenigen M des Mauergewichtes haben. Man hat also für diese Voraussetzung

$$M = \sigma H a - \sigma V (b - \nu_2 a) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich dem in (2) gefundenen, so erhält man für σ den Ausdruck

$$\sigma = \gamma_1 h \frac{b \frac{b - \nu_2 h}{2} - h^2 \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{6}}{H a - V (b - \nu_2 a)} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

mittelst welcher Gleichung man für eine gegebene Futtermauer den zugehörigen Stabilitätscoefficienten σ bestimmen kann.

Wenn es sich umgekehrt darum handelt, für einen bestimmten Stabilitätscoefficienten und bestimmte Neigungsverhältnisse ν_1 und ν_2 die erforderliche untere Breite b zu finden, so schreibe man die Gleichung (4)

$$\frac{\sigma}{\gamma_1 h} H a - \frac{\sigma}{\gamma_1 h} V (b - \nu_2 a) = \frac{b^2}{2} - \frac{b}{2} \nu_2 h - h^2 \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{6},$$

also

$$b^2 + b \left(\frac{2 \sigma V}{\gamma_1 h} - \nu_2 h \right) = \frac{2 \sigma}{\gamma_1 h} (H a + V \nu_2 a) + h^2 \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{3}.$$

Schreibt man diese Gleichung der Kürze wegen $b^2 + b \,.\, 2 m = n$, so erhält man

$$b = - m + \sqrt{n + m^2} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

worin

$$m = \frac{\sigma}{\gamma_1 h} V - \frac{\nu_2 h}{2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und

$$n = \frac{2 \sigma}{\gamma_1 h} (H + V \nu_2) a + h^2 \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{3} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

zu setzen ist.

In diesen Formeln hat man für eine vertical stehende Futtermauer von überall gleicher Stärke, Fig. 33, $\nu_1 = \nu_2 = 0$ und $G = \gamma_1 b h$, sowie $d = \frac{b}{2}$ zu setzen, und erhält damit

$$\sigma = \frac{\gamma_1 h}{2} \frac{b^2}{H a - V b} \quad \ldots \ldots \quad (4^a)$$

und

$$b = -\frac{\sigma}{\gamma_1 h} V + \sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma_1 h} Ha + \left(\frac{\sigma V}{\gamma_1 h}\right)^2} \quad \ldots \quad (5^a)$$

Häufig führt man die Futtermauern nach der Seite der Erdmasse hin überhängend aus, Fig. 34, wobei sie dem Erddrucke besser widerstehen; in diesem Falle hat man, wenn die Mauer überall von gleicher Stärke, also

Fig. 33.

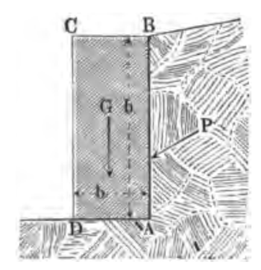
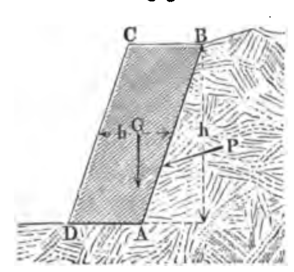


Fig. 34.



mit parallelen Wandflächen von der Neigung $cotg\ \alpha_1 = \nu$ ausgeführt ist, in vorstehenden Formeln $\nu_1 = \nu$ und $\nu_2 = -\nu$ zu setzen und erhält damit

$$\sigma = \frac{\gamma_1 h b}{2} \frac{b + \nu h}{Ha - V(b + \nu a)} \quad \ldots \quad (4^b)$$

und

$$b = -\frac{\sigma V}{\gamma_1 h} - \frac{\nu h}{2} + \sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma_1 h}(Ha - V\nu a) + \left(\frac{\sigma V}{\gamma_1 h} + \frac{\nu h}{2}\right)^2} \quad (5^b)$$

Den Erddruck P hat man nach den in §. 8 angegebenen Regeln zu bestimmen, indem man allgemein

$$P = k\gamma \frac{h^2}{2} =$$

$$\frac{sin(\alpha + \varrho_1)}{sin^2 \alpha} \frac{sin^2(\alpha - \omega)}{sin^2(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \left(1 - \sqrt{\frac{sin(\varrho - \omega) sin(\varrho + \varrho_1)}{sin(\alpha + \varrho_1)(sin\ \alpha - \omega)}}\right)^2 \frac{\gamma h^2}{2} \ldots (6)$$

setzt, unter α, ω, ϱ und ϱ_1 die in §. 8, und Fig. 19 angegebenen Winkel verstanden. Da ferner der Neigungswinkel δ des Erddruckes gegen den Horizont durch $\alpha + \varrho_1 - 90^0$ gegeben ist, so hat man

$$H = P \cos\delta = P \sin(\alpha + \varrho_1)$$

und

$$V = P \sin\delta = P \cos(\alpha + \varrho_1).$$

Auch die Höhe a des Angriffspunktes E des Erddruckes über dem Fuß-

punkte A der Mauer ist nach dem Vorstehenden zu bestimmen; diese Höhe ist bei nicht belasteter Erdmasse gleich $\frac{h}{3}$ zu setzen.

Was das specifische Gewicht γ_1 des Mauerwerkes anbetrifft, so kann man dasselbe etwa zu

$$\gamma_1 = 2{,}2 \text{ für Bruchsteinmauerwerk}$$

und

$$\gamma_1 = 1{,}8 \text{ für Ziegelmauerwerk}$$

annehmen, so daß man das Verhältniß der specifischen Gewichte des Mauerwerkes und der Erde je nach dem Feuchtigkeitsgehalte der letzteren zwischen $^3/_2$ und $^5/_4$ wird annehmen können.

Macht man die einfachste Voraussetzung einer verticalen Wandfläche AB und einer horizontalen Oberfläche des Terrains, setzt also $\alpha = 90^0$ und $\omega = 0$, so erhält man aus (6) den Erddruck zu

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\cos \varrho_1}{\cos^2 (\varrho + \varrho_1)} \left(1 - \sqrt{\frac{\sin \varrho \sin (\varrho + \varrho_1)}{\cos \varrho_1}}\right)^2$$

$$= \gamma \frac{h^2}{2} \left[\frac{\sqrt{\cos \varrho_1} - \sqrt{\sin \varrho \sin (\varrho + \varrho_1)}}{\cos (\varrho + \varrho_1)}\right]^2,$$

oder, wenn man auch die Reibung der Erde an der Wandfläche vernachlässigen will, ($\varrho_1 = 0$):

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2},$$

wie auch schon in §. 8 gezeigt wurde. Setzt man etwa für mittlere Erdart $\tang \varrho = 0{,}8$ entsprechend einem natürlichen Böschungswinkel $\varrho = 38^0 40'$, und nimmt der Sicherheit wegen $\tang \varrho_1$ geringer, etwa gleich 0,5, d. h. $\varrho_1 = 26^0 34'$ an, so erhält man

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \left(\frac{\sqrt{\cos 26^0 34'} - \sqrt{\sin 38^0 40' \sin 65^0 14'}}{\cos 65^0 14'}\right)^2$$

$$= 0{,}210\, \gamma \frac{h^2}{2},$$

womit

$$H = P \cos 26^0 34' = 0{,}188\, \gamma \frac{h^2}{2}$$

und

$$V = P \sin 26^0 34' = 0{,}094\, \gamma \frac{h^2}{2}$$

folgt. Dagegen erhält man bei Vernachlässigung der Reibung an der Wandfläche, d. h. unter Annahme eines zu dieser Fläche senkrechten Erddruckes

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - 38^0 40'}{2} = 0,231 \gamma \frac{h^2}{2}.$$

Es ist hieraus ersichtlich, daß die älteren Theorien, welche von der Reibung der Erde an der Wand absehen, größere Druckkräfte der Rechnung zu Grunde legen und folglich unter gleichen sonstigen Verhältnissen zu größeren Mauerstärken führen, als man unter Berücksichtigung der Wandreibung erhält. Da ferner unter der Annahme $\varrho_1 = 0$ bei verticaler Mauerfläche auch $V = 0$ ausfällt, so vereinfachen sich die vorstehend gefundenen Formeln für diesen Fall, und insbesondere erhält man aus (5), wenn man darin noch $a = \frac{h}{3}$ und $H = P = k \gamma \frac{h^2}{2}$ einführt,

$$b = \sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma_1 h} H a} = \sqrt{\frac{2\sigma}{3\gamma_1} P} = \sqrt{\frac{2\sigma}{3\gamma_1} k \gamma \frac{h^2}{2}} = \psi h,$$

wenn man den außer von dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ noch von dem Sicherheitscoefficienten σ abhängigen Werth $\sqrt{\frac{\sigma}{3} \frac{\gamma}{\gamma_1} k}$ mit ψ bezeichnet. Dieser Coefficient ψ bestimmt sich z. B. in dem vorliegenden Falle, in welchem $k = 0,231$ gefunden wurde, für ein Verhältniß $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{2}{3}$ und für einen Stabilitätscoefficienten $\sigma = \frac{9}{4}$, wie er der von Vauban angegebenen Regel entspricht, zu

$$\psi = \sqrt{\frac{9}{4 . 3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,231} = 0,34,$$

und man hätte demnach den verticalen parallelepipedischen Futtermauern eine Stärke $b = 0,34\ h$ zu geben. In dieser Art hat man sich die Entstehung der in der Praxis vielfach gebräuchlichen Regeln zu denken, nach denen man die Stärke der Futtermauern gleich einem bestimmten Bruchtheile der Höhe h machen soll, welcher den meisten dieser Regeln zufolge nicht wesentlich von $0,3\ h$ abweicht.

Die Ermittelung der Mauerstärken nach den vorstehenden Formeln bleibt dieselbe, auch wenn die Erde überhöht oder künstlich belastet ist, indem in solchen Fällen hierauf nur bei der Ermittelung des Erddruckes Rücksicht genommen werden muß. Wenn dabei die Mauer eine unter einem gewissen Winkel ansteigende Erdmasse zu stützen hat, welche die Mauerkrone BC, Fig. 35 (a. f. S.), ganz oder zum Theil bedeckt, so hat man sich die Mauerfläche AB nach oben fortgesetzt zu denken und das Gewicht des keilförmigen Erdprismas FBB' dem Gewichte der Mauer hinzuzufügen.

Ebenso hat man dann den Erddruck nicht für die Mauerfläche AB, sondern für diejenige AB' zu ermitteln, indem man sich die Durchschnittsfläche BB' als mit der Mauer zusammenhängend vorstellt. Wenn hierbei die Ueberhöhung der Erde nicht bedeutend ist, so wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man das kleine dreieckige Prisma $B'GE$ ebenfalls als mit Erde gefüllt annimmt, bei größerer Ueberhöhung jedoch hat man das Dreieck $AB'E$ in ein anderes ebenso großes AJE zu verwandeln, dessen Seite EJ in die verlängerte Terrainfläche EH hineinfällt. Zu diesem Ende hat man nur durch B' eine mit AE parallele Gerade zu ziehen, welche in ihrem Schnittpunkte J mit der Terrainfläche die Ecke des gesuchten Verwandlungsdreiecks liefert. Hierüber wurde bereits früher gehandelt. Eine analytische Untersuchung dieses Falles würde zu weitläufigen Rechnungen führen, es soll derselbe daher in einem der folgenden Paragraphen graphisch behandelt werden. Poncelet giebt für Fälle, in denen die Ueberhöhung $BG = h_1$ die Höhe $AB = h$ der Mauer nicht übersteigt, für parallelepipedische Futtermauern die Annäherungsformel:

Fig. 35.

$$b = 0{,}86\,(h + h_1)\,tang\,\frac{90^0 - \varrho}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}.$$

Zur Erleichterung der Rechnung ist von demselben eine Tabelle der erforderlichen Stärken von Futtermauern berechnet, von welcher im Folgenden ein Auszug gegeben ist. Diese Stärken sind nicht nur abhängig von den Werthen von ϱ und $\frac{\gamma_1}{\gamma}$, wofür die Grenzen $tang\,\varrho = 0{,}6$ und $1{,}4$, sowie $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1$ und $\frac{5}{3}$ angenommen sind, sondern auch danach verschieden, ob die Krone der Futtermauer in der ganzen Breite BC mit Erde bedeckt ist, oder ob eine Berme oder ein Wallgang von gewisser Breite CF freibleibt. In der Tabelle sind die Werthe für die Voraussetzung einer Berme von der Breite $CF = 0{,}2\,h = 0{,}2\,AB$ angegeben. Die Werthe der $\frac{b}{h}$ der Tabelle

Werthe von $\frac{h_1}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für										
	$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1$; $\varphi = 0{,}6$. Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1$; $\varphi = 1{,}4$. Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1{,}5$; $\varphi = 1$. Berme:			$\frac{\gamma_1}{\gamma} = {}^5/_8$; $\varphi = 0{,}6$. Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma} = {}^5/_8$; $\varphi = 1{,}4$. Berme:	
	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= b$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405	0,707	0,636	0,457	0,384
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416	0,762	0,672	0,537	0,428
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425	0,811	0,705	0,622	0,475
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435	0,852	0,731	0,726	0,531
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445	0,883	0,751	0,862	0,596
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452	0,909	0,771	1,013	0,667
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456	0,922	0,780	1,129	0,712
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458	0,926	0,783	1,174	0,730
∞	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,769

ergeben die passenden Stärken für parallelepipedische Mauern; wenn den Mauern jedoch eine äußere Böschung von $^1/_5$ der Höhe gegeben wird, so gilt die aus der Tabelle entnommene Breite nicht für die Sohle, sondern für den Querschnitt bei $^1/_9$ der Mauerhöhe über der Sohle, auch soll man bei trocken ausgeführten Mauern die Dicke um $^1/_4$ des Werthes der Tabelle vergrößern. Es ist selbstverständlich, daß man für Größen von $\frac{h_1}{h}$, φ und $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ zwischen den der Tabelle zu Grunde gelegten die bezüglichen Werthe durch entsprechende Interpolation finden wird.

Beispiele. 1. Wenn die 5 m hohe Futtermauer, für welche in §. 8 der Erddruck zu 6260 kg bestimmt wurde, entsprechend einem Stabilitätscoefficienten $\sigma = 3$ ausgeführt werden soll, so hat man die untere Mauerstärke b mit Rücksicht darauf zu bestimmen, daß der äußere Anlauf der Mauer $\nu_1 = 0{,}1$ angenommen wird, während der Anlauf auf der der Erdmasse zugekehrten Seite zu $\nu_2 = 0{,}05$ vorausgesetzt war?

Man findet zunächst aus dem Erddrucke $P = 6260$ kg, welcher unter 28^0 gegen den Horizont geneigt ist, die Componenten

$$H = 6260 \cos 28^0 = 5527 \text{ kg, wofür rund } H = 5600$$

angenommen werden soll, und

$$V = 6260 \,.\, \sin 28^0 = 2939, \text{ oder rund } 2900 \text{ kg}.$$

Hiermit ergiebt sich nach (6) und (7), wenn man das Gewicht eines Cubikmeters Mauerwerk zu $\gamma_1 = 2000$ kg annimmt:

$$m = \frac{3}{2000 \,.\, 5}\, 2900 - \frac{0{,}05 \,.\, 5}{2} = 0{,}870 - 0{,}125 = 0{,}745$$

und

$$n = \frac{2 \,.\, 3}{2000 \,.\, 5}\,(5600 + 0{,}05 \,.\, 2900)\, \frac{5}{3} + 25\, \frac{0{,}01 - 0{,}0025}{3}$$
$$= 5{,}745 + 0{,}0625 = 5{,}808,$$

und damit nach (5) die untere Breite

$$b = -0{,}745 + \sqrt{5{,}808 + 0{,}745^2} = 1{,}77 \text{ m, wofür rund } b = 1{,}75 \text{ m}$$

gesetzt werden kann. Die obere Breite bestimmt sich dann zu

$$b_1 = 1{,}75 - 5\,(0{,}1 + 0{,}05) = 1 \text{ m}$$

und die mittlere Stärke zu

$$\frac{1{,}75 + 1}{2} = 1{,}375 \text{ m oder } 0{,}275\, h.$$

Wegen der Abrundung der berechneten Breite $b = 1{,}77$ in $1{,}75$ m ergiebt sich der wirkliche Stabilitätscoefficient etwas geringer als 3, nämlich nach (4) zu

$$\sigma = 2000 \,.\, 5\, \frac{1{,}75\, \frac{1{,}75 - 0{,}25}{2} - 25\, \frac{0{,}01 - 0{,}0025}{6}}{5600\, \frac{5}{3} - 2900\left(1{,}75 - 0{,}05\, \frac{5}{3}\right)} = 2{,}86.$$

2. Es soll für eine 7,2 m hohe Erdmasse, deren Reibungswinkel 45⁰ beträgt, die Stärke einer 5 m hohen Stützmauer gefunden werden, deren Dichtigkeit 1,5 mal so groß als die der Erdmasse ist, wenn die Mauerkrone ganz von der Erde bedeckt ist?

Hier ist $\frac{h_1}{h} = \frac{2,2}{5} = 0,44$, daher findet man in der sechsten Spalte der Tabelle, entsprechend $\varphi = 1$, $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1,5$ und einer Breite der Berme $= 0$, für $\frac{b}{h}$ den Werth

$$\frac{b}{h} = 0,399 + \frac{4}{10}(0,436 - 0,399) = 0,414,$$

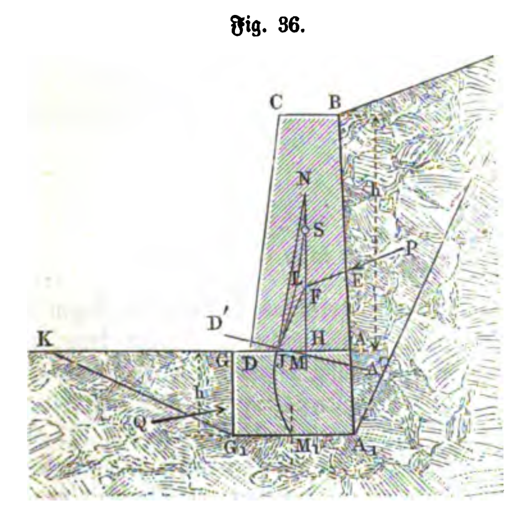
und somit die untere Stärke der parallelepipedischen Mauer zu:

$$b = 5 \,.\, 0,414 = 2,07 \text{ m}.$$

Gleiten der Futtermauern. Eine Futtermauer kann durch den Erddruck bei nicht genügender Stärke auch seitwärts verschoben werden, und man hat derselben daher mit Rücksicht hierauf eine genügende Dicke, d. h. ein entsprechendes Gewicht zu geben, um durch die Reibung der Mauer auf dem Grunde einer Verschiebung entgegen zu wirken. Dasselbe gilt auch für alle höher gelegenen Fugenquerschnitte, in welchen indessen die Widerstandsfähigkeit gegen Verschiebung auch durch die Cohäsion resp. Adhärenz des Mörtels vergrößert wird, während hierauf für die Auflagerfläche der Mauer auf dem Grunde nicht zu rechnen ist. Dagegen widersteht im unteren Theile der Mauer, sobald dieselbe mit einem in den Boden eintretenden Fundamente versehen ist, der passive Erddruck Q gegen die Fläche $G G_1$, Fig. 36, des Fundamentes einer Verschiebung. Für die Stabilität der Mauern in Bezug auf Gleiten kann man, wie bereits oben bemerkt, die allgemein gültige Regel aufstellen, daß die auf irgend eine Lagerfuge wirkende resultirende Kraft von der Normalen zu dieser Fuge um weniger als den Reibungswinkel geneigt sein muß. Wenn daher für eine beliebige Fuge das oberhalb derselben befindliche

§. 13.

Fig. 36.



Mauerstück das Gewicht G hat, und einem Erddrucke P mit der horizontalen Componente H und der verticalen Componente V ausgesetzt ist, so geben alle diese Kräfte eine Mittelkraft, welche gegen die Verticale unter einem Winkel β geneigt ist, für welchen man hat

$$tang\ \beta = \frac{H}{G + V}.$$

Um nun eine bestimmte Sicherheit gegen Gleiten zu erlangen, pflegt man auch hier einen gewissen Stabilitätscoefficienten σ', etwa von der Größe 2, einzuführen, so daß anstatt der einfachen Kraft P diejenige $\sigma' P$ mit der horizontalen und verticalen Componente $\sigma' H$ und $\sigma' V$ wirkend zu denken ist, ehe die Gefahr des Gleitens eintritt. Dieses letztere wird, horizontale Lagerfugen vorausgesetzt, demgemäß der Fall sein, wenn

$$tang\ \beta = \frac{\sigma' H}{G + \sigma' V} = \varphi' = tang\ \varrho'$$

ist, wenn wieder ϱ' den Reibungswinkel für die Lagerfuge bedeutet. Denkt man sich dagegen einer Lagerfuge, z. B. der durch M gehenden, anstatt der horizontalen Lage AD, eine Neigung um den Winkel $D'MD = \lambda$ gegen den Horizont gegeben, so ist aus dem Dreiecke JNH, in welchem JN senkrecht zur Lagerfuge $D'M$ gemacht ist, ersichtlich, daß nun das Gleichgewicht an die Bedingung geknüpft ist:

$$FJN \leqq \varrho',$$

d. h.

$$tang\ \beta = \frac{\sigma' H}{G + \sigma' V} = tang\ (\lambda + \varrho').$$

Man erkennt hieraus, wie man durch entsprechende Neigung der Fugen die Stabilität des Mauerwerkes gegen Gleiten wesentlich erhöhen kann, ein Mittel, welches bei den Ausführungen häufig angewendet wird, wenn starke Horizontalkräfte es bedingen. In den meisten Fällen wird zwar eine Futtermauer mit Rücksicht auf ihre Stabilität gegen Umkippen (vergl. §. 12) eine größere Stärke erfordern, als in Hinsicht auf Gleiten, doch kann unter Umständen auch das Gegentheil stattfinden, so daß man der Sicherheit wegen die Ermittelung der Mauerstärke nach beiden Hinsichten zu ermitteln und von den beiden erhaltenen Werthen b und b' den größeren für die Mauerstärke zu wählen hat.

Bezeichnet wieder G das Gewicht des Mauerwerkes $ABCD$ über dem Fundamente AG_1 der Mauer, welches nach dem vorigen Paragraphen zu

$$G = \gamma_1 \left(b' - \frac{v_1 + v_2}{2}\, h\right) h$$

anzunehmen ist, so hat man für die Fuge AD die Bedingung:

$$tang\,(\lambda + \varrho') = \frac{\sigma' H}{\gamma_1 h \left(b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h\right) + \sigma' V}$$

woraus allgemein folgt:

$$\sigma' = G \frac{tang\,(\lambda + \varrho')}{H - V\,tang\,(\lambda + \varrho')}$$

$$= \gamma_1 h \left(b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h\right) \frac{tang\,(\lambda + \varrho')}{H - V\,tang\,(\lambda + \varrho')} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

und

$$b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h = \frac{\sigma'}{\gamma_1 h} \left(\frac{H}{tang\,(\lambda + \varrho')} - V\right) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Hierin hat man wieder die Componenten H und V des Erddrucks P nach §. 8 zu ermitteln, und erhält z. B. für eine verticale Mauerfläche und horizontale Begrenzung der Erde, wenn man von deren Reibung an der Futtermauer absieht,

$$V = 0 \text{ und } H = \gamma \frac{h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}.$$

Setzt man noch für eine parallelepipedische lothrechte Futtermauer $v_1 = v_2 = 0$, so wird, wenn man einen horizontalen Fugenschnitt ($\lambda = 0$) voraussetzt:

$$\sigma' = 2 \frac{\gamma_1 b'}{\gamma h} \frac{tang\,\varrho'}{tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1^a)$$

und

$$b' = \frac{\sigma' \gamma}{2 \gamma_1} h \frac{tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}}{tang\,\varrho'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2^a)$$

Da nach dem vorhergehenden Paragraphen unter denselben Bedingungen aus (5^a) die Breite b zu

$$b = h\,tang \frac{90^0 - \varrho}{2} \sqrt{\frac{\sigma \gamma}{3 \gamma_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2^b)$$

sich ergiebt, so wird man die Mauerstärke mit Rücksicht auf Gleiten nach (2^a) oder mit Rücksicht auf Kippen nach (2^b) zu bestimmen haben, je nachdem

$$\frac{\sigma' \gamma}{2 \gamma_1} \frac{tang \frac{90^0 - \varrho}{2}}{tang\,\varrho'} \gtrless \sqrt{\frac{\sigma \gamma}{3 \gamma_1}}$$

ist u. s. w.

Um den Widerstand gegen das Fortschieben der Mauer auf dem **Boden** zu vergrößern, welches sich besonders nöthig macht, wenn dieser Boden lettig oder mit Wasser durchdrungen ist, wobei der Reibungscoefficient zwischen der Mauer und dem Grunde auf 0,3 herabgehen kann, giebt man der Mauer, wie schon erwähnt, ein Fundament von gewisser Tiefe $GG_1 = h'$. Es widersteht dann dem **activen** Erddrucke gegen die Fläche A_1B nicht allein die Reibung auf der Grundfläche A_1G_1, sondern auch noch der **passive** Druck der Erdmasse vor der Mauerfläche GG_1.

Setzt man, wie dies meistens zutreffen wird, eine verticale Fläche GG_1 des Fundamentsockels voraus, und bezeichnet wieder ϱ_1 den Reibungswinkel der Erde an dieser Fläche, so ist der passive Erddruck Q unter diesem Winkel ϱ_1 gegen den Horizont nach oben geneigt anzunehmen, da bei einem Ausweichen der Mauer das Erdprisma GG_1K nach oben verschoben werden müßte. Dieser passive Erddruck Q hat daher die horizontale Componente $H' = Q \cos \varrho_1$ und die verticale dem Gewichte der Mauer entgegenwirkende Componente $V' = Q \sin \varrho_1$. Bezeichnet nun G das Gewicht der **ganzen** Mauer BG_1 einschließlich des Fundamentsockels, und werden jetzt unter H und V die Componenten des activen Erddruckes auf die ganze Hinterfläche BA_1 verstanden, so hat man für das Gleichgewicht, unter der Annahme eines Stabilitätscoefficienten σ' die Bedingung:

$$\varphi\,(G + \sigma' V - V') = \sigma' H - H' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Diese Gleichung kann dazu dienen, die Tiefe $h' = GG_1$ des Fundamentes zu ermitteln, wenn man darin den Erddruck P und Q sowie das Gewicht G durch die Höhen h und h' ausdrückt, und für b den aus dem Vorstehenden gefundenen Werth für AD einführt. Wollte man auch hier von der Reibung der Erde an der Mauerfläche absehen, und also $V = V' = 0$ voraussetzen, so erhielte man für eine parallelepipedische Mauer, deren Fundament ein Bankett von der Breite $DG = e$ hat, die Gleichung

$$\varphi\gamma_1\,[bh + (b + e)\,h'] = \sigma'\gamma\,\frac{(h + h')^2}{2}\,tang^2\,\frac{90^0 - \varrho}{2}$$

$$- \gamma\,\frac{h'^2}{2}\,tang^2\,\frac{90^0 + \varrho}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3^a)$$

aus welcher quadratischen Gleichung sich h' berechnen läßt.

Man kann bemerken, daß die Anlage eines Fundamentes von gewisser Tiefe bei Mauern noch einen anderen Grund hat, welcher sich aus Folgendem erkennen läßt. Denkt man sich nach dem in §. 11 darüber Gesagten für eine Mauer die Stützlinie gezeichnet, so stellt der Durchschnittspunkt der letzteren mit irgend einer Lagerfuge den Angriffspunkt dar für die Mittelkraft aller von dieser Fuge aufgenommenen Druckkräfte bezw. ausgeübten

Reactionen. Wenn dieser Angriffspunkt in die Mitte der betreffenden Lagerfuge trifft, wie es im Allgemeinen bei solchen Mauern der Fall sein wird, welche nur verticalen Belastungen wie ihrem Eigengewichte, nicht aber seitlichen Kräften ausgesetzt sind, so darf man eine nahezu gleichmäßige Vertheilung des Druckes auf die Fuge voraussetzen. Bei Futtermauern dagegen wird die Stützlinie durch den seitlichen Erddruck um so weiter aus der Schwerlinie der Mauer nach außen gedrängt, je mehr der Erddruck gegen das Eigengewicht vorherrscht, d. h. je tiefer die betrachtete Fuge unter der Erdoberfläche gelegen ist. Wenn z. B. in der Fig. 36 die parabelähnliche Curve L (s. §. 11) die Stützlinie vorstellt, so wird der gesammte Druck auf die Fuge AD in dem Durchschnittspunkte J sich concentriren, und daher werden die der Außenkante D näher liegenden Elemente stärker gepreßt werden, als die der Innenkante A nahe gelegenen. In wieweit eine solche ungleiche Druckvertheilung mit dem Materiale der Mauer verträglich ist, soll im folgenden Paragraphen näher untersucht werden. Dächte man sich nun die Mauer mit der Fläche AD direct auf den Boden gestellt, so würde derselbe vermöge seiner natürlichen Nachgiebigkeit in Folge dieser ungleichen Druckvertheilung einem ungleichen Ausweichen und Setzen unterworfen sein, in Folge wovon der sichere Stand der Mauer bedenklich gefährdet würde. Dies zu vermeiden, benutzt man den passiven Druck oder Schub der Erdmasse GK gegen das Fundament, denn es ist ohne Weiteres klar, wie durch diesen Schub die Stützlinie unterhalb AG von J aus mehr nach dem Innern der Mauer zurückgebogen wird. Man kann, da der passive Erddruck bei gleicher Tiefe viel größer ist als der active, hierdurch erreichen, daß die Stützlinie die Grundfläche $A_1 G_1$ in ihrer Mitte M_1 schneidet, in welchem Falle die Mauer gleichmäßig auf die Bodenfläche drückt. Es ist auch klar, daß bei einer solchen Tiefe des Fundamentes $G G_1$, bei welcher die horizontale Componente H' des passiven Erddruckes genau gleich der horizontalen Componente H des activen Druckes auf $B A_1$ ist, die Bodenfläche von der Stützlinie in demselben Punkte getroffen werden muß, durch welchen auch die verticale Schwerlinie der Mauer nebst ihren verticalen Belastungen V und V' hindurchgeht, indem die horizontalen Erddruckcomponenten H und H' sich gegenseitig aufheben. Letzteres gilt dann auch von den verticalen Componenten V und V', wenn die beiden gedrückten Mauerflächen parallel sind. Eine hierauf beruhende graphische Bestimmung der Fundamenttiefe soll in einem folgenden Paragraphen angeführt werden.

Beispiel. Wenn man bei der im Beispiele 1 des vorigen Paragraphen berechneten Futtermauer den Reibungswinkel für die Fugen ebenfalls zu $\varrho_1 = 35^0$ annimmt, so ermittelt sich der Stabilitätscoefficient dieser Mauer gegen Gleiten auf der horizontalen Fuge in 5 m Tiefe unter der Mauerkrone nach (1) zu

$$\sigma' = G \frac{tang\ \varrho'}{H - V\ tang\ \varrho'} = 13\,750 \frac{0{,}700}{5600 - 2900 \,.\, 0{,}700} = 2{,}70,$$

so daß ein Grund nicht vorhanden ist, in diesem Falle die Lagerfugen gegen den Horizont geneigt auszuführen.

§. 14. **Druckvertheilung.** Nachdem in den vorhergehenden Paragraphen die Stabilitätsverhältnisse der Futtermauern untersucht worden sind, handelt es sich noch um die Prüfung der Inanspruchnahme, welcher das Material der Mauern unterworfen ist. Dies ist insbesondere deshalb von Wichtigkeit, weil der zur Verwendung kommende Mörtel nur mäßige Druckkräfte auszuhalten, und der Luftmörtel Zugkräften meist gar nicht zu widerstehen vermag. Nur bei der Verwendung eines vorzüglichen hydraulischen oder Cementmörtels kann man, um unverhältnißmäßig große Mauerstärken zu vermeiden, eine geringe Widerstandsfähigkeit gegen Zugspannungen voraussetzen, welche nach Intze*) etwa bis zu 1 kg pro Quadratcentimeter betragen darf. Nach den Versuchen von Bauschinger**) wurde Ziegelmauerwerk in Cementmörtel bei 117 bis 180 kg Druck pro Quadratcentimeter zerdrückt, während solches in Luftmörtel ausgeführt, zwischen 70 und 111 kg Widerstandsfähigkeit zeigte. Nimmt man hiervon $^1/_{10}$ als zulässige Belastung, so wäre dieselbe durchschnittlich

15 kg für Cementmauerwerk
9 kg für Mauerwerk in Luftmörtel.

Ott giebt für

Mauerwerk aus Kalk- und Sandsteinen 10 kg und für
Mauerwerk aus Ziegeln 5 kg

als zulässige Belastung an. Die von Rondelet für verschiedene kühne Bauten berechneten Belastungen variiren zwischen 44 kg bei der Allerheiligenkirche zu Angers und 16 kg bei der Peterskirche in Rom.

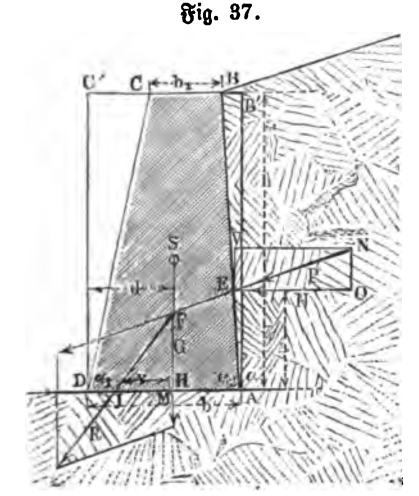
Mit Rücksicht auf eine für eine bestimmte Ausführung anzunehmende größte Beanspruchung des Materials wird sich, wie die folgende Betrachtung zeigen wird, auch der Stabilitätscoefficient σ der Mauer gegen Umkanten ergeben, von welchem im §. 12 nur angegeben wurde, daß er gemeiniglich zwischen 2 und 3 liegend angenommen werde. Ist $ABCD$, Fig. 37, ein Stück einer Futtermauer, und setzt man den in E wirkenden Erddruck P mit dem im Schwerpunkte S wirkenden Gewichte G nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft R zusammen, so erhält man in dem Durchschnittspunkte J der Mittelkraft mit AD denjenigen Punkt, in welchem die Lagerfuge AD gegen das Mauerstück mit einer Kraft $- R$ reagirend

*) Siehe O. Intze, Quaimauern, Stützmauern, Thalsperren. Deutsche Bauzeitung 1875.

**) Siehe Holzhey, Vorträge über Baumechanik.

gedacht werden muß. Diese Reaction besteht aus einer horizontalen Kraft — H, welche nach dem vorhergehenden Paragraphen durch die Reibung der Fuge aufgenommen werden muß und einer vertical aufwärts gerichteten Componente von der Größe $G + V$. Ist nun M im Abstande $MJ = y$ von J die Fugenmitte, und denkt man sich die verticale Componente $G + V$ der Reaction nach M unter Hinzufügung des betreffenden Kräftepaares verlegt, so ist ersichtlich, daß die Fuge unter Einfluß der verticalen Kraft $G + V$ in M einer rückwirkenden Spannung

Fig. 37.



$$s_d = \frac{G + V}{b} \quad . . . (1)$$

ausgesetzt ist, während durch das Kräftepaar vom Moment $(V + G)\, y$ gewisse Biegungsspannungen in dem Querschnitte AD des Mauerkörpers hervorgerufen werden. Die größten Biegungsspannungen s_b finden in den Kanten bei A und D statt, und zwar in A eine Zugspannung und in D eine Druckspannung, von welchen nach den Gesetzen der relativen Festigkeit jede durch

$$\tfrac{1}{6}\, b^2 s_b = (G + V)\, y$$

zu

$$s_b = 6\, \frac{G + V}{b^2}\, y = \frac{6\, y}{b}\, s_d \quad . . . . (2)$$

sich ergiebt. In Folge dieser beiden Wirkungen sind daher die resultirenden Spannungen s_1 in D und s_2 in A durch

$$s_1 = s_d + s_b = \frac{G + V}{b}\left(1 + 6\, \frac{y}{b}\right) \quad . . . . . (3)$$

und

$$s_2 = s_d - s_b = \frac{G + V}{b}\left(1 - 6\, \frac{y}{b}\right) \quad . . . . . (4)$$

gegeben. Der stets positive Werth von s_1 stellt eine Druckspannung in D vor, während in A eine Druck- oder Zugspannung sich einstellt, je nachdem $6\, y$ kleiner oder größer ist als b. Für den Grenzfall $y = \tfrac{1}{6}\, b$ wird $s_2 = 0$, das Material also in A gar nicht beansprucht.

Ein Diagramm veranschaulicht diese Verhältnisse am besten. Denkt man in Fig. 38 I (a. f. S.), auf einer Axe $ad = b$ in allen Punkten Ordinaten

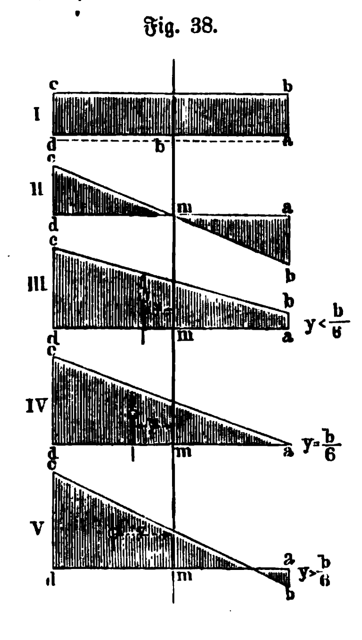
$$dc = ab = s_a = \frac{G + V}{b}$$

aufgetragen, so stellt das Rechteck $abcd$ die gleichmäßige Vertheilung der rückwirkenden Spannungen in Folge des Verticaldruckes $G + V$ vor. Ebenso giebt die durch die Mitte m von ab in II gezogene Gerade cb, für welche

$$dc = ab = s_b = 6\,\frac{G + V}{b^2}\,y$$

gemacht ist, ein Bild von der Vertheilung der Biegungsspannungen, so zwar, daß die Ordinaten unterhalb der Axe am Zugspannungen, diejenigen oberhalb dm Druckspannungen bedeuten. Die Vereinigung der beiden Diagramme I und II durch Summirung der Ordinaten führt sodann ohne Weiteres zu den Figuren III, IV und V, je nachdem

Fig. 38.



$$y \lesseqqgtr {}^1/_6\, b$$

ist. Es ist auch leicht zu ersehen, daß in diesen drei Diagrammen der Schwerpunkt i der schraffirten Flächen von der Mitte m den Abstand y hat, wobei vorausgesetzt werden muß, daß man die in V auf entgegengesetzten Seiten der Axe ad liegenden Flächentheile als in entgegengesetzten Richtungen wirkend ansieht. Aus III und IV ist zu erkennen, daß die Elemente der Fuge durch Zugkräfte nicht in Anspruch genommen werden, so lange der Abstand y der Stützlinie von der Mitte des Querschnittes den Betrag $^1/_6\, b$ nicht überschreitet, also die Stützlinie wenigstens um $^1/_3\, b$ von der äußeren Kante d zurückbleibt. Hieraus ergiebt sich die für gewöhnliches Mauerwerk, dessen Mörtel Zugkräften nicht unterworfen sein soll, meistens angegebene Regel, wonach die Stützlinie **nirgends aus dem mittleren Drittel der Mauer heraustreten soll.** Wenn man dagegen in gewissen Fällen bei Anwendung von Cementmörtel Zugspannungen bis zu gewissem Betrage zulassen will, so kann die Mauerstärke entsprechend geringer gehalten werden, so daß (V) y größer als $^1/_6\, b$ wird,

und man hat zur Bestimmung von b die Anordnung so zu treffen, daß die Ordinate ab in V nach dem für die Kräfte gewählten Maßstabe dem Werthe der höchstens zulässigen Zugspannung entspricht.

Der letztere Fall, in welchem $y > {}^1/_6\, b$ ist, bedarf noch dann einer besonderen Betrachtung, wenn die Fuge Zugspannungen nicht zu äußern vermag. Alsdann wird nämlich die betreffende Fuge von der inneren Kante a aus bis auf eine bestimmte Erstreckung ae, Fig. 39, sich öffnen, so daß dieser Theil gar nicht zur Herstellung des Gleichgewichtes beiträgt, dasselbe vielmehr nur durch den Einfluß der Druckspannungen in dem übrigen Theile ed des Querschnittes erhalten werden kann. Diese Druckspannungen nehmen von Null in e allmälig nach d hin an Größe zu, und man findet für diesen Fall die größte rückwirkende Spannung $s_1 = dc$ in der Kante d, wenn man die durch das Dreieck edc dargestellte gesammte Reaction der Fuge gleich dem Verticaldrucke $G + V$ setzt. Für dieses Dreieck hat man, da der Schwerpunkt i einen Abstand $di_1 = \frac{b}{2} - y$ von der äußeren Kante hat, die Länge der Grundlinie $de = 3\left(\frac{b}{2} - y\right)$, und sonach erhält man für diesen Fall aus

Fig. 39.

$$G + V = {}^1/_2\, de . dc = {}^3/_2 \left(\frac{b}{2} - y\right) s_1,$$

die größte Druckspannung in d zu

$$s_1 = {}^4/_3\, \frac{G + V}{b - 2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3^a)$$

welche Gleichung, wie bemerkt, nur für Werthe von y, die größer als ${}^1/_6\, b$ sind, und unter der Voraussetzung gänzlicher Widerstandslosigkeit des Mörtels gegen Zugkräfte gilt. Diesen Zustand einer sich unter dem Einfluße des Druckes öffnenden Fuge wird man insbesondere bei Mauern zu vermeiden haben, welche dem Wasserdrucke zu widerstehen haben, wie dies beispielsweise bei den Staudämmen von Hochreservoiren (Thalsperren) der Fall ist, weil sonst durch in die geöffneten Fugen eintretendes Wasser leicht eine Zerstörung des Bauwerkes herbeigeführt werden kann.

Wenn man für einen beliebigen Querschnitt der Mauer die Entfernung y der Stützlinie von der Mitte des Querschnittes kennt, so ist es leicht, die größte Spannung an der äußeren Mauerkante graphisch zu ermitteln. Wird z. B. eine Mauerfuge von der Breite $bc = b$, Fig. 40 (a. f. S.), in i_1

oder i_2 von der Stützlinie getroffen, so hat man nur nöthig, das Rechteck $abcd$ mit der Höhe $ab = s_d = \frac{G + V}{b}$ darüber zu zeichnen, den um $^1/_6\, b$ von der Mitte m' entfernten Punkt i mit m zu verbinden, und

Fig. 40.

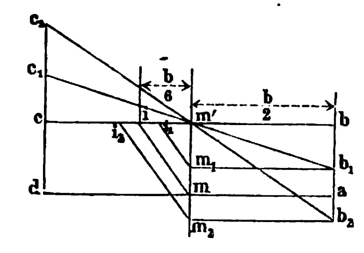
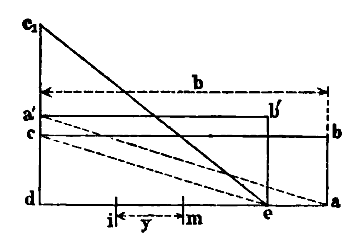


Fig. 41.



durch i_1 bezw. i_2 eine Parallele mit im zu ziehen, um in $m'm_1$ oder $m'm_2$ die maximale Biegungsspannung s_b zu erhalten. Zieht man daher noch $m_1 b_1$ bezw. $m_2 b_2$ parallel mit ad, so erhält man in der Geraden durch b_1 oder b_2 und m' die Begrenzung des Druckdiagramms, und in dc_1 resp. dc_2 die größte Druckspannung s_1 an der äußeren Kante. Diese Construction, deren Richtigkeit aus (1) und (2) ohne Weiteres folgt, gilt für den Fall, daß der Mörtel der Zugspannung $ab_2 = s_2$ widerstehen kann. Ist dies nicht der Fall, so hat man, Fig. 41, entsprechend der Gleichung (3ª) die Länge

$$de = 3\,di = 3\left(\frac{b}{2} - y\right)$$

anzutragen, das Rechteck $abcd$ in das flächengleiche Rechteck $eb'a'd$ zu verwandeln und $dc_1 = 2\,da'$ zu machen, um in dc_1 die Spannung s_1 und in edc_1 das Druckdiagramm zu erhalten, da dieses Dreieck gleich

$$eb'a'd = abcd = Q + G$$

ist. Zur Umwandelung des Rechtecks $abcd$ zieht man am einfachsten ce und damit durch a die Parallele aa', so erhält man

$$de : da = dc : da',$$

folglich in da' die gesuchte Höhe.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich auch der Zusammenhang, welcher zwischen dem Abstande y der Stützlinie von der Mitte M des Querschnittes, Fig. 37, und dem Stabilitätscoefficienten σ für Umkanten besteht. Nach §. 12 hat man nämlich

$$\frac{DH}{FH} = \frac{\sigma H}{G + \sigma V}$$

oder, wenn der Abstand HM der Schwerlinie von der Mitte M mit e bezeichnet wird

$$\frac{\frac{1}{2}b + e}{FH} = \frac{\sigma H}{G + \sigma V}.$$

Nach dem Vorstehenden ist aber auch:

$$\frac{JH}{FH} = \frac{y + e}{FH} = \frac{H}{G + V},$$

und man erhält daher durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{2(y + e)}{b + 2e} = \frac{G + \sigma V}{\sigma (G + V)} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

womit σ aus y oder umgekehrt zu bestimmen ist. Beispielsweise wird für eine verticale parallelepipedische Futtermauer $e = 0$, und man erhält mit $V = 0$:

$$\sigma = \frac{b}{2y},$$

d. h. es würde z. B. der Grenzfall, Fig. 38 IV, für welchen $y = \frac{1}{6}b$ und $s_2 = 0$ ist, einem Stabilitätscoefficienten $\sigma = 3$ entsprechen. Den Werth von y findet man aus der Momentengleichung in Bezug auf J, nämlich:

$$Ha = G(e + y) + V\left(\frac{b}{2} + y - v_2 a\right)$$

zu

$$y = \frac{Ha - V\left(\frac{b}{2} - v_2 a\right) - Ge}{G + V} \quad \ldots \ldots (6)$$

Beispiel. Um bei der in §. 8 und §. 12 berechneten Futtermauer die Druckkräfte in der unteren Fuge zu ermitteln, findet man zunächst das Gewicht bei der mittleren Breite 1,375 m zu

$$G = 2000 \,.\, 5 \,.\, 1{,}375 = 13\,750 \text{ kg}.$$

Ferner hat man das Moment dieses Gewichtes in Bezug auf die äußere Mauerkante nach (2) in §. 12:

$$Gd = 2000 \,.\, 1{,}75 \,.\, 5\, \frac{1{,}75 - 0{,}25}{2} - 2000 \,.\, 125\, \frac{0{,}01 - 0{,}0025}{6}\,.$$

$$= 13\,125 - 312{,}5 = 12\,812{,}5 \text{ mkg},$$

daher den Abstand der Schwerlinie von der äußeren Mauerkante

$$d = \frac{12\,812{,}5}{13\,750} = 0{,}932 \text{ m},$$

d. h. die Schwerlinie der Mauer trifft die Basis derselben in einer Entfernung von deren Mitte

$$e = d - \frac{b}{2} = 0{,}932 - 0{,}875 = 0{,}057 \text{ m}.$$

Es ergiebt sich nun weiter aus (6) der Werth von y zu:

$$y = \frac{5600 \cdot \frac{5}{3} - 2900\left(0{,}875 - 0{,}05\,\frac{5}{3}\right) - 13\,750\,.\,0{,}057}{13\,750 + 2900} = \frac{6\,253}{16\,650}$$
$$= 0{,}374\,\text{m}.$$

Dieselbe Größe von y würde man auch aus (5) erhalten, wenn man darin für σ den in §. 12 berechneten Werth von 2,86 einführt.

Da $y > \frac{1{,}750}{6}$ ist, so wird an der inneren Mauerkante eine Zugspannung eintreten, und man findet die Spannungen s_1 und s_2 an der äußeren und inneren Mauerkante nach (3) und (4) zu:

$$s_1 = \frac{13\,750 + 2\,900}{1{,}750}\left(1 + 6\,\frac{0{,}374}{1{,}750}\right) = 9\,514\,(1 + 1{,}282)$$
$$= 21\,710\,\text{kg Druck}$$

und

$$s_2 = \frac{13\,750 + 2\,900}{1{,}750}\left(1 - 6\,\frac{0{,}374}{1{,}750}\right) = 9\,514\,(1 - 1{,}282)$$
$$= 2\,682\,\text{kg Zugspannung}$$

für 1 qm Querschnittsfläche. Wenn dagegen der Mörtel Zugspannungen gar nicht widerstehen kann, so bestimmt sich die größte Druckspannung an der äußeren Kante nach (3^a) zu:

$$s_1 = \frac{4}{3}\,\frac{13\,750 + 2\,900}{1{,}750 - 2\,.\,0{,}374} = 22\,150\,\text{kg}.$$

Die vorstehend berechnete Stärke der Futtermauern, für welche

$$y = 0{,}374\,\text{m} = 0{,}427\,\frac{b}{2}$$

ist, genügt der Vauban'schen Vorschrift, welcher zufolge y nicht größer als höchstens

$$\frac{4}{9}\,\frac{b}{2} = 0{,}444\,\frac{b}{2}$$

sein soll.

§. 15. **Graphisches Verfahren.** Zum Schlusse möge noch das graphische Verfahren angeführt werden, mittelst dessen die Prüfung bezw. Ermittelung der Stärke von Futtermauern vorgenommen werden kann. Zu dem Ende sei etwa die Aufgabe gestellt, für eine Futtermauer von gegebener Höhe und bei bestimmter Begrenzung der zu stützenden Erde die untere Breite einem vorgeschriebenen Stabilitätscoefficienten σ gemäß zu bestimmen. Es sei eine Futtermauer von 5 m verticaler Höhe vorausgesetzt und angenommen, daß die dem Erddrucke ausgesetzte Wandfläche AB, Fig. 42, unter einer Neigung $^1/_8$ gegen die Verticale nach hinten begrenzt sein, dagegen auf der Vorderfläche CD eine Böschung von $^1/_5$ erhalten solle. Das Terrain möge in EE_1 unter irgend einem Winkel gegen den Horizont geneigt und vorausgesetzt sein, daß ein Theil der Mauerkrone etwa in einer Breite FB

von 1 m durch die Erde bedeckt sei, welche daselbst in FE_1 unter einem Winkel von 30° gegen den Horizont ansteige. Der Reibungscoefficient für die Erde an der Wandfläche sei zu

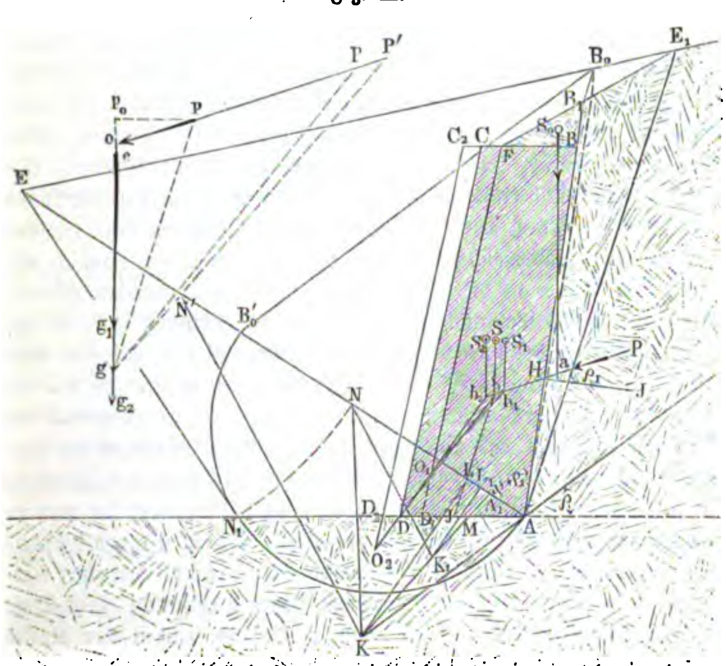
$$tang\ \varrho_1 = 0{,}5,\ \text{also}\ \varrho_1 = 26^0\,34'$$

vorausgesetzt, während der natürliche Böschungswinkel ϱ entsprechend einer mittleren Beschaffenheit der Erde zu

$$38^0\,40',\ \text{also}\ tang\ \varrho = 0{,}8$$

angenommen werden möge. Denkt man nun die hintere Wandfläche AB nach oben erweitert, so kann man das dreiseitige Erdprisma FBB_1 als

Fig. 42.



directe Belastung der Mauer ansehen, und hat den Erddruck gegen die Fläche AB_1 zu ermitteln. Hierzu verwandelt man zuerst das Dreieck AB_1E_1 in das flächengleiche AB_0E_1, dessen Seite B_0E_1 mit der Oberfläche des Terrains zusammenfällt. Die Verwandlung geschieht einfach dadurch, daß man durch B_1 eine Parallele zu AE_1 zieht, wodurch der Punkt B_0 direct erhalten wird. Um nun den Druck der Erdmasse gegen die Wandfläche AB_1 zu erhalten, zieht man nach §. 7 durch A die Gerade AE unter dem

Winkel $BAE = \varrho + \varrho_1 = 65^0\,14'$ gegen die Wandfläche, während man durch B_0 die Gerade $B_0 B_0'$ unter dem natürlichen Böschungswinkel $\varrho = 38^0\,40'$ gegen den Horizont zieht. Dann erhält man durch die Tangente EN_1 an den über AB_0' beschriebenen Halbkreis den Abstand des Punktes N von E, welcher die Größe des Erddruckes durch die Beziehung $P = \frac{1}{2}\,\overline{AN}^2 \sin B_0 B_0' A$ ergiebt. Zieht man daher AK parallel mit $B_0 B_0'$, also unter dem natürlichen Böschungswinkel, und macht $AK = AN$, so erhält man in dem Inhalte des Dreiecks ANK die Größe des Erddruckes nach demselben Maßstabe ausgedrückt, nach welchem das Gewicht eines beliebigen Erdprismas, wie z. B. des auf der Mauer lastenden, durch das Profil FBB_1 desselben dargestellt ist. Betrachtet man auch hier wieder ein Mauerstück von 1 m Länge, so ist also der Erddruck $P = F\gamma$ gegeben, wenn F den Inhalt des genannten Dreiecks ANK und γ das Gewicht eines Cubikmeters Erde bedeutet. In gleicher Art ist das Gewicht E des auf der Mauer lastenden Erdprismas vom Querschnitte $FBB_1 = f$ durch $f\gamma$, dagegen das Gewicht der Mauer durch $G = F_m \gamma_1$ gegeben, wenn F_m das Profil und γ_1 das specifische Gewicht der Mauer bedeutet. Um nun diese verschiedenen Kräfte zu vereinigen, hat man sie durch gerade Linien oder Strecken zu ersetzen, was immer leicht durch Einführung einer gewissen Einheit für den Kräftemaßstab möglich ist. Denkt man sich nämlich alle vorkommenden Kräfte als die Gewichte von gewissen prismatischen Mauerwerkskörpern, welche sämmtlich eine Länge (in der Richtung senkrecht zur Bildebene) gleich der des betrachteten Mauerstückes, also 1 m, und eine horizontale Breite b haben, so ist es deutlich, daß diese Kräfte sich wie die Höhen h dieser Prismen verhalten, und man kann diese Höhen anstatt der Kräfte selbst einführen und mit diesen Strecken alle Operationen der graphischen Statik vollführen. Was die Wahl der für alle Prismen gleichen Breite b anbetrifft, so ist dieselbe an sich zwar gleichgültig, doch hat man zu beobachten, daß nach getroffener Wahl von b das Gewicht $\gamma_1 b$ von b Cubikmetern Mauerwerk als Einheit für den Kräftemaßstab betrachtet werden muß, d. h. jeder Meter der erwähnten Höhen h entspricht einer Kraft gleich $\gamma_1 b$ Kilogrammen. Würde man z. B. als Einheit der Kräfte 1 Tonne = 1000 kg wählen, so hätte man bei einem specifischen Gewichte des Mauerwerkes von 2000 kg als Breite b oder Basis die Länge 0,5 m, dagegen bei einer Kräfteeinheit gleich 10 Tonnen = 10 000 kg eine Basis b = 5 m zu wählen. Man wird bei allen graphischen Ermittelungen die Basis b so annehmen, daß die sich daraus ergebenden Höhen h oder Strecken, welche die Kräfte darstellen, innerhalb des Umfanges der Zeichnung bequem sind. Dementsprechend ist in Fig. 42 als Kräfteeinheit das Gewicht von 5 Tonnen gewählt, so daß, ein specifisches Gewicht des Mauerwerkes $\gamma_1 = 2000$ kg zu Grunde gelegt, die Basis

$$b = \frac{5000}{2000} = 2,5\,m$$

angenommen worden ist. In Folge dessen bedeutet für die ermittelten Höhen oder Strecken und die daraus gebildeten Kräftepolygone ꝛc. jede Länge, welche nach dem der Zeichnung zu Grunde liegenden Maßstabe der Längen 1 m vorstellt, eine Kraft von 5 Tonnen. Demgemäß ist es leicht erklärlich, was man darunter zu verstehen hat, wenn angegeben wird, bei einer graphischen Ermittelung sei ein Kräftemaßstab gewählt, nach welchem 1 cm eine bestimmte Anzahl von Kilogrammen bedeutet. In dem vorliegenden Falle z. B., in welchem die Zeichnung in $^1/_{100}$ der natürlichen Größe ausgeführt ist, entspricht jedem Centimeter der Zeichnung, da derselbe eine wirkliche Länge von 1 m repräsentirt, in dem Kräftepolygone eine Kraft von 5000 kg.

Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich nun leicht die Art, wie die Kräfte durch Strecken, d. h. die Höhen der gedachten Mauerwerkprismen darzustellen sind. Handelt es sich dabei um wirkliche Mauerkörper, so hat man nur deren verticale Profile in Rechtecke von der Breite b zu verwandeln, um in den gefundenen Höhen die betreffenden Strecken zu erhalten. Ist dagegen die Kraft durch das Gewicht eines Erdkörpers von dem specifischem Gewichte γ gegeben, so muß man natürlich entweder das Profil oder die erlangte Höhe in dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ reduciren. Die Art der Verwandlung der Querschnitte in Rechtecke nach den bekannten Regeln der Geometrie bedarf keiner näheren Erläuterung, im Uebrigen kann dieserhalb, sowie hinsichtlich der Operationen mit den Strecken auf das in Thl. I. Anhang, Gesagte verwiesen werden.

Um nun die den Erddruck P darstellende Strecke zu bestimmen hat man das Dreieck ANK zunächst in dem Verhältnisse $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ zu reduciren. Nimmt man für mittlere Erde $\gamma = 1600$ kg also $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{4}{5}$, so erhält man in dem Dreiecke NA_1K, in welchem $NA_1 = \frac{4}{5}NA$ gemacht worden ist, den Querschnit eines den Erddruck darstellenden Mauerprismas. Um diesen Querschnitt in ein Rechteck von der Basis b = 2,5 m zu verwandeln, hat man nur nöthig, die doppelte Basis 2 b = 5 m gleich A_1N' anzutragen und durch N die mit $N'K$ parallele Gerade NK_1 zu ziehen. Man erhält dann offenbar in der Höhe $K_1L_1 = p$ des Dreiecks NK_1A_1 die gesuchte Strecke für den Erddruck, denn es ist:

$$A_1N : A_1N' = K_1L_1 : KL$$

oder

$$A_1N \,.\, KL = A_1N' \,.\, K_1L_1 = 2\mathfrak{b}p,$$

folglich

$$\mathfrak{b}p = \frac{1}{2}\, A_1N \,.\, KL = \triangle\ A_1NK.$$

Diese Kraft greift die Mauer in einem Punkte H an, so daß $AH = \frac{1}{3} AB_1$ ist, und bildet mit der Normalen HJ zur Wandfläche in H den Winkel

$$PHJ = \varrho_1 = 26^0\,34'.$$

Man zeichnet nunmehr das Kräftepolygon, indem man an einen beliebigen Punkt o den Erddruck P der Richtung und Größe nach gleich po anträgt. Ferner trägt man von o aus vertical die Strecke oe ab, welche dem Gewichte des Erdprismas FBB_1 entspricht, und welche Strecke man in ganz ähnlicher Art gefunden hat, wie vorstehend für p angegeben worden.

Um nun das Gewicht der Mauer festzustellen, kommt man am einfachsten zum Ziele durch vorläufige Annahme einer ganz beliebigen Mauerstärke. Es sei zunächst die obere Mauerdicke gleich der mit Erde bedeckten Breite BF, und durch F unter der vorgeschriebenen Steigung ($^1/_5$) das Profil FD_1 eingetragen, und dieses Profil in ein Rechteck zur Basis $\mathfrak{b}$ verwandelt. Die sich ergebende Höhe g_1, welche das Gewicht der Mauer $ABFD_1$ darstellt, trage man dann im Kräftepolygon gleich eg_1 an; gleichzeitig hat man den Schwerpunkt S_0 des Erdprisma's FBB_1 und denjenigen S_1 der Mauer $ABFD_1$ zu bestimmen. Letzteres geschieht (s. Thl. I. Absch. III, Cap. 2) am einfachsten, wenn man jede der parallelen Seiten des Trapezes um die andere nach entgegengesetzten Seiten verlängert, und den Durchschnitt der Verbindungsgeraden mit der Mittellinie sucht, welche die parallelen Seiten halbirt.

Wenn nun die Bedingung gestellt ist, die Mauer solle einem Stabilitätscoefficienten σ entsprechend construirt werden, so macht man $oP = \sigma p$, im vorliegendem Falle, in welchem $\sigma = 3$ vorausgesetzt wurde, ist $oP = 3p = 3\ K_1L_1$ gemacht worden. Zeichnet man nun in bekannter Weise das Seilpolygon, indem man durch den Durchschnittspunkt a, in welchem der Erddruck P das Gewicht E des kleinen Erdprismas FBB_1 trifft, eine mit Pe Parallele bis zum Durchschnitte b_1 mit dem Gewichte G_1 der Mauer zieht und dann ferner durch b_1 eine Parallele b_1O_1 zu Pg_1 im Kräftepolygon legt. Diese Grade b^1O_1, welche die Richtung der Resultirenden aus σP, E und G_1 darstellt, trifft die Mauerkante in O_1 und die unterste Fuge außerhalb der Mauer, woraus ohne weiteres folgt, daß die gewählte Dicke der Mauer nicht genügt. Nimmt man daher, ebenfalls beliebig, eine größere Mauerstärke an, begrenzt etwa die Mauer nach dem

Profil $C_2 D_2$, und wiederholt dieselbe Construction, indem man nunmehr das Gewicht G_2 des Mauerkörpers $A B C_2 D_2$ durch die Strecke eg_2 im Kräftepolygon darstellt, so erhält man das Seilpolygon $a b_2 O_2$. Da hier die in der Richtung $b_2 O_2$ wirkende Resultirende die Grundfläche $A D_2$ innerhalb der Mauer schneidet, so folgt, daß die gewählte Mauerdicke unnöthig stark ist, denn der gestellten Bedingung zufolge soll für den σfachen Erddruck gerade die Stabilitätsgrenze erreicht werden, d. h. die Stützlinie gerade durch die Außenkante der Grundfläche gehen.

Die der Aufgabe entsprechende äußere Mauerbegrenzung CD wird daher zwischen $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ gelegen sein. Um diese Begrenzung jetzt schnell festzustellen, kann man nach Culmann*) sich der sogenannten Fehlercurve bedienen, von welcher im vorliegenden Falle O_1 und O_2 zwei Punkte sind. Denkt man sich nämlich für alle möglichen zwischen $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ angenommenen, mit diesen parallelen Begrenzungen die Stützlinien construirt und deren Durchschnittspunkte O mit den zugehörigen vorderen Mauerflächen aufgesucht, so legen alle diese Durchschnitte zwischen O_1 und O_2 eine gewisse Curve fest, und derjenige Punkt, in welchem diese Curve die Grundfläche $A D_2$ schneidet, entspricht offenbar der vorliegenden Aufgabe. Man erhält nun hier das Resultat genau genug, wenn man diese sogenannte Fehlercurve zwischen der kleinen Strecke $O_1 O_2$ als Gerade ansieht, d. h. man erhält im Durchschnittspunkte D der Geraden $O_1 O_2$ mit der Grundfläche den Punkt, durch welchen die Begrenzung der vorderen Mauerfläche $D C$ unter der vorgeschriebenen Neigung zu legen ist. Legt man diese untere Breite $AD = 1{,}73$ m zu Grunde, und bestimmt hierfür das Gewicht der Mauer $G = eg$ und den Schwerpunkt derselben in S, so erhält man mit Hülfe des Kräftepolygons $Poeg$ ein Seilpolygon abD, welches allerdings durch die äußere Mauerkante D geht, als Beweis, daß die ermittelte Mauerstärke der gestellten Bedingung eines Stabilitätscoefficienten gegen Umkanten gleich σ entspricht.

Will man auch den Stabilitätscoefficienten σ' für das Gleiten der Mauer auf der horizontal angenommenen Lagerfuge AD ermitteln, so hat man unter Annahme des einfachen Erddruckes gleich op das Kräftepolygon $poeg$ zu Grunde zu legen und hiernach das Seilpolygon abJ zu verzeichnen. Die Lagerfuge wird demnach in J von der resultirenden Kraft R unter einem Winkel gegen die Normale getroffen, welcher Winkel durch ogp gegeben ist. Trägt man an og in g die Gerade gP' unter dem Reibungswinkel für die Steine in AD auf einander an, so erhält man in oP' diejenige Größe, welche der Erddruck annehmen müßte, bevor die Grenze der Stabilität in Hinsicht des Gleitens erreicht ist, und man findet den betreffenden Stabilitäts-

---

*) S. Culmann, Graphische Statik.

coefficienten für Gleiten durch das Verhältniß $\frac{op}{oP'} = \sigma'$. Aus der Figur, in welcher für die Fuge AD gleichfalls ein Reibungswinkel $\varrho = 38^0 40'$ angenommen und von der Cohäsion des Mörtels abgesehen ist, ergiebt sich $\sigma' = 3{,}14$, also eine noch größere Stabilität gegen Gleiten, als gegen Umkanten, so daß man keine Veranlassung haben wird, durch geneigte Lagerfugen die Stabilität gegen Gleiten zu vergrößern.

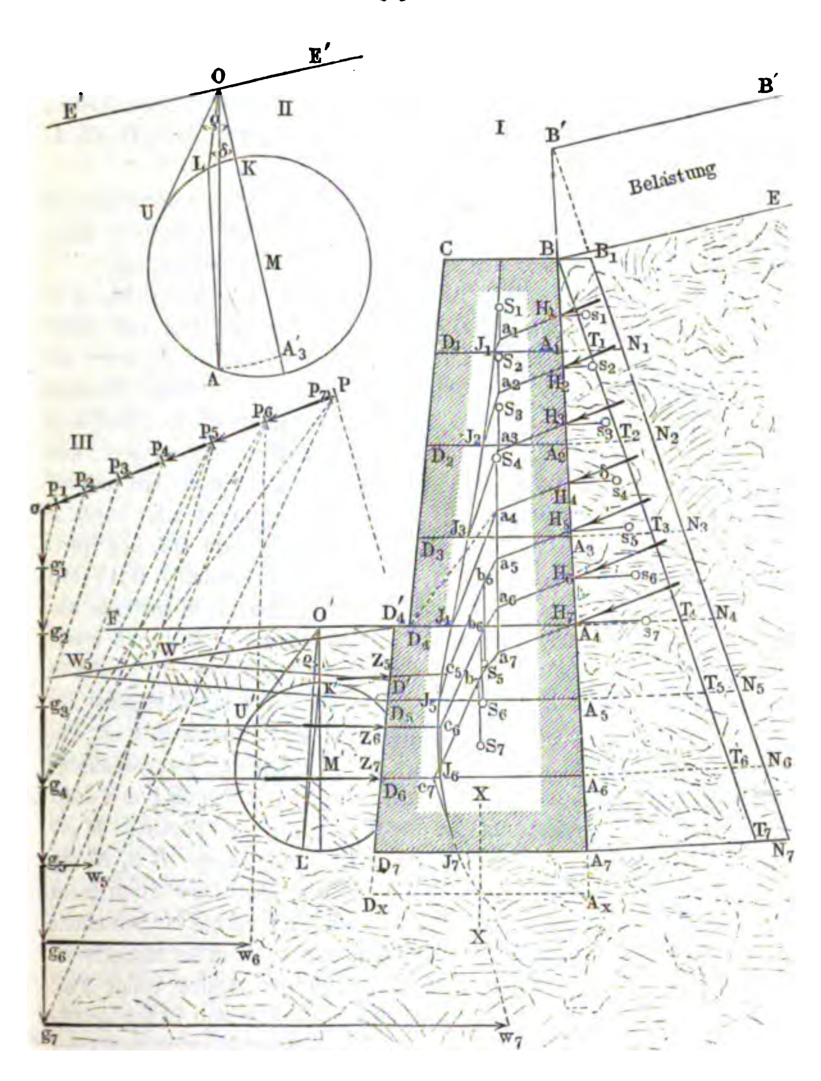
Der Abstand $JM = y$, in welchem die Stützlinie die Lagerfuge AD von deren Mitte M trifft, ergiebt sich aus der Figur zu 0,05 AD, folglich wird, da dieser Werth kleiner als $^1/_6\, b$ ist, die Fuge nur durch Druckkräfte beansprucht, deren Größe nach dem im vorhergehenden Paragraphen Angeführten (s. Fig. 40), leicht bestimmt werden kann, wenn man berücksichtigt, daß der auf die Lagerfuge AD kommende Verticaldruck durch die senkrechte Höhe gp_0 des Punktes p über demjenigen g dargestellt wird. Es kann bemerkt werden, daß die geringe Größe von y im vorliegenden Falle hauptsächlich der nach rückwärts übergeneigten Stellung der Futtermauer zuzuschreiben ist, in Folge deren die Schwerlinie durch den Schwerpunkt S der Mauer zwischen M und A fällt, und es kann in Folge einer solchen Neigung der Futtermauer der Schnittpunkt J unter gewissen Verhältnissen selbst nach M oder sogar zwischen M und A fallen.

In derselben Art, wie hier für die Grundfläche der Mauer geschehen, kann man auch für jede beliebige Lagerfuge den Durchschnittspunkt der Mittelkraft aller der Kräfte bestimmen, welche auf das oberhalb dieser Fuge gelegene Mauerstück wirken. Denkt man sich diese Schnittpunkte sämmtlich durch einen fortlaufenden Curvenzug verbunden, so erhält man die Stützlinie, welche in ihrem Verlaufe die Stabilitätsverhältnisse und die Drucktheilung für jedes Stück der Mauer in der angegebenen Weise zur Anschauung bringt. Dehnt man diese Construction auch auf das ganz im Erdinnern gelegene Fundament der Mauer aus, für welches man außer dem Erddrucke auf die hintere Seite auch den Erdschub auf die entgegengesetzte Seite zu berücksichtigen hat, so läßt sich auch leicht die Frage beantworten, wie tief man das Fundament in einem gegebenen Falle zu führen hat, um für die Standfläche desselben auf dem natürlichen Boden gewissen Bedingungen hinsichtlich der Druckvertheilung zu genügen. Hierfür mag in Fig. 43 noch ein Beispiel angeführt werden.

Es sei $A_4 B C D_4$ das Profil einer Futtermauer, welche auf dem Fundamente $A_4 D'_4 D_7 A_7$ steht, und gegen welche sich rückwärts die durch die Ebene BE begrenzte Erdmasse lehnt, während die Oberfläche $D'_4 F$ der Erde vor der Mauer horizontal begrenzt sein soll. Die Erdoberfläche BE soll ferner noch durch Pflaster, Gebäulichkeiten oder daselbst abgelagerte Waaren einer zusätzlichen Belastung ausgesetzt sein, welche als eine gleichmäßig vertheilte Erdmasse von der oberen Begrenzung $B'B'$ parallel zu

BE gedacht werden kann. Es möge nun die Futtermauer durch eine beliebige Anzahl horizontaler Schnitte A_1D_1, $A_2D_2 \ldots A_7D_7$ in ebenso-

Fig. 43.



viele einzelne Stücke zerlegt und es sollen die Gewichte der einzelnen Theile wie im vorigen Beispiele bestimmt werden. Demgemäß mögen die Abschnitte

$og_1, og_2 \ldots og_7$ auf der Verticallinie im Kräftepolygon die Strecken sein, welche unter Annahme einer gewissen Basis b die Gewichte der einzelnen Mauerkörper darstellen, die oberhalb der gleichbezeichneten Fugen bis zur horizontalen Mauerkrone $B\,C$ gelegen sind. Für die Mauer oberhalb des Fundaments seien ferner $S_1\,S_2\,S_3$ und S_4 die Schwerpunkte dieser Stücke, also z. B. S_3 derjenige des Mauerkörpers $A_3\,B\,C\,D_3$, wogegen S_5, S_6 und S_7 die Schwerpunkte der Fundamentkörper zwischen $A_4\,D'_4$ und der betreffenden Lagerfuge sein mögen, derart, daß z. B. S_6 den Schwerpunkt von $A_4\,D'_4\,D_6\,A_6$ bedeutet.

Für die Bestimmung des Erddruckes P auf $B\,A_7$ und des Erdschubes Q auf $D'_4\,D_7$ soll hier die Mohr'sche Theorie des Erddruckes (s. §. 4) angewendet werden, nach welcher diese Kräfte wie folgt zu bestimmen sind.

Man ziehe in II die Gerade $E'E'$ parallel der Terrainoberfläche $B\,E$ und in O eine dazu Senkrechte $O\,A'_3$ und eine Verticale $O\,A$ und mache $O\,A = O\,A'_3$ gleich dem normalen Abstande des Punktes A_3 unter der Erdoberfläche $B\,E$ in I. Legt man nun an die zur Oberfläche Normale $O\,A'_3$ unter dem Winkel $A'_3\,O\,U = \varrho$ eine Gerade $O\,U$, so erhält man in dem diese Gerade $O\,U$ berührenden Kreise, welcher durch A geht, und dessen Mittelpunkt M auf $O\,A'_3$ liegt, nach §. 4 den Kreis für den unteren Grenzzustand des Gleichgewichts der Erdmasse. Zieht man daher durch A die mit der hinteren Wandfläche Parallele $A\,L$, so giebt $O\,L$ den specifischen Erddruck für den Punkt A_3 in I und der Winkel $L\,O\,A'_3$ den Winkel δ, um welchen dieser Druck von der Normalen zur Wandfläche abweicht. Zieht man ferner durch $A_1\,A_2 \ldots A_7$ Senkrechte zu $B\,A_7$ und macht $A_3\,T_3 = O\,L$, so erhält man, wenn man noch die Gerade $B\,T_3$ zieht in den einzelnen Dreiecken $B\,A_1\,T_1$, $B\,A_2\,T_2 \ldots$ die Größe des Erddruckes auf die betreffenden Wandtheile für den Fall, daß die Erdoberfläche einer Belastung nicht ausgesetzt ist. Um daher mit Rücksicht auf die vorhandene Belastung BB' den Druck zu bestimmen, hat man nur durch den Durchschnitt B' der Wandfläche mit der Belastungslinie eine Parallele $B'\,N_7$ mit $B\,T_7$ zu ziehen. Die hierdurch erhaltenen Trapeze $B\,B_1\,N_1\,A_1$ $B\,B_1\,N_2\,A_2 \ldots B\,B_1\,N_7\,A_7$ geben dann die Grundflächen von Erdprismen an, deren Gewichte bei der Länge von 1 m den Erddruck auf die betrachtete Wandfläche von 1 m Breite darstellen. Wenn man daher in der angegebenen Weise diese Erdprismen in Mauerprismen von gleicher Länge 1 m, und der Breite gleich der Basis b verwandelt, so erhält man in den gefundenen Höhen derselben die Erddrucke auf die entsprechenden Wandflächen von der Krone B bis zu dem gleichbezeichneten Horizontalschnitte A. Die so ermittelten Strecken sind im Kräftepolygon III als $op_1, op_2, \ldots op_7$ an die Verticale unter einem Winkel $K\,O\,L = \delta$ gegen die Normale zur Wandfläche $A_7\,B$ angetragen. Auch ist es klar, daß man die Angriffspunkte

$H_1 H_2, \ldots H_7$ dieser Erddrucke erhält, wenn man die Schwerpunkte $s_1 s_2 \ldots s_7$ der besagten Trapeze normal auf die Wandfläche nach $H_1 H_3 \ldots H_7$ projicirt. In diesen Punkten wirkt der Erddruck, wie schon erwähnt, unter dem Winkel δ gegen die Normale zur Wandfläche. Ebenso hat man den Erdschub gegen die Vorderfläche des Banketts $D'_4 D_7$ zu bestimmen, indem man durch irgend einen Punkt O' der horizontalen Erdoberfläche die Verticallinie OK' legt und gleich einer beliebigen Länge z macht, worauf man durch K' den Kreis zum Mittelpunkte M' legt, welcher die Gerade OU' berührt, die mit der Verticalen den Böschungswinkel $M'O'U' = \varrho$ bildet. Von den beiden möglichen Kreisen gilt hier der größere, da es sich um den Erdschub handelt. Zieht man nun durch K' eine Parallele mit der Vorderfläche $D'_4 D_7$ des Banketts, welche den Kreis M' in L' schneidet, so erhält man in der Strecke $O'L'$ die Größe des specifischen Erddrucks in einer verticalen Tiefe $O'K' = z$ unter der Oberfläche, während der Winkel $M'O'L' = \delta'$ die Abweichung angiebt, um welche der Erdschub gegen die Normale zu $D'_4 D_7$, und zwar nach oben gerichtet, geneigt ist. Zieht man daher in dem Punkte D', welcher um z unter der Erdoberfläche liegt, eine Normale $D'W'$ zu $D'_4 D_7$ und macht $D'W' = O'L'$, und zieht man die Gerade $D'_4 W'$, so begrenzt die letztere zusammen mit der Wandfläche $D'_4 D_7$ und den in D_5, D_6, D_7 auf der Wandfläche Normalen diejenigen Dreiecke, welche dem Erdschube auf die Flächen $D'_4 D_5$, $D'_4 D_6$, $D'_4 D_7$ entsprechen. In der Figur ist des beschränkten Raumes wegen nur das Dreieck $D'_4 D_5 W_5$ vollständig gezeichnet, welches den Schub der Erde gegen die Fläche $D'_4 D_5$ darstellt. Die Verwandlung dieser Dreiecke liefert dann wieder die Strecken, welche im Kräftepolygon als $g_5 w_5$, $g_6 w_6$, $g_7 w_7$ in den betreffenden zugehörigen Punkten und der durch δ' festgesetzten Richtung angetragen sind.

Die Angriffspunkte $Z_5 Z_6 Z_7$ für den Erdschub liegen unter der Erdoberfläche F um $^2/_3\, z$, wenn z die Tiefe der zugehörigen Schnittfläche DA ist. Nunmehr läßt sich die Stützlinie leicht finden, wenn man für die einzelnen, je zwischen der Krone und den verschiedenen Lagerfugen enthaltenen Mauerstücke die Seilpolygone in der vorbeschriebenen Weise zeichnet. Diese Seilpolygone sind in der Figur mit $HabcJ$ bezeichnet, und es genügt, die Construction an einem einzigen, etwa $H_5 J_5$, zu erläutern. Man verlängert dabei die Kraft des Erddrucks in H_5 bis zum Durchschnitte a_5 mit dem durch S_4 gehenden Gewichte g_4 des Mauertheils BA_4, zieht durch a_5 eine Parallele mit $p_5 g_4$ im Kräftepolygon bis zum Schnittpunkte b_5 mit der in S_5 anzunehmenden Schwerkraft g_5 des Fundamentstückes $A_4 A_5$. Von dem so erhaltenen zweiten Knoten b_5 des Seilpolygons zieht man nunmehr das nächste Seil parallel zu $p_5 g_5$ bis zum Durchschnitte c_5 mit dem Erdschube in Z_5, und endlich durch c_5 eine Parallele zu $p_5 w_5$, wodurch man in J_5 den Punkt erhält, in welchem die Querschnittsfläche $A_5 D_5$ von der

resultirenden Kraft getroffen wird. Die Verbindung aller so erhaltenen Schnittpunkte $J_1 J_2 \ldots J_7$ führt zu der gesuchten Stützlinie.

Man erkennt aus der Figur, daß, während die Stützlinie in der oberen Mauer BA_4 aus der ursprünglich verticalen Richtung bei S_1, nach unten hin in Folge des zunehmenden Erddruckes P mehr und mehr der äußeren Mauerfläche CD_4 sich nähert, dieselbe im Fundamente durch den sehr schnell wachsenden Erdschub W wieder nach der Mitte hin gedrängt wird. Wollte man etwa die Bedingung stellen, daß die natürliche Bodenfläche, auf welcher die Mauer ruht, in allen Punkten gleichmäßig belastet werden soll, so hätte man offenbar das Fundament bis zu demjenigen Querschnitte $A_x D_x$ zu führen, in welchem die Stützlinie J mit der Mittellinie XX des Fundaments sich schneidet.

Um hier den Stabilitätscoefficienten für die Mauer BA_4 zu bestimmen, hat man nur D_4 mit a_4 durch eine Gerade zu verbinden und im Kräftepolygon durch den Punkt g_4 eine Parallele zu $D_4 a_4$ zu ziehen, welche die Richtung des Erddruckes in P schneidet. Man schließt daraus, daß der Erddruck gegen die Mauerfläche BA_4 die Größe oP annehmen muß, bevor die Grenze der Stabilität für die Fuge $A_4 D_4$ erreicht wird, so daß man den zugehörigen Stabilitätscoefficienten zu $\sigma = \frac{oP}{op_4}$ findet, welches Verhältniß aus der Figur sich im vorliegenden Falle zu 2,41 ergiebt. Dieser Werth ist ebenso wie die in Bezug der Fig. 42 vorstehend angegebenen, einer im größeren Maßstabe gezeichneten Figur entnommen. Selbstredend wird ein graphisches Verfahren um so genauere Resultate ergeben, je größer der Maßstab ist, in welchem die Zeichnung ausgeführt ist. Bei der Prüfung der Verhältnisse von Futtermauern wird es in der Regel genügen, den Maßstab für die Zeichnung etwa zwischen $^1/_{20}$ und $^1/_{40}$ der natürlichen Größe anzunehmen, da diese Größe bei einigermaßen sorgfältiger Ausführung der Zeichnung eine Genauigkeit erzielen läßt, welche diejenige weit übertreffen dürfte, die bei der Ausführung von Mauerwerkskörpern erreichbar ist.

Anmerk. Der erste gründliche Schriftsteller über den Erddruck ist Coulomb, s. Théorie des machines simples par Coulomb. Weiter verfolgte diesen Gegenstand Prony in seinen Leçons sur la poussée des terres (1802); nächstdem findet man den Gegenstand gut und gedrängt bearbeitet in Navier's Leçons sur l'application de la mécanique etc., T. I, sowie in Persy's Cours de Stabilité des constructions. Ein besonderes Werk, in welchem auch die Beobachtungen und Theorieen über den Erddruck aller seiner Vorgänger abgehandelt werden, lieferte Mayniel (1808) unter dem Titel: Traité expérimental etc. de la poussée des terres. Neue und in ziemlich großem Maßstabe ausgeführte Versuche sind von C. Martony de Köszegh angestellt und in folgendem Werke veröffentlicht worden: Versuche über den Seitendruck der Erde, ausgeführt auf höchsten Befehl u. s. w. und verbunden mit den theoretischen Abhandlungen von

Coulomb und Français, Wien 1828. Das vollständigste Werk über den Erddruck u. s. w. hat Poncelet geliefert. Dasselbe ist aus dem Mémorial de l'officier du génie (1838) von Lahmeyer übersetzt und unter dem Titel herausgegeben: Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, Braunschweig 1844. Gut und zum Theil eigenthümlich behandelt den Erddruck Moseley in seinen Mechanical principles of Engineering and Architecture, wovon Scheffler eine Uebersetzung geliefert hat. Auch in des Letzteren Werke: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, 1857, findet sich der Gegenstand eingehend behandelt, ebenso wie in Hagen's Handbuche der Wasserbaukunst Thl. II. Ferner ist hier anzuführen: Nouvelles Expériences sur la pousée des terres, par Audé Paris 1849. Von neueren Schriften sind bereits im Vorstehenden die Arbeiten von Mohr und Winkler angeführt, welcher Letztere seinem Werke eine kritische Zusammenstellung der verschiedenen Theorieen beigefügt hat. Außerdem sind hier die Arbeiten von Guilhelm in den Annales des ponts et chaussées, 1858, Levy, Comptes rendus LXX, 1870, Considère, Ann. des ponts et chaussées, 1870, Rankine, Manual of civil engineering 1865, J. Weyrauch, Theorie des Erddrucks, Wien 1881, und anderen, sowie das ausführliche Werk Rebhanns, Theorie des Erddruckes und der Futtermauern 1871, zu erwähnen. Die graphischen Methoden finden sich in Culmanns bekannter graphischer Statik. Von allgemeinen Lehrbüchern sind zu nennen Ott', Baumechanik 1870, und Holzhey, Baumechanik, 1879.

Zweites Capitel.

Die Theorie der Gewölbe.

§. 16. **Gewölbe.** Zur Ueberdeckung von Oeffnungen zwischen zwei festen Widerlagern oder Pfeilern dienen im Bauwesen die Gewölbe. Unter einem Gewölbe versteht man eine Vereinigung einer Anzahl von Steinen, welche vermöge ihrer Form mit ihren Seitenflächen sich gegen einander und gegen die festen Widerlager derartig stützen, daß sie unter dem Einfluße ihres Eigengewichtes sowie der auf ihnen ruhenden Belastung mit Hülfe der von den Widerlagern ausgeübten Reactionen im Zustande des Gleichgewichtes sind. Die gedachten Seitenflächen, in welchen je zwei benachbarte Steine sich gegen einander stützen, heißen Fugenflächen oder schlechtweg Fugen und zwar Lagerfugen, zum Unterschiede von den sogenannten Stoßfugen, d. h. den hierzu in der Regel senkrechten Flächen, in denen die einzelnen gewölbten Bogen mit ihren Stirnen zusammenstoßen. Unter den Wölbungen oder Leibungen werden diejenigen meist cylindrisch gekrümmten Flächen verstanden, welche durch die Kopfenden der Steine gebildet sind, und zwar versteht man unter der inneren Leibung die der Oeffnung zugekehrte untere Wölbfläche, während die obere, die Belastung aufnehmende Wölbfläche, die äußere Leibung heißt. Die Wölbflächen haben in den meisten Fällen die Form von Cylinderflächen mit horizontaler Axe und mehr oder minder großem Halbmesser, welcher bei den sogenannten scheitrechten Gewölben mit ebenen Wölbflächen als unendlich groß zu denken ist. Nur in einzelnen Fällen kommen abweichend gestaltete Gewölbe vor, unter welchen die sogenannten Kuppelgewölbe besonders hervorzuheben sind. Ebenso gehören conische Gewölbe, sowie cylindrische Gewölbe mit gegen den Horizont geneigten Axen, wie z. B. die sogenannten Kellerhalsgewölbe zu den selteneren Vorkommnissen; wie auch die Ueberwöl-

bungen ringförmiger Räume nur ausnahmsweise, z. B. bei gewissen Ziegelöfen vorkommen. Je nachdem die beiden End- oder Stirnflächen eines Gewölbes senkrecht oder schief gegen die Axe gestellt sind, unterscheidet man die geraden von den schiefen Gewölben, von denen die letzteren eine besondere Wichtigkeit für den Brückenbau haben, da man durch örtliche Verhältnisse sehr häufig veranlaßt ist, die Ueberführung von Straßen und Eisenbahnen über Flüsse oder andere Straßen schräg gegen die letzteren anzuordnen. Je nachdem endlich die Widerlager hinsichtlich ihrer Anordnung symmetrisch zur Gewölbaxe sind oder nicht, je nachdem namentlich die Höhe der beiden Widerlagsfugen oder Kämpfer gleich oder verschieden ist, kann man die Gewölbe in symmetrische und unsymmetrische unterscheiden.

Der verticale Querschnitt der cylindrischen oder Tonnengewölbe kann sehr verschieden gewählt werden. Derselbe kann ebensowohl die Kreisform, und zwar die Gestalt eines Halbkreises oder eines flachen Segmentes, wie auch diejenige einer Ellipse, Kettenlinie und, wie schon bemerkt, auch einer geraden Linie haben, wonach man Kreisgewölbe, elliptische, Ketten- und scheitrechte Gewölbe unterscheidet. Anstatt der elliptischen Begrenzung wählt man der leichteren Darstellung wegen sehr häufig eine aus mehreren ohne Knick in einander übergehenden Kreisbögen zusammengesetzte sogenannte Korblinie, und spricht dann von Korbgewölben oder Korbbögen. Elliptische oder Korbbögen, bei denen die verticale Höhe in der Mitte, Pfeilhöhe, kleiner ist, als die horizontale Weite, Spannweite, heißen gedrückte Bögen, während man im entgegengesetzten Falle die Bögen wohl überhöhete nennt. Letztere kommen namentlich bei Tunnelgewölben vor, während für Brücken über Flüsse mit weiten Oeffnungen die flachen segmentförmigen, elliptischen oder Korbbögen angezeigt sind, welche dem Wasser genügenden Durchflußquerschnitt gewähren, ohne die unbequeme Höhe der Construction zu bedingen, wie sie Halbkreisbögen erfordern. Diese letzteren dagegen werden, wegen des geringen Seitenschubes gerade bei hohen Wegeüberführungen oder Viaducten meist angewendet. Eine besondere Form zeigt der bekannte, bei gothischen Bauten so viel angewendete Spitzbogen, dessen Querschnitt aus zwei, im höchsten Punkte oder Scheitel unter einem gewissen Winkel zusammenstoßenden Kreisbögen besteht, und welcher, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, insbesondere für eine starke Belastung des Scheitels sehr geeignet ist, wie sie bei Thurm- und Kirchenbauten vorkommt.

Auch die Belastung der Gewölbe ist sehr verschieden. Während die gewölbten Decken großer Räume, z. B. in Museen und Kirchen, nur ihr eigenes Gewicht zu tragen haben, sind die Brückengewölbe durch die darüber fahrenden Wagen belastet, und dazu kommt bei Durchlässen unter hohen Eisenbahndämmen sowie bei Tunneln der Druck der über den Gewölben

befindlichen Erdmasse. Bei Gebäuden haben die gewölbten Zwischendecken die Belastung der Fußböden und die Fensterbögen das Gewicht der über ihnen befindlichen Mauermassen zu tragen. Bei der Berechnung der Gewölbe hinsichtlich ihrer Stabilität ist es gebräuchlich, die Belastung durch das Gewicht von Mauerwerk auszudrücken, welches mit dem Gewölbmaterial gleiches specifisches Gewicht hat, und es kommt daher, wie in dem Folgenden mehrfach gezeigt werden wird, in jedem einzelnen Falle darauf an, die für jeden Punkt des Gewölbes der daselbst stattfindenden Belastung entsprechende Höhe des Belastungskörpers zu ermitteln.

Als Material für die Gewölbe dienen bei den größten Spannweiten und Belastungen der Brücken meistens natürliche Bausteine, insbesondere Sand- und Kalksteine, während man in Backsteingebäuden die Gewölbe in der Regel ebenfalls aus Ziegelmauerwerk darstellt. Hierbei pflegt man bei der Verwendung von Hausteinmaterial die einzelnen Wölbsteine von solcher Länge anzuwenden, daß sie durch die ganze Gewölbstärke von der inneren bis zur äußeren Leibung hindurchreichen. Stärkere Gewölbe aus Ziegelmauerwerk dagegen führt man in einzelnen, der geringen Ziegellänge entsprechend dicken Gewölbschichten aus, welche entweder unter einander in regelrechtem Verbande, oder in isolirten Schichten dargestellt werden.

Wenn man bei der Ausführung auch, besonders bei Ziegelgewölben, in der Regel einen ausgezeichneten Cementmörtel verwendet, so pflegt man doch bei der Berechnung auf die Bindekraft des Mörtels nicht zu rücksichtigen, sondern anzunehmen, daß die Steine mit den Fugenflächen einfach auf einander gelegt sind, und daher zwischen den Fugen nur die betreffende Reibung auftritt. Diese Annahme muß gemacht werden, weil jedes Gewölbe, auch bei der sorgfältigsten Ausführung, durch Erschütterungen oder in Folge ungleichen Setzens der Widerlager Risse in den Fugen erhalten kann, wodurch also der Zusammenhang der Mörtelmasse verloren geht. Man hat die Wirkung des Mörtels hauptsächlich in einer Ausgleichung der Unebenheiten zu suchen, mit denen die Flächen der Steine immer mehr oder minder behaftet sind. Es ist klar, daß dieser Annahme zufolge in den Fugen eines Gewölbes nur rückwirkende Pressungen, aber keine Zugspannungen auftreten können.

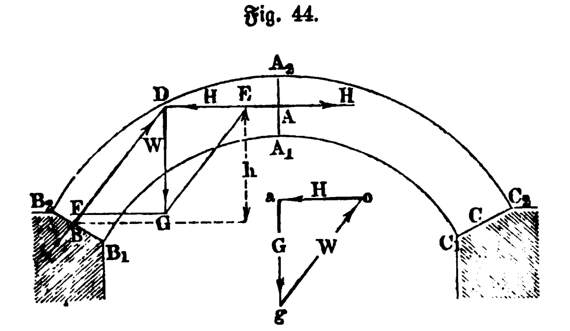
Was die Größe, d. h. die Spannweite der Gewölbe anbetrifft, so ist man hierin durch die entsprechende Widerstandsfähigkeit des Wölbsteinmaterials innerhalb gewisser Grenzen beschränkt. Die größten Spannweiten, welche man durch Gewölbe aus natürlichen Bausteinen hat überbrücken können, dürften wohl kaum mehr als etwa 60 m betragen*), während

*) Die Grosvenorbrücke über den Dee in England hat eine Spannweite von 195′ = 61 m.

Spannweiten von 40 bis 50 m bei Brückenbögen häufig vorkommen. Die Höhe der Gewölbe steigt bei Brücken und Wegeüberführungen zuweilen bis 80 m *) und darüber. Was die Länge der Gewölbe in der Axenrichtung anbetrifft, so ist dieselbe, den jeweiligen Umständen entsprechend, sehr verschieden. Während die Bögen über Fenster- und Thüröffnungen in Gebäuden nur eine Breite gleich der Dicke der zu tragenden Mauern haben, erstrecken sich die Gewölbe der Tunnel natürlich auf deren ganze oft viele Kilometer große Länge, wogegen die Breite der Brücken etwa zwischen 5 m und 20 m schwankt. Auf die Berechnung der Gewölbe ist, eine der ganzen Länge nach überall gleichmäßige Belastung vorausgesetzt, die Längenerstreckung ohne Einfluß, und es soll in den folgenden Untersuchungen immer ein Gewölbe vorausgesetzt werden, dessen Länge nach der Richtung der Axe 1 m beträgt. Ferner sollen zunächst die symmetrisch geformten und symmetrisch belasteten Tonnengewölbe besprochen und daran die Betrachtungen über die Verhältnisse abweichender Gewölbe angeschlossen werden.

Die Stützlinie. Es sei *ABC*, Fig. 44, der Durchschnitt durch ein horizontales symmetrisches Tonnengewölbe von der axialen Länge gleich 1 m, welches zunächst nur sein Eigengewicht 2 *G* zu tragen haben soll, und man denke sich dieses Gewölbe durch die Scheitelfuge $A_1 A_2$ in zwei gleiche Theile *AB* und *AC* zerlegt, welche sich gegen die festen Widerlagsflächen $B_1 B_2$ §. 17.

Fig. 44.



und $C_1 C_2$ stützen, im Uebrigen aber zunächst als starre Balken angesehen werden sollen. Setzt man die Widerlager als unverrückbar fest voraus, so können die beiden Gewölbhälften ihrem Bestreben, zu fallen, nicht folgen. Es müssen daher, um das Gleichgewicht herzustellen, in den Stützflächen $B_1 B_2$

*) Die Göltzschthalbrücke der sächsisch-bayrischen Eisenbahn hat in vier über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 250′ = 73 m, und der römische Aquäduct zu Nismes in Frankreich hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen 150′ = 49 m Höhe.

und $C_1 C_2$ gewisse Reactionen W der Widerlager auftreten, und ebenso müssen die beiden Gewölbhälften im Scheitel zwei gleiche und entgegengesetzte Reactionen H auf einander ausüben, welche sich gegenseitig aufheben. Aus der Symmetrie der ganzen Anordnung und Gewichtsvertheilung ergiebt sich, daß die letztgedachten Scheitelreactionen H nur horizontal gerichtet sein können, im Uebrigen kennt man weder die Angriffspunkte noch die Größe der Kräfte H und W, und von letzteren auch nicht die Richtung; höchstens läßt sich aus der symmetrischen Anordnung die Uebereinstimmung der Widerstände W zu beiden Seiten B und C schließen. Die Aufgabe, die Reactionen W und H zu bestimmen, ist sonach von vornherein gänzlich unbestimmt, da den Gleichgewichtsbedingungen in unendlich verschiedener Weise durch Kräfte H und W genügt werden kann. Macht man jedoch gewisse einschränkende Annahmen, sei es über die Größe und Richtung von W oder über die Größe von H, so wird die Aufgabe bestimmt, sobald man von diesen gedachten drei Elementen zwei festsetzt. Sei z. B. die Lage des Angriffspunktes in der Scheitelfuge in A und in der Kämpferfuge in B resp. C angenommen, so ergiebt sich aus dem bekannten Gewichte G der Gewölbhälfte, welches durch DG dargestellt sein mag, durch das Parallelogramm der Kräfte die Größe von $H = ED$ und in DF der Größe und Richtung nach der Druck gegen das Widerlager B. Um das Parallelogramm zu zeichnen, hat man nur den Schnittpunkt D zu suchen, in welchem die in A horizontale Scheitelreaction H die Schwerlinie DG der Gewölbhälfte schneidet, dann findet man in der Verbindungslinie dieses Punktes D mit dem Angriffspunkte B die Richtungslinie für die Reaction des Auflagers. Hierbei ist nur die eine Hälfte AB des Gewölbes in Betracht gezogen, indem die andere Hälfte AC beseitigt, und durch die von ihr ausgeübte Reaction H ersetzt gedacht worden ist. Für diese rechte Hälfte gelten natürlich die gleichen Betrachtungen wie für die linke.

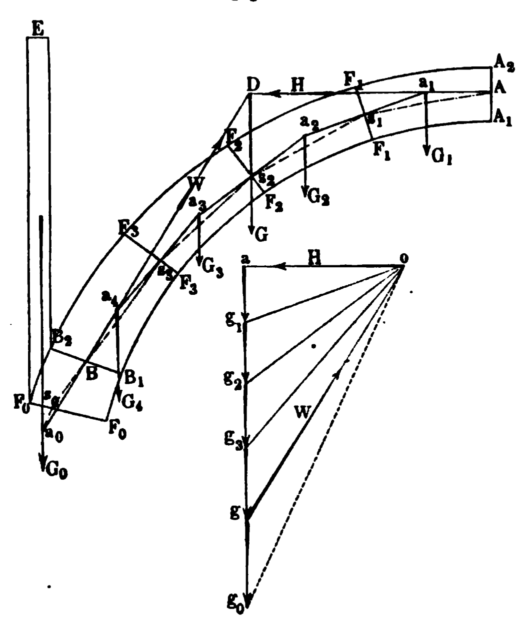
Man hat übrigens nicht nöthig, das Parallelogramm der Kräfte selbst zu zeichnen, sondern kann sich mit Vortheil des Kräftepolygons (s. Thl. I Anhang II) bedienen, indem man auf einer beliebigen Verticallinie die Strecke ag anträgt, welche nach einem passenden Kräftemaßstabe das Gewicht G der Gewölbhälfte darstellt. Zieht man durch a dann eine Horizontale und durch g eine Parallele mit der Reactionsrichtung BD, so erhält man in den Strecken oa und go die Größen von H und W nach dem zu Grunde gelegten Kräftemaßstabe.

In dieser Weise soll auch im Folgenden das Kräftepolygon den Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Aus der Figur erkennt man den Einfluß, welchen die Lage der Angriffspunkte auf die Größe der Reactionskräfte H und W ausübt. Es ist deutlich, daß die Horizontalkraft $oa = H$ um so kleiner ausfällt, je steiler die Linie go oder BD ist, d. h. je höher

man den Angriffspunkt A, und je tiefer man denjenigen B wählt, oder je größer der verticale Abstand h der beiden Angriffspunkte A und B ist und umgekehrt. Die kleinste Horizontalkraft H_{min} würde man daher in dem vorliegenden Falle vermöge der Annahme von B_1 und A_2 als Angriffspunkte erhalten, während den Punkten B_2 und A_1 die größte Horizontalkraft H_{max} entspricht.

Die hier für die Kämpferfuge angestellte Betrachtung gilt in vollständiger Allgemeinheit für jede beliebige Fuge, überhaupt für jeden beliebigen Querschnitt des Gewölbes, wie aus Fig. 45 leicht ersichtlich ist. Wenn hier durch AB wieder die Hälfte eines symmetrischen Tonnengewölbes mit dem

Fig. 45.



Gewichte G und den Angriffspunkten der Reactionen in A und B dargestellt ist, so findet man, unter ag das Gewicht G verstanden, durch das Kräftepolygon oag in der beschriebenen Weise den Horizontaldruck H in oa und die Widerlagsreaction $W = go$. Wenn nun F_1 eine beliebige Fuge vorstellt und G_1 das Gewicht des Gewölbstückes $F_1 A$ bedeutet, so kann man für dieses Stück die Fuge F_1 nunmehr als Widerlagsfuge betrachten, und es muß das Stück $F_1 A$ unter Einfluß der Horizontalkraft H, des Gewichtes G_1 und der von der Fuge F_1 ausgeübten Reaction W_1 im Gleichgewichte sein. Ueber den

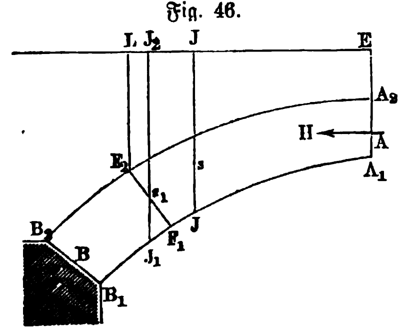
Angriffspunkt s_1 dieser letzteren Reaction ist jetzt kein Zweifel mehr, da die Kraft H auch ihrer Größe nach bestimmt ist. Man fände diesen Punkt s_1, wenn man an den Durchschnittspunkt a_1 zwischen H und G_1 das Kräfteparallelogramm zeichnete, dessen Seiten die bekannten Kräfte G_1 und H sind; die Diagonale gäbe dann die Druckkraft W_1 und in ihrem Durchschnitte s_1 mit der Fuge F_1 den gesuchten Angriffspunkt. Einfacher findet man s_1 durch Eintragen der Strecke $ag_1 = G_1$ in den Kräfteplan und die von a_1 mit og_1 parallele Gerade $a_1 s_1$. Es ist klar, daß man diese Construction für beliebig viele Fugenschnitte $F_2, F_3 \ldots$ wiederholen kann, wenn man nur in dem Kräftepolygon die Strecken $g_1 g_2, g_2 g_3, g_4 g$ gleich den Gewichten der einzelnen Gewölbtheile $F_1 F_2$, $F_2 F_3$ und $F_3 B$ macht und von den Durchschnitten a_2, a_3, a_4 Parallelen zu den bezw. Strahlen og_2, og_3, og_4 zieht. Auf diese Weise erhält man in den einzelnen Fugen die Angriffspunkte $s_2, s_3 \ldots$, deren letzter natürlich mit dem im Kämpfer angenommenen Angriffspunkte B zusammenfallen muß. Wenn man alle diese aufeinander folgenden Punkte A, s_1, s_2, s_3, B mit einander durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Polygon, welches bei Annahme von unendlich vielen, unendlich nahe neben einander liegenden Querschnitten in eine stetige Curve übergeht. Diese Curve ist, wie aus ihrer Herleitung ohne Weiteres hervorgeht, in allen Punkten übereinstimmend mit der im §. 11 schon angeführten Mittellinie des Druckes, und führt auch bei den Gewölben diesen Namen, oder den Namen Stützlinie, welcher im Folgenden gebraucht werden soll.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen muß hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß diese Stützlinie oder der geometrische Ort für die Angriffspunkte $s_1, s_2 ..$ der Reactionen im Allgemeinen keineswegs identisch ist mit derjenigen Curve, in welche bei unendlicher Annäherung der Fugenquerschnitte das Seilpolygon $a_1 a_2 a_3 a_4$ übergeht. Dieser letztere Linienzug ist ein Seilpolygon mit allen Eigenschaften eines solchen, und geht wie dieses bei unendlich kleiner Fugenentfernung in eine Kettenlinie über, während dem Polygon $As_1 s_2 s_3 B$ die Eigenschaften eines Seilpolygons nicht zukommen. Nur in demjenigen Falle, wo die Gewichte $G_1 G_2 \ldots$ der einzelnen Gewölbtheile stets zwischen den Angriffspunkten A und s_1; s_1 und s_2; s_2 und s_3 der zugehörigen Fugen hindurchgehen, fällt bei unendlicher Annäherung die aus $As_1 s_2 s_3 B$ hervorgehende Stützlinie mit der aus dem Seilpolygone $a_1 a_2 a_3 a_4$ sich ergebenden Kettenlinie zusammen, und nur in diesem Falle giebt die Stützlinie in ihrer Tangente an irgend welchen ihrer Punkte auch die Richtung des daselbst ausgeübten Druckes an. Daß die beiden Linien a und s in dem bemerkten Falle in eine einzige übergehen, zeigt auch die Figur, indem man daraus ersieht, wie z. B. die Höhe des Punktes a_2 über $s_1 s_2$ um so geringer wird, je näher die beiden Fugen F_1 und F_2 zusammenrücken, und bei unendlich kleiner Entfernung derselben ebenfalls unendlich klein wird. Daß dieses Verhalten aber nur unter der gemachten Voraussetzung stattfindet, derzufolge das Gewicht G_2 unter allen Umständen, auch bei der kleinsten Entfernung der Fugen F_1 und F_2, zwischen deren Angriffs-

punkte s_1 und s_2 fällt, erkennt man ebenfalls aus der Figur. Denkt man sich nämlich in dem verlängert vorausgesetzten Bogen ein Element, durch die Fugen $B_1 B_2$ und $F_0 F_0$ begrenzt, welches, wie dies bei Gewölben immer der Fall ist, auf seiner Rückfläche $F_0 B_2$ durch ein Erd- oder Mauerprisma $B_2 F_0 E$ belastet ist, so geht die Schwerlinie G_0 dieses Elementes seitlich an B vorüber, und man erhält den zugehörigen Schnittpunkt mit der vorhergehenden Seilpolygonseite $a_4 B$ in a_0. Macht man nun im Kräfteplan die Strecke $g g_0$ gleich dem Gewichte G_0 des betrachteten Elementes $B_2 F_0 E$, und zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt a_0 eine Parallele mit $o g_0$, so erhält man den Punkt der Stützlinie in der Fuge F_0 rückwärts in s_0, und zwar bleibt die Entfernung $a_0 s_0$ immer eine meßbare Größe, auch wenn $F_0 F_0$ unendlich nahe an $B_1 B_2$ heranrückt. Man erkennt hieraus, daß die beiden gedachten Curven, die Stützlinie s und die Kettenlinie a, nicht zusammenfallen können, und aus der durch Figur $B_1 F_0 E B_2$ dargestellten eigenthümlichen Belastungsart aller Gewölbe ergiebt sich leicht, daß die für das Zusammenfallen oben gestellte Bedingung streng genommen nur bei Gewölben erfüllt sein würde, deren Dicke unendlich klein wäre.

Diese Kettenlinie, in welche das Seilpolygon $a_1 a_2 a_3 a_4$ übergeht, hat, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Eigenschaft, daß die von irgend einem Punkte der Stützlinie wie s_3 an sie gezogene Tangente die Richtung des in diesem Punkte s_3 wirksamen Druckes angiebt. Mit Rücksicht hierauf wird sie wohl zuweilen als Drucklinie oder von Scheffler bezeichnender als Richtungslinie des Druckes benannt. Dieser Unterschied zwischen der Mittellinie des Druckes, welche hier Stützlinie genannt wird und der Richtungslinie des Druckes, welche eine Kettenlinie ist, wurde zuerst von Moseley*) hervorgehoben, während von verschiedenen Autoren ein solcher Unterschied nicht gemacht wird, vielmehr zuweilen die aus dem Seilpolygon $a_1 a_2 a_3$ sich ergebende Kettenlinie als Stützlinie bezeichnet wird. Hierzu mag die für die gewöhnlichen Verhältnisse der Gewölbe nur geringe Abweichung zwischen den beiden Curven und die Möglichkeit einer analytischen Behandlung der Kettenlinie die Veranlassung gewesen sein. Bei diesen analytischen Behandlungen denkt man in der Regel das Gewölbe nicht durch Fugenschnitte, sondern durch eine Anzahl verticaler Ebenen JJ, Fig. 46, in Lamellen zerlegt und die Curve bestimmt, welche die Durchschnittspunkte s der Mittelkräfte mit diesen Verticalen J enthält. Diese Curve ist allerdings eine Kettenlinie, da für sie die oben gestellte Bedingung erfüllt ist, derzufolge das Gewicht G_1 jedes Elementes zwischen den beiden, diesem Elemente zugehörigen Punkten s und s_1 hindurchgeht. Diese Linie ist aber, streng genommen, nicht die dem Fugenschnitte zukommende Mittellinie des Druckes, denn wenn man beispielsweise durch einen dieser Punkte wie s_1 die Fuge $F_1 F_2$ hindurchlegt, so würde man den dieser

Fig. 46.



*) Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, übersetzt von H. Scheffler.

Fuge zukommenden Punkt der Stützlinie durch Vereinigung der im Scheitel A wirkenden Horizontalkraft H mit dem Gewichte des Gewölbtheils $A_1 F_1 F_2 L E$ erhalten, während s_1 durch Zusammensetzung von H mit dem Gewichte des Stückes $A_1 J_1 J_2 E$ gefunden ist. In welcher Weise die analytische Behandlung des Gewölbes mit Hülfe einer solchen Zerlegung durch Verticalebenen geschehen kann, wird weiter unten gezeigt werden.

§ 18. **Eigenschaften der Stützlinie.** Da die Stützlinie für die Beurtheilung der Stabilität der Gewölbe von großer Bedeutung ist, so mögen zunächst die wichtigsten hier in Frage kommenden Eigenschaften derselben näher ins Auge gefaßt werden. Aus dem vorhergehenden Paragraphen ist es deutlich, wie man für irgend ein symmetrisches Gewölbe, dessen Belastungsverhältnisse gegeben sind, die Stützlinie jederzeit construiren kann, sobald die Horizontalkraft H Fig. 47 und deren Angriffspunkt A im Scheitel bekannt sind, oder sobald man außer dem Angriffspunkte A im Scheitel noch den Angriffspunkt in einer zweiten Fuge kennt, sei es in der Kämpferfuge B oder in irgend einer anderen. Denkt man sich zunächst in der schon oben angedeuteten Weise alle auf das Gewölbe wirkenden Belastungen durch Mauerkörper von gleichem specifischen Gewichte mit dem eigentlichen Gewölbmaterial dargestellt, und gleichmäßig über die ganze Länge (nach der Axe) des Gewölbes vertheilt, so erhält man im verticalen Querschnitte eine gewisse gerade oder krumme Linie EE als obere Profillinie der auf dem Gewölbe ruhenden Belastungsmasse, welche Linie schlechtweg Belastungslinie genannt wird. Indem man beliebig viele Fugen wie $F_1 F_1'$ und durch F_1' die Verticale $F_1' E_1$ zeichnet, kann man durch Rechnung oder Construction die Gewichte und Schwerpunkte der einzelnen Gewölbsteine einschließlich der auf sie entfallenden Belastungen bestimmen. So z. B. würde für den durch die Fugen F_1 und F_2 begrenzten Wölbstein das Gewicht eines Mauerprismas von 1 m Länge und der durch $F_1 F_1' E_1 E_2 F_2' F_2$ dargestellten Grundfläche als Belastung gefunden werden.

Fig. 47.

Hat man in solcher Weise das Gewölbe in beliebig viele Theile zerlegt, und deren Gewichte sowie ihre Schwerlinien bestimmt, so findet man für eine bestimmte Horizontalkraft H, welche in dem Punkte A der Scheitelfuge angreifen soll, die Stützlinie leicht mit Hülfe des Kräftepolygons, in welchem $oa = H$ gemacht und aq vertical und gleich dem Gesammtgewichte Q der Gewölbhälfte angetragen ist. Zieht man nämlich durch A horizontal bis zum Durchschnitte D mit der Belastung Q, so liefert die durch D parallel mit oq gezogene Gerade DB in B den Angriffspunkt B in der Kämpferfuge. In gleicher Weise erhält man den Angriffspunkt s_1 der Fuge F_1, wenn man im Kräftepolygon aq_1 gleich dem Gewichte Q_1 des Gewölbtheiles zwischen F_1 und dem Scheitel A macht und eine zu oq_1 parallele Gerade $D_1 s_1$ durch den Punkt D_1 zieht, in welchem das besagte Gewicht Q_1 von der Horizontalkraft H getroffen wird. Wenn nicht H, sondern dafür außer dem Scheitelangriffspunkte A noch ein zweiter Punkt, z. B. s_1 gegeben ist, so ergiebt sich die Construction ohne Weiteres, wenn man diesen zweiten Punkt s_1 mit dem Durchschnitte D_1 verbindet und mit dieser Verbindungslinie eine Parallele durch q_1 im Kräftepolygon zieht, welche auf der Horizontalen die Schubkraft $H = oa$ abschneidet.

Es geht aus Obigem hervor, daß für irgend welche Fuge die horizontale Componente der auf sie wirkenden Druckkraft W eine und dieselbe Größe mit der Kraft H hat, welche im Scheitel wirkt, und man spricht daher bei einem Gewölbe schlechtweg von der Horizontalkraft oder der Schubkraft desselben, welche nach dem Vorstehenden für alle Punkte eine constante Größe H hat.

Gesetzt, die Curve As_1B wäre die mit $H = oa$ gezeichnete Stützlinie, so erkennt man sogleich, daß bei Festhaltung desselben Angriffspunktes A, aber bei Aenderung der Größe des Schubes H, die sich ergebende Stützlinie eine andere wird, und zwar wird bei einem kleineren Werthe von H etwa gleich $o'a$ die neue Stützlinie AB' von A aus ganz unterhalb der vorherigen AB verbleiben, da alle im Kräfteplane von o' gezogenen Strahlen wie $o'q_1$, $o'q$... größere Neigungen gegen den Horizont haben, als die entsprechenden von o aus gezogenen Geraden oq_1, oq... Ebenso wird ein größerer Schub H, etwa gleich $o''a$, eine flachere Stützlinie AB'' liefern, welche von A aus ganz oberhalb der zuerst gezeichneten AB verbleibt. Würde man H bis ins Unendliche wachsen lassen, so würde man als Stützlinie die Horizontale AH bekommen, da gegen ein unendlich großes H die endlichen Werthe von Q verschwinden. Dagegen erhält man bei einer Abnahme der Schubkraft H bis zu Null eine Stützlinie, welche die Durchschnitte B_0, F_0... der Gewichte Q mit den zugehörigen Fugenverlängerungen in sich aufnimmt.

Hieraus geht hervor, daß es für irgend einen Punkt A der Scheitelfuge

als Angriffspunkt des Horizontalschubes eine unendlich große Anzahl von Stützlinien giebt, welche sich von einander durch die Größe der Schubkraft H unterscheiden, und von denen je zwei außer dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte A keinen zweiten Punkt mit einander gemein haben können.

Die letztere Behauptung erhellt ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß für jeden Punkt einer Stützlinie die Momentensumme aller derjenigen Kräfte gleich Null sein muß, die auf ein beliebiges Gewölbstück wirken, welches von der Fuge durch diesen Punkt seinen Ausgang nimmt. So hat man z. B. für den Punkt B die Momentengleichung $Qc = Hh$ oder $H = Q\frac{c}{h}$, wenn h die verticale Höhe von H über B und c den horizontalen Abstand des Gewichtes Q von B bedeutet. In derselben Weise gilt für den Punkt s_1 der Fuge F_1, wenn dessen Abstand von H durch h_1 und von Q_1 durch c_1 bezeichnet wird, auch

$$Q_1 c_1 = H h_1 \text{ oder } H = Q_1 \frac{c_1}{h_1}.$$

Sollten daher irgend zwei der oben erwähnten durch A gehenden Stützlinien mit den verschiedenen Schubkräften H_1 und H_2 sich noch in einem Punkte schneiden, dessen Tiefe unter A etwa h_0 sein möge, und für welchen das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel A gelegenen Gewölbtheiles durch $Q_0 c_0$ gegeben sein mag, so hätte man

$$Q_0 c_0 = H_1 h_0 = H_2 h_0, \text{ d. h. also } H_1 = H_2,$$

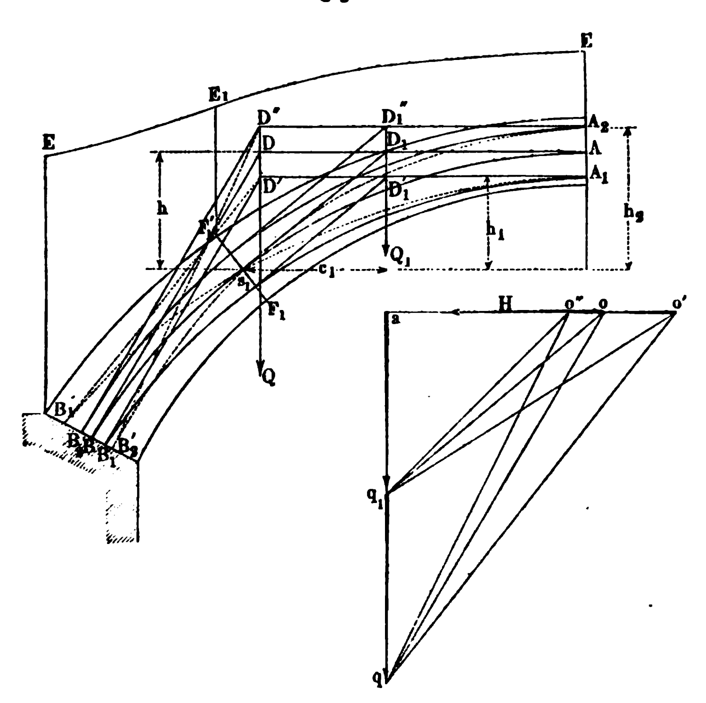
oder die beiden Stützlinien, welche außer dem Scheitelangriffspunkte A noch einen Punkt gemein haben, fallen in eine einzige zusammen.

Aus dem Vorstehenden folgt auch, daß von irgend zwei durch denselben Punkt A gehenden Stützlinien, wie AB und AB', diejenige dem größeren Horizontalschube entspricht, welche der durch diesen Punkt A geführten Horizontalen am nächsten liegt, d. h. welche zwischen dieser Horizontalen und der anderen Stützlinie liegt. Es wird sich aus dem Nachfolgenden ergeben, daß dieses Verhalten allgemein gilt, auch wenn der Durchschnittspunkt nicht gerade im Scheitel liegt.

Es sei wieder $A s_1 B$, Fig. 48, eine für den Horizontalschub $H = oa$ construirte Stützlinie der Gewölbhälfte ABE, und man denke sich nunmehr unter Beibehaltung der Größe des Horizontalschubes H, dessen Angriffspunkt in der Scheitelfuge von A etwa nach A_1 verlegt, so wird dadurch an dem Kräftepolygon oaq nichts geändert, und die von o ausgezogenen Strahlen wie oq, oq_1 ꝛc behalten sämmtlich ihre Richtung bei. Zeichnet man daher jetzt für denselben Horizontalschub $H = oa$ die durch A_1 gehende Stützlinie $A_1 B_1$, so ist es klar, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe unter-

halb der erstgezeichneten AB verbleiben muß, wenn A_1 *tiefer* als A angenommen wurde, während sie dagegen, wie A_2B_2 in allen Punkten *oberhalb*

Fig. 48.



AB gelegen ist, sobald der Scheitelangriff A_2 *höher* als A gelegt wird. Daß zwei mit gleicher Horizontalkraft H construirte von verschieden hoch gelegenen Punkten der Scheitelfuge ausgehende Stützlinien *nirgend einen Punkt mit einander gemein haben können*, folgt wie vorstehend schon daraus, daß für diesen Punkt die Momentengleichung bestehen muß

$$Qc = Hh_1 = Hh_2,$$

wenn h_1 und h_2 seine verticalen Abstände von den beiden Angriffspunkten im Scheitel bedeuten, und Qc das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheils ist. Obige Gleichung kann nur durch die Bedingung $h_1 = h_2$ erfüllt werden, woraus sich wieder ergiebt, daß *zwei Stützlinien von gleichem Horizontalschube H in eine einzige zusammenfallen, sobald sie einen Punkt mit einander gemein haben.*

Denkt man sich nun für die durch A_1 gehende Stützlinie $A_1 B_1$ den Schub H vergrößert, so wird dieselbe dadurch nach dem Vorstehenden eine flachere Lage annehmen, und man erhält bei einer gewissen Vergrößerung von H auf H_1 eine neue Stützlinie $A_1 B'_1$, welche die zuerst gezeichnete AB in einem Punkte s_1 durchschneidet. In gleicher Weise erkennt man, wie die in A_2 beginnende Stützlinie $A_2 B_2$ durch eine Verringerung der Schubkraft H sich von A_2 aus auf ihrem ganzen Verlaufe senkt, und somit ebenfalls zum Durchschnitt mit AB in irgend einem Punkte wie z. B. s_1 gebracht werden kann. Für einen solchen Durchschnittspunkt zweier Stützlinien, wie s_1 ergiebt sich nun leicht eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Bezeichnet man nämlich mit h, h_1 und h_2 die verticale Tiefe des Schnittpunktes s_1 unter den Angriffspunkten A und bezw. A_1 und A_2, und ist c_1 der horizontale Abstand des Schnittpunktes s_1 von der Schwerlinie des Gewölbstückes $A_1 F_1 F'_1 E_1 E$ zwischen dem Scheitel und der durch s_1 gelegten Fuge, so hat man, unter Q_1 dieses Gewicht verstanden, dem allgemeinen Character der Stützlinie zufolge für s_1 die Momentengleichung:

$$Q_1 c_1 = Hh = H_1 h_1 = H_2 h_2.$$

Wenn man daher von den unendlich vielen Stützlinien welche durch einen beliebigen Punkt wie s_1 hindurchgehen irgend zwei, z. B. As_1 und $A_1 s_1$ herausgreift, so haben deren im Scheitel angreifende Schubkräfte H und H_1 für den gemeinschaftlichen Punkt s_1 ein gleiches Moment. Denkt man sich die eine Schubkraft, etwa H_1 in A_1 in zwei horizontale Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine ihrer Größe und Lage nach mit H übereinstimmt, so muß also nach den bekannten Regeln für die Zusammensetzung paralleler Kräfte die zweite Componente welche durch $H_1 - H$ ausgedrückt ist, durch den gemeinsamen Punkt s_1 gehen. Die erforderliche Größe von H_1 findet man leicht, wenn man s_1 mit dem Durchschnitte D'_1 verbindet und durch q_1 im Kräfteplane eine Parallele $q_1 o'$ mit $s_1 D'_1$ zieht, wodurch man

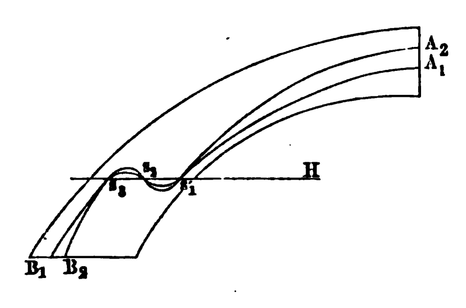
$$H_1 = o' a \text{ und } H_1 - H = o' o$$

erhält. Da dieselbe Betrachtung für irgend zwei durch s_1 gehende Stützlinien, also z. B. auch für As_1 und $A_2 s_1$ gilt, so muß auch die Schubkraft H_2 in A_2 sich zusammensetzen aus der Schubkraft H in A und einer durch s_1 gehenden Componente, welche in diesem Falle nach der entgegengesetzten Richtung von H wirkt, so daß H_2, wie schon bekannt, kleiner ausfällt als H. Zieht man mit $s_1 D''$ eine Parallele $q_1 o''$ durch q_1, so erhält man in $o'' a$ die Schubkraft H_2 und in $o'' o$ die entgegengesetzte Componente, welche mit H zusammen die Horizontalkraft H_2 ergiebt.

Aus dem Vorstehenden folgt ferner ohne Weiteres, daß, wenn zwei Stützlinien sich in mehr als einem Punkte durchschneiden sollten, dies nur in der Weise geschehen kann, daß sämmtliche Schnittpunkte auf einer

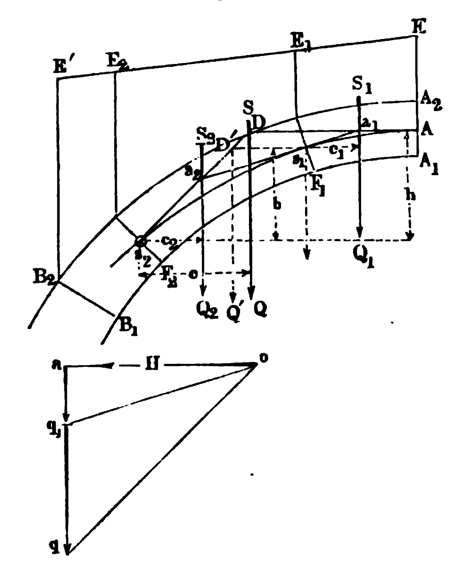
und derselben Horizontallinie liegen müssen, denn für jeden einzelnen Schnittpunkt gilt die oben gefundene Beziehung, wonach durch denselben jene durch die Differenz der beiden Schubkräfte dargestellte Componente hindurchgehen muß. Zwei Stützlinien von der Form AB und $A_1 B_1$ Fig. 49, wie sie unter dem Einflusse isolirter Belastungen (s. weiter unten), wohl möglich sind, können sich daher nur in Punkten s_1, s_2, s_3 schneiden, welche sämmtlich auf einer und derselben Horizontallinie Hs_3 liegen.

Fig. 49.



Zwei Punkte s_1 und s_2 dagegen, Fig. 50, welche nicht in gleicher Höhe liegen, können nicht zwei verschiedenen Stützlinien angehören, oder mit anderen Worten, durch zwei beliebige Punkte s_1 und s_2 ist die Stützlinie eines symmetrischen Gewölbes unzweideutig bestimmt, vorausgesetzt natürlich, daß die Art der Belastung d. h. die Belastungslinie E gegeben ist. Will

Fig. 50.



man in diesem Falle zur Ermittelung der Stützlinie die noch unbekannte Schubkraft H, sowie deren ebenfalls noch nicht bekannten Angriffspunkt A in der Scheitelfuge durch Rechnung bestimmen, so sei unter Q_1 das Gewicht des Gewölbstückes $F_1 E$ und unter c_1 dessen horizontaler Abstand von s_1, ebenso unter Q das Gewicht von $F_2 E$ und unter c dessen Abstand von s_2 verstanden. Ferner sei b der verticale Höhenunterschied der gegebenen Punkte s_1 und s_2 und h die noch unbekannte Höhe des Scheitelangriffes A über s_2. Dann hat man für diese Punkte die Momentengleichungen:

$$H(h - b) = Q_1 c_1$$

und

$$Hh = Qc,$$

woraus

$$H = \frac{Qc - Q_1 c_1}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und

$$h = \frac{Qbc}{Qc - Q_1 c_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

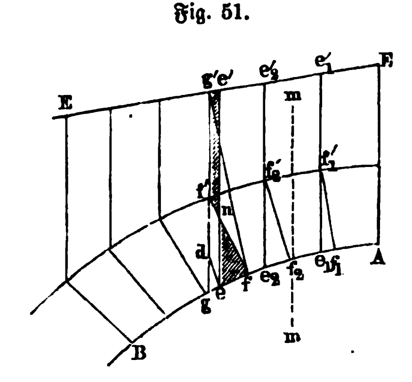
folgt. Diese Formeln können dazu dienen, die Elemente H und h für die Bestimmung der Stützlinie durch Rechnung zu bestimmen. Es läßt sich aber auch durch Construction die Aufgabe leicht lösen: durch zwei gegebene Punkte eines symmetrischen Gewölbes die Stützlinie zu zeichnen. Da diese Aufgabe bei der Prüfung der Gewölbe öfter vorkommt, so mag ihre Lösung hier noch angeführt werden.

Die in dem einen der gegebenen Punkte s_1 wirkende Mittelkraft W_1 setzt sich zusammen aus dem noch unbekannten Horizontalschube H und dem bekannten Gewichte Q_1 des zwischen s_1 und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheiles $F_1 E$. Denkt man daher diese in s_1 wirkende Mittelkraft W_1 in diese beiden Componenten zerlegt, so steht der zwischen s_1 und s_2 enthaltene Gewölbtheil $F_2 s_2 E_2 E_1 s_1 F_1$ im Gleichgewichte unter dem Einflusse seines Eigengewichtes Q_2 im Schwerpunkte S_2, der Kräfte H und Q_1 in s_1 und des unbekannten Stützwiderstandes W_2 in s_2. Bestimmt man daher in Q' die verticale Mittelkraft der beiden in S_2 und s_1 wirkenden Belastungen Q_2 und Q_1, so hat man nur durch s_1 eine Horizontale zu legen, deren Durchschnitt D' mit Q' die Richtung $s_2 D'$ für den Stützwiderstand in s_2 angiebt. Zieht man daher im Kräftepolygon, in welchem $a q_1 = Q_1$ und $q_1 q = Q_2$ also $a q = Q$ ist, durch q eine Parallele $q o$ mit $s_2 D'$, so erhält man in oa die Horizontalkraft H, deren Angriffspunkt A in der Scheitelfuge sich ergiebt, wenn man das Seil $s_2 D'$ bis zum Durchschnitte D mit dem im Schwerpunkte S des ganzen Gewölbes $F_2 E_2 E$ wirkenden Gewichte Q verlängert, und durch D eine Horizontale DA zieht. Der Durchschnitt a_1 dieser letztgedachten Horizontalen mit dem Gewichte Q_1 muß übrigens bei

genauer Construction, wie leicht zu erkennen ist, mit dem Stützpunkte s_1 und dem Durchschnittspunkte a_2 zwischen dem Gewichte Q_2 und dem Seile $s_2 D$ auf einer und derselben Geraden liegen, welche mit oq_1 im Kräfteplane parallel ist. Zur Bestimmung der Schwerlinie SQ, sowie der Mittelkraft Q' kann man sich am Besten des Kräfteplans bedienen, indem man unter Annahme einer ganz beliebigen Horizontalkraft ein Seilpolygon construirt, dessen Endseile in bekannter Weise in ihrem Durchschnitte einen Punkt ergeben, durch welchen die gesuchte Resultirende der betreffenden Schwerkräfte hindurchgeht.

Um die Gewichte und Schwerpunkte der durch die Fugenschnitte $f_1 f_2 \ldots$, Fig. 51, gebildeten Theile des Gewölbes und ihrer Belastung wie $f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$ zu ermitteln, kann man zwar nach den bekannten Regeln die Verwandlung dieser Querschnitte in Rechtecke von einer gemeinschaftlichen Basis b, (s. §. 15) vornehmen, doch wird man schneller und in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele kommen, wenn man durch die äußeren Fugenkanten $f_1' f_2' \ldots$ verticale Ebenen $e_1, e_2 \ldots$ gelegt denkt und für die gedachte Querschnittsfigur

Fig. 51.



$f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$ den als Trapez anzusehenden Querschnitt $e_1 e_1' e_2' e_2$ einführt, dessen Schwerlinie in seiner Mittellinie mm vorausgesetzt werden kann. Bei flachen Gewölben und hohen Belastungen wird der hierdurch begangene Fehler nur klein sein und insbesondere für die nahe dem Scheitel gelegenen Fugen gering ausfallen. Will man jedoch für stärker geneigte Fugen, wie z. B. ff' eine größere Genauigkeit erzielen, so kann man durch eine Correctur, (Fugencorrectur), anstatt der durch f' geführten Verticalebene $f'g'$ eine andere verticale Theilungsebene ee' von solcher Lage einführen, daß die beiden schraffirten Figuren enf und $nf'g'e'$ gleichen Flächeninhalt haben. Um ee' zu ermitteln, kann man noch durch die Mitte d von $f'g$ eine Parallele de zu $g'f$ legen, um in e den Punkt zu erhalten, durch welchen die corrigirte Theilebene ee' geführt werden muß. Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich leicht mit Rücksicht darauf, daß wegen der gezogenen Parallelen

$$g'g : gf = dg : ge = dg \sin\gamma : ge \sin\gamma$$

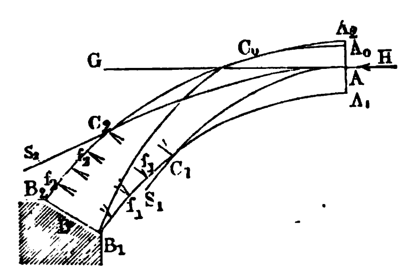
ist, wenn γ den Winkel bei g bedeutet; also ist auch

$$g'g \,.\, ge \sin\gamma = gf \sin\gamma \, \frac{1}{2} f'g,$$

d. h. das Dreieck $f'gf$ ist annähernd gleich dem Trapez $g'gee'$, folglich sind auch nach Abzug von $gf'ne$ die schraffirten Flächenstücke annähernd gleich groß.

§. 19. **Mögliche Stützlinien.** Von den unendlich vielen Stützlinien, welche sich nach dem Vorhergehenden für ein Gewölbe zeichnen lassen, indem man der Schubkraft H alle möglichen Größen von 0 bis ∞ ertheilt denkt und ihren Angriff A im Scheitel beliebig annimmt, werden nur gewisse Stützlinien mit der Stabilität und Widerstandsfähigkeit des Gewölbes verträglich sein. Zunächst ist es klar, daß eine Stützlinie, welche einem Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen soll, in ihrem ganzen Verlaufe zwischen dem Scheitel und den Kämpferfugen gänzlich im Innern der Gewölbedicke verbleiben muß, denn sobald die Stützlinie irgendwo die innere oder äußere Leibung durchschnitte, würde dadurch bedingt sein, daß eine Bewegung einzelner Gewölbtheile um die betreffende Schnittlinie stattfinden müßte. Würde z. B. für ein Gewölbe AB, Fig. 52, eine in A beginnende Stützlinie AS_1 die innere Leibung bei C_1 schneiden, so müßte das zwischen C_1 und A befindliche Gewölbstück nicht nur um die Kante C_1 eine Rechtsdrehung annehmen und herabfallen, sondern es würden auch alle zwischen C_1 und dem Widerlager B befindlichen Gewölbtheile herabstürzen, indem die inneren Kanten f_1 der Fugen als Drehkanten anzusehen wären, diese Fugen sich daher außen öffneten. Wollte man, um dieses Herabstürzen zu verhindern, der Horizontalkraft H einen größeren Werth geben, so würde nach dem Vorhergehenden dadurch die Stützlinie der Horizontallinie genähert, also gehoben und sie würde, wenn sie etwa nach AB fiele, einem möglichen Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen können. Daß die gedachte Vergrößerung von H und die damit verbundene Erhebung der Stützlinie gewisse Grenzen nicht überschreiten darf, lehrt gleichfalls die Zeichnung, denn wenn die Stützlinie in Folge vergrößerter Horizontalkraft H etwa wie AS_2 in C_2 die äußere Leibung schnitte, so würde die Hori-

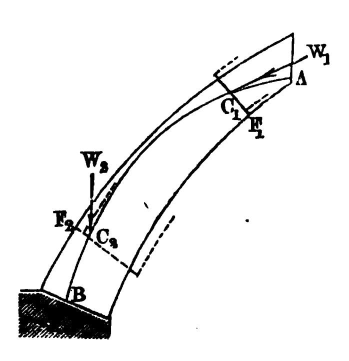
Fig. 52.



zontalkraft H nicht nur das Gewölbstück $C_2 A$ um die Kante C_2 linksum drehen, sondern auch sämmtliche Wölbsteine zwischen C_2 und B um ihre äußeren Fugenkanten f_2 überkanten, die Fugen würden sich in diesem Falle nach innen öffnen. In beiden Fällen würde also das Gewölbe zusammenstürzen, und mit Rücksicht auf die Stabilität des Gewölbes in Bezug auf Kippen oder Kanten gilt daher für die Stützlinie die Bedingung, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Gewölbequerschnittes verbleiben muß. Höchstens darf daher mit Rücksicht auf diese Bedingung die Stützlinie durch einen der Punkte A_1 und A_2 der Scheitelfuge sowie B_1 und B_2 der Widerlagsfuge gehen, und wenn sie sonst wie z. B. $A_0\, C_0\, B_0$ einen Punkt mit der äußeren oder inneren Wölbfläche gemein haben sollte, so darf die letztere daselbst von der Stützlinie nur berührt, nicht geschnitten werden.

Da nun aber die Standfähigkeit eines Gewölbes, ähnlich wie die einer Futtermauer ebensowohl durch Gleiten wie durch Kippen gefährdet werden kann, so tritt zu der vorerwähnten ersten Bedingung noch eine zweite, wonach die Druckrichtung in keinem Punkte der Stützlinie von der Normallinie zur Fugenfläche dieses Punktes um einen größeren Winkel abweichen darf, als der Reibungswinkel des Gewölbmaterials angiebt. Würde z. B. in dem Punkte C_1 oder C_2 einer Stützlinie AB, Fig. 53, die Richtung der Stützkraft W_1 oder W_2 mit den Fugenflächen F_1 und F_2 Winkel bilden, welche kleiner als $90^0 - \varrho$ wären, unter ϱ den gedachten Reibungswinkel verstanden, so würde das Gewölbstück $C_1 A$ auf der Fugenfläche F_1 nach außen und der Gewölbtheil $C_2 A$ auf der Fuge F_2 nach innen gleiten, wie in der Figur durch Punktirung angedeutet ist. Das Gewölbe müßte daher in diesem Falle durch Gleiten einstürzen, welchem sich dann auch ein Drehen beigesellen würde. Die Richtungen der Stützkräfte W_1 und W_2 fallen nach dem im Vorhergehenden Gesagten nicht genau mit der Tangente an die Stützlinie zusammen, sondern werden durch die von C_1 bezw. C_2 aus an die Drucklinie gezogenen Tangenten angegeben. Bei der geringen Abweichung, welche indessen bei den gewöhnlichen Gewölben zwischen der Stützlinie und Drucklinie besteht, wird man in den meisten Fällen die Stützkraft annähernd in der Richtung der Stützlinie wirkend annehmen

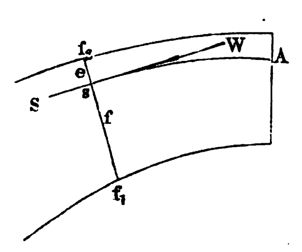
Fig. 53.



dürfen. Bei dem meist bedeutenden Reibungscoefficienten, welcher für die Gewölbsteine gilt, und wegen der mehr oder minder großen Adhärenz des Mörtels, welcher die einzelnen Steine verbindet, wird ein Gewölbebruch durch Gleiten in der Regel nicht zu besorgen sein. Auch kann man einem Gleiten, sollte dasselbe dennoch befürchtet werden, durch einen geeigneten Fugenschnitt wirksam begegnen, wie bereits gelegentlich des Gleitens der Futtermauern in §. 13 angeführt worden ist.

Wenn nun in einem Gewölbe sich eine Stützlinie angeben läßt, welche den vorgedachten beiden Bedingungen entspricht, so würde zwar für das Gewölbe den Erfordernissen der Stabilität Genüge gethan sein, aber offenbar nur dann, wenn die Widerstandsfähigkeit des Gewölbsteinmaterials eine unbeschränkte wäre. Denn wenn die Stützlinie durch irgend welchen Punkt der inneren oder äußeren Wölbfläche hindurchginge, so müßte an dieser Stelle der betreffende Stein den ganzen Stützdruck in seiner Kante, d. h. also in einer Fläche von unendlich geringer Breite aufnehmen, d. h. die specifische Pressung würde daselbst unendlich groß werden. Da nun auch die festesten Bausteine nur eine begrenzte Widerstandsfähigkeit besitzen, und, wie alle festen Körper unter Einfluß von Pressungen zusammengedrückt werden, so muß man annehmen, daß derjenige Punkt, in welchem der resultirende Druck W eine Fuge trifft, nicht allein diesem Drucke widersteht, sondern daß auch die ihn benachbarten Fugenelemente gewissen Pressungen ausgesetzt sind. Diese Pressungen hat man dann in solcher Weise über die gedrückte Fläche vertheilt anzunehmen, daß der besagte Durchschnittspunkt der Stützlinie der Mittelpunkt aller parallelen Elementarpressungen ist. Sei z. B. s, Fig. 54, der Durchschnitt, in welchem die Stützlinie AS die Fuge $f_1 f_2$ eines Gewölbes trifft, und setzt man wie bei den Futtermauern, (§. 14) voraus, daß die in s wirkende Druckkraft W in einem gewissen Flächenstücke von der Erstreckung f_2 bis f Pressungen erzeuge, welche in f gleich Null und in irgend welchem anderen Punkte dem Abstande desselben von f proportional, also in der Kante f_2 am größten sind, so hat man s als den Schwerpunkt eines Dreiecks von der Basis ff_2, also

Fig. 54.



$f_2 s = \frac{1}{3} ff_2$ anzunehmen. Diese Erstreckung ff_2 der gepreßten Fläche hängt, außer von dem Drucke W, von der Widerstandsfähigkeit oder Preßbarkeit des Gewölbematerials ab, und bestimmt sich, unter p die äußerste noch zulässige Pressung in f_2 verstanden, bekanntlich durch die Beziehung:

$$W = \frac{1}{2} p . f f_2,$$

woraus

$$f f_2 = 2 \frac{W}{p}$$

und

$$f_2 s = e = \frac{2}{3} \frac{W}{p}$$

folgt.

Wenn man daher, den vorstehenden Betrachtungen gemäß, für jede Fuge, wie $f_1 f_2$ eines Gewölbes, Fig. 55, aus der höchstens zulässigen Pressung p des Materials und aus dem Stützdrucke W, der sich nach Obigem als Resultirende der Schubkraft H und des Gewichtes G_1 vom Gewölbestück $f_1 f_2 A$ ergiebt, den Abstand

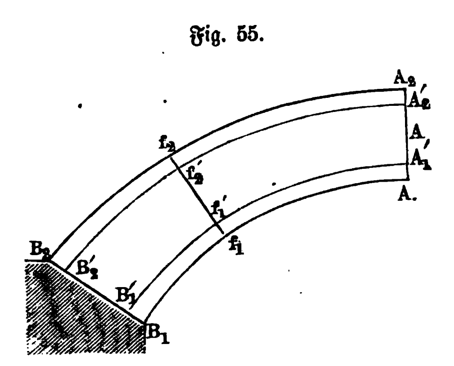


Fig. 55.

$$e = \frac{2}{3} \frac{W}{p}$$

bestimmt, und diesen Abstand von der inneren und äußeren Kante

$$e = f_1 f_1' = f_2 f_2'$$

anträgt, so erhält man dadurch zwei ideale Flächen bezw. Durchschnittslinien $A_1' f_1' B_1'$ und $A_2' f_2' B_2'$, welche im Innern des Gewölbes einen gewissen Raum, den sogenannten Kern begrenzen, innerhalb dessen die Stützlinie enthalten sein muß, wenn sowohl die Bedingung der Stabilität gegen Kanten erfüllt, als auch die gehörige Rücksicht auf die Festigkeit des Materials genommen werden soll. Es ist natürlich, daß hinsichtlich des Gleitens die früher angeführte Bedingung bestehen bleibt, wonach die Druckrichtung mit keiner Fuge einen Winkel, kleiner als $90^0 - \varrho$, bilden darf.

Was die Größe des hier mit e bezeichneten Abstandes betrifft, in welchem die Begrenzung des Kerns von den Wölbflächen anzunehmen ist, so sind die Angaben hierüber ziemlich verschieden. Meistens nimmt man für e einen gewissen Bruchtheil der nach der Fugenrichtung $f_1 f_2$ gemessenen Gewölbdicke d an, was der Annahme entsprechend ist, daß diese Gewölbstärke in den einzelnen Fugen dem auf diese übertragenen Drucke W proportional gemacht sei. Dieser Abstand e wird von Vielen zu $\frac{1}{3} d$ ange-

nommen, so daß also für den Kern ebenfalls die Breite $\frac{1}{3}\, d$ verbleibt, während von Anderen, z. B. von Scheffler angegeben wird, daß bei Kalk- und Sandsteinen der Kern sich den Leibungen viel mehr nähern könne, und daß nur bei weichem Materiale, wie Ziegelmauerwerk für den Abstand e etwa $^1/_4\, d$ zu setzen sei. Nimmt man den Abstand $e = \frac{1}{3}\, d$, so würde nach dem im vorigen Capitel über Futtermauern Gesagten, in einer Fuge, in welcher die Stützlinie die Grenze des Kerns erreicht, die ganze Fugenfläche gepreßt werden, und zwar würde die Spannung an der inneren oder äußeren Kante gerade Null sein, je nachdem die Stützlinie die äußere oder die innere Schale des Kernes trifft. Bei einem geringeren Abstande, also für $e < \frac{1}{3} d$ dagegen wird ein Oeffnen der Fuge an der einen Kante eintreten, wenn man auf eine Zugspannung des Mörtels an dieser Stelle nicht rechnen darf. Ein solches Oeffnen oder Klaffen der Fugen zeigt sich in der That öfter nach dem Ausrüsten der Gewölbe und wurde bei berühmten Brücken beobachtet, wie z. B. nach Navier's Angabe bei der bekannten Brücke von Neuilly, deren Korbbögen vor der Herstellung der Hintermauerung innen im Scheitel und außen etwa in der Mitte der Schenkel ein Oeffnen der Fugen zeigten.

Wenn die Stützlinie einen Fugenschnitt in der Mitte zwischen der inneren und äußeren Wölbung trifft, so vertheilt sich der Stützdruck W daselbst gleichförmig über die ganze Fugenfläche, wodurch natürlich die Maximalspannung in diesem Querschnitte den möglich kleinsten Werth annimmt. Man hat sich daher vielfach bemüht, Gewölbe so zu construiren, daß ihre Mittellinie eine Stützlinie ist, unter welcher Bedingung natürlich die Gewölbeform und Belastungslinie nicht mehr beliebig, sondern in bestimmter, unten näher zu besprechender Art von einander abhängig sind. Diese Construction, auf welche später noch specieller eingegangen werden soll, liefert nach dem vorstehend Bemerkten Gewölbe von verhältnißmäßig großer Stabilität, da unter Zugrundelegung der Mittellinie als Stützlinie die specifischen Pressungen den relativ kleinsten Werth annehmen. Daher pflegen denn auch die bedeutendsten Brückenconstructeure diese Methode vielfach anzuwenden. Es würde jedoch unberechtigt sein, wenn man daraus, daß die Mittellinie des Gewölbes eine von den vielen möglichen Stützlinien ist, die sich in dasselbe einzeichnen lassen, schließen wollte, daß diese Mittellinie nun auch die wirkliche Stützlinie sei, welche bei der gewöhnlichen Belastung des Gewölbes für die Druckübertragung maßgebend ist. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein, wie sich aus dem folgenden Paragraphen ergeben wird, welcher sich mit der wirklichen Stützlinie

beschäftigen soll, d. h. derjenigen, für deren Auftreten unter den vielen möglichen Stützlinien die größte Wahrscheinlichkeit besteht.

Die wirkliche Stützlinie. Aus den vorhergehenden Betrachtungen haben sich die Bedingungen ergeben, denen die Stützlinie eines Gewölbes genügen muß, welche dem Zustande des Gleichgewichtes entspricht. Wenn eine diese Bedingungen erfüllende Stützlinie sich nicht zeichnen läßt, so ist es sicher, daß das betreffende Gewölbe nicht stabil sein kann und einstürzen muß. Wenn sich dagegen eine Stützlinie der verlangten Art angeben läßt, so liegt kein Grund vor, ein Einstürzen des Gewölbes zu befürchten, denn zum Gleichgewichte ist es nur erforderlich, daß der dieser Stützlinie zukommende Horizontalschub H von den Widerlagern ausgeübt werde, was immer möglich ist, wenn diese Widerlager selbst hinreichend fest sind, worüber in einem folgenden Paragraphen eine nähere Untersuchung angestellt werden soll. Es würde demzufolge das Gewölbe auch noch stabil sein, wenn nur eine einzige Stützlinie von den verlangten Eigenschaften sich angeben ließe, doch würde dieser Zustand ein Grenzzustand sein, welchen aufzuheben die geringste Aenderung der Stützlinie im Stande wäre, wie sie etwa durch zufällige Aenderung der Belastung, insbesondere durch eine unsymmetrische Vertheilung derselben sich einstellt. Bei stabilen Gewölben wird dieser Fall einer einzigen nur möglichen Stützlinie nicht vorkommen, man wird bei ihnen vielmehr eine große, ja unendlich große Anzahl von Stützlinien innerhalb des Kerns einzeichnen können, welche sich nach §. 18 entweder durch die Höhenlage des Scheitelangriffes A, oder durch die Größe des Horizontalschubes H, oder nach beiden Hinsichten von einander unterscheiden. Es ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Stützlinien dem Gleichgewichtszustande entspricht, denn für jede ist die zugehörige Horizontalkraft H im Stande, das Kanten oder Gleiten unbeschadet der Festigkeit des Materials zu verhüten. Die Frage, welche von diesen unendlich vielen möglichen Stützlinien in Wirklichkeit dem belasteten Gewölbe zukommt, ist demnach eine unbestimmte, welche mit Sicherheit zu bestimmen, man nur würde hoffen können, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe gehörig berücksichtigt werden könnten, in ähnlicher Art etwa, wie man über die Auflagerdrucke und Anspannungen eines auf drei oder mehr Stützen ruhenden continuirlichen Balkens nur durch Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse Aufschluß erlangen kann. Einer derartigen auf die Elasticitätslehre begründeten Lösung der Frage ist man zwar in der neuesten Zeit durch die vortrefflichen Arbeiten von Winkler, Steiner *), Culmann, Föppel **)

*) Förster'sche Bauztg. 1874 und 1878.

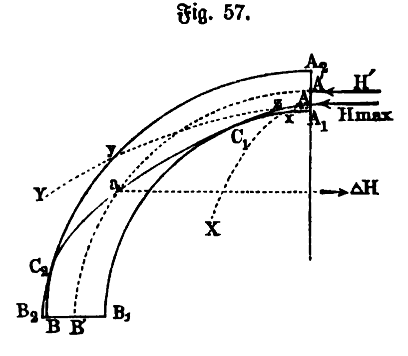
**) Theorie der Gewölbe von A. Föppel. Leipzig 1880.

und Anderen näher getreten, doch muß man zur Zeit auf eine Anwendung dieser Theorie wegen der ungenügenden Kenntniß der Preßbarkeit des Materials und wegen der Schwierigkeiten der Rechnung verzichten, und man hat sich damit zu begnügen, gewisse Grenzen festzusetzen, innerhalb deren die wirkliche Stützlinie jedenfalls nur liegen kann, und höchstens zu ermitteln, welche Stützlinie in bestimmtem Falle die wahrscheinlichste sein wird.

Zunächst ist es ersichtlich, daß unter den vielen, durch die Größe des Horizontalschubes H unterschiedenen Stützlinien, welche sich im Innern eines stabilen Gewölbes angeben lassen, eine vorhanden ist, welcher der kleinste Werth von H zukommt, während einer anderen das Maximum von H entspricht. Diese beiden Stützlinien vom kleinsten und bezw. größten Schube sind, wie sich durch einfache Betrachtungen ergiebt, dadurch charakterisirt, daß sie mit jeder der beiden Wölbflächen je einen Punkt gemein haben müssen, wobei es gleichgültig ist, ob dieser gemeinsame Punkt in der Scheitel- oder Kämpferfuge, also in $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ liegt, oder ein Berührungspunkt zwischen dem Scheitel A und dem Widerlager B ist. In Fig. 56 und 57 sind zwei solche Stützlinien durch $A\,C_1\,C_2\,B$ dargestellt, und man erkennt leicht, daß die Stützlinie in Fig. 56, bei welcher in der Richtung vom Scheitel A aus nach dem Widerlager B hin zuerst die äußere und dann die innere Wölbung getroffen wird, einem Minimum der Schubkraft entspricht, während die Stützlinie, Fig. 57, dem Maximum von H zukommt, sobald vom Scheitel aus zuerst die innere, und dann die äußere Wölbung von der Stützlinie berührt wird. Um dies zu beweisen, kann man zunächst bemerken, daß in Fig. 56 überhaupt keine ganz in das Gewölbe fallende Stützlinie möglich sein kann, deren Scheitelangriff höher als A, also zwischen A und A_2 gelegen ist. Denn würde hierfür die Horizontalkraft ebenso groß, oder größer sein als diejenige für $A\,C_1\,C_2\,B$, so müßte nach dem Früheren diese Stützlinie irgendwo

Fig. 56.

Fig. 57.



zwischen A_2 und C_1 etwa bei x durch die äußere Wölbung heraustreten, wie die punktirte Linie X zeigt. Man könnte zwar durch einen geringeren Werth von H in diesem Falle die Stützlinie soweit senken, daß sie nicht aus der äußeren Wölbfläche $A_1 C_1$ heraustritt, vielmehr die Stützlinie AB zwischen A und C_1 in einem Punkte, etwa in z schneidet, dann würde aber diese Linie zY, da sie nur diesen einen Punkt z mit AB gemeinsam haben kann, auf ihrem weiteren Verlaufe irgendwo bei y die innere Wölbfläche durchschneiden. Daraus folgt, daß überhaupt oberhalb von A der Angriffspunkt einer möglichen Stützfläche nicht liegen kann. Dagegen kann man unterhalb A, etwa in A' eine Stützlinie beginnen lassen, welche die Stützlinie AB in einem beliebigen Punkte wie a schneidet, sobald man den Horizontaldruck H' dieser Linie um eine durch a gehende Componente ΔH größer annimmt, als der Schub H der Linie AB ist, und diese Linie $A'aB'$ wird, vorausgesetzt, daß die Vergrößerung ΔH der Schubkraft gewisse Grenzen nicht überschreitet, auch zwischen a und dem Widerlager B ganz innerhalb des Gewölbes verbleiben können. Hieraus geht hervor, daß sich außer der Stützlinie AB, deren Schub H ist, nur solche andere Stützlinien in dem Gewölbe angeben lassen, deren Horizontalschub H' größer ist als H, d. h. die Linie AB in Fig. 56 entspricht dem kleinsten Schube H_{min}.

In ähnlicher Weise findet sich, daß in Fig. 57 keine Stützlinie möglich ist, deren Angriffspunkt zwischen A und A_1 gelegen ist, da dieselbe entweder wie die Linie X die innere Wölbfläche bei x durchsetzt, wenn ihre Schubkraft ebenso groß oder kleiner als die von AB angenommen wird, oder wie die Linie Y durch die äußere Leibung bei y hindurchgeht, wenn bei einer größeren Schubkraft ein Durchschneiden der Stützlinie AB in z stattfindet. Daher sind hier nur Stützlinien wie $A'B'$ möglich von denen jede einer Schubkraft H' angehört, die aus H in A und der entgegengesetzt gerichteten Componente ΔH in a sich zusammensetzt, also kleiner ist als H.

Die Linie AB in Fig. 57 ist daher die Stützlinie des größten Schubes H_{max}. Wie schon erwähnt, kann in beiden Fällen der Punkt C_1 auch mit A_2 oder A_1, und der Punkt C_2 mit B_1 oder B_2 zusammentreffen, in welchem letzteren Falle die Stützlinie auch die Wölbflächen in B_1 oder B_2 schneiden kann, anstatt sie zu berühren.

Aus dem Vorhergehenden folgt sogleich, daß, wenn in einem Gewölbe eine Stützlinie sich zeichnen läßt, welche wie $A C_1 C_2 B_2$, Fig. 58, mit einer der Wölbflächen etwa der äußeren $A_2 B_2$ zwei Punkte C_1 und B_2 gemein hat, und die andere Leibung in einem zwischenliegenden Punkte C_2 berührt, also das Gewölbe zweimal durchkreuzt, diese Linie, da sie zugleich dem größten wie dem kleinsten Schube entspricht, offenbar die einzige überhaupt mögliche Stützlinie für das Gewölbe ist. Das Gewölbe würde in diesem Falle im Grenzzustande sich befinden, und man hätte, ganz abgesehen

von der Widerstandsfähigkeit des Materials, die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern, wenn man eine gewisse Stabilität erlangen wollte.

Fig. 58.

Wie nun bereits oben bemerkt worden, ist von vornherein nicht anzugeben, welche von den unendlich vielen Stützlinien, die zwischen den beiden Grenzlinien des kleinsten und größten Druckes angegeben werden können, die wirkliche ist. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, hat man wohl verschiedene Hypothesen gemacht, und es ist in dieser Beziehung von Moseley *) ein Gesetz ausgesprochen, welches unter dem Namen des Princips vom kleinsten Widerstande bekannt geworden ist. Nach diesem Principe, dessen Beweis an der unten angezeigten Stelle sowie in dem schon oben erwähnten Werke von Scheffler **) nachgesehen werden kann, hätte man bei einem Gewölbe, wenn dasselbe aus einem vollkommen starren und nicht zusammendrückbaren Material bestehen würde, als wirkliche Stützlinie diejenige vom kleinsten Horizontalschube anzusehen.

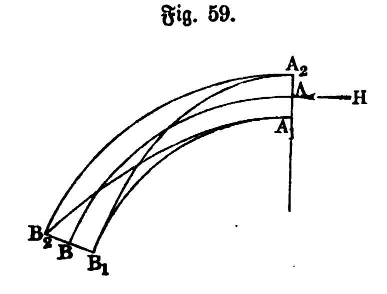
Anmerkung. Das erwähnte Princip des kleinsten Widerstandes, wie es von Scheffler definirt wird, läßt sich in der Hauptsache etwa folgendermaßen aussprechen. Denkt man sich ein System fester Körper, die nur durch Berührung ihrer Oberflächen mit einander in Verbindung stehen, unter Einfluß äußerer Kräfte sich gegen einzelne feste, widerstehende Punkte stützend, und zerlegt man die Resultirende Q aller äußeren Kräfte in lauter parallele Componenten q, die durch jene widerstehenden Punkte gehen, so müssen, wenn jene Punkte nicht fähig sind, in der Richtung dieser Componenten zu widerstehen, noch gewisse zu Q senkrechte Seitenkräfte p in jenen Punkten rege werden, welche unter sich für das ganze System im Gleichgewichte sind, und von denen jede einzelne zusammen mit der in diesem Punkte wirkenden Componente q eine Mittelkraft w von der Art giebt, daß sie von dem festen Stützpunkte aufgenommen werden kann. Von den unendlich vielen möglichen Systemen der Seitenkräfte p hat nun dem gedachten Principe gemäß nur dasjenige in der Wirklichkeit Anspruch auf Existenz, bei welchem sämmtliche auf der Richtung der resultirenden Kraft Q senkrechte Seitenkräfte p gleichzeitig den möglich kleinsten Werth annehmen. In dem vorliegenden Falle ist also unter der Mittelkraft der äußeren Kräfte das Gewicht Q einer Gewölbhälfte sammt ihrer Belastung zu verstehen, während die gedachten Seitenkräfte p durch die in der Scheitelfuge und am Kämpfer auftretende horizontale Schubkraft H dargestellt sind, welche dem angeführten Gesetze zufolge daher H_{min} sein soll.

*) S. Moseley, Philosophical Magazine, October 1833.

**) Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eis. Brücken 1857.

Man hätte sich hiernach den Zustand der Gewölbe etwa in folgender Weise zu verdeutlichen. Es sei $A_1 A_2 B_1 B_2$, Fig. 59, die Hälfte eines zunächst aus absolut unpreßbarem Materiale bestehenden Gewölbes, welches noch durch das beim Baue erforderliche Lehrgerüst unterstützt ist, so daß angenommen werden muß, daß im Scheitel $A_1 A_2$ überhaupt noch keine Schubkraft zwischen den beiden Gewölbhälften vorhanden ist. Denkt man sich nun das unterstützende Lehrgerüst weggenommen, so würde die zunächst noch nicht durch eine Horizontalkraft gestützte Gewölbhälfte ihrem Bestreben, zu fallen, Genüge leisten, wenn nicht gleichzeitig mit diesem Bestreben eine gewisse Horizontalkraft in der Scheitelfuge $A_1 A_2$ von der rechtsseitigen Gewölbhälfte ausgeübt würde, welche einen hinreichend großen Werth H hat, um das Gewölbe am Einstürzen zu hindern. Hierbei wird man sich vorstellen müssen, daß diese Horizontalkraft nicht momentan und gewissermaßen sprungweise von dem Werthe 0 auf H sich erhebt, sondern es wird eine gewisse, wenn auch unmeßbar kleine Zeit vergehen, während welcher die Schubkraft in schneller Aufeinanderfolge alle Werthe von 0 bis zu dem erforderlichen Werthe H durchläuft. Wenn dabei die Schubkraft bei dieser Zunahme den Werth H_{min} erreicht hat, welcher gerade genügt, um das Gleichgewicht herzustellen, so fällt nunmehr gerade wegen dieses alsdann bestehenden Gleichgewichts jeder Grund fort, weshalb eine noch weiter gehende Vergrößerung von H über H_{min} hinaus stattfinden sollte, und man muß daher annehmen, daß das Gewölbe unter Einfluß seiner Belastung in demjenigen Zustande sich befindet, welchem die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes zukommt.

Fig. 59.



Die hier auftretende Schubkraft H ist eine passive oder, wie sie auch wohl genannt wird, latente Kraft, welche stets nur genau in dem Betrage ersteht, in welchem sie gefordert wird. Anders gestaltet sich die Sachlage, wenn H eine von außen auf das Gewölbe ausgeübte active Kraft ist, wie sie etwa durch den Schub eines benachbarten Gewölbes ausgeübt, und durch die rechtsseitige Gewölbhälfte auf die Scheitelfuge $A_1 A_2$ übertragen wird. Wenn in diesem Falle die Kraft H den Betrag H_{min} überschreitet, so kann das Gleichgewicht unter Beibehaltung der Stützlinie $A_2 B_1$ nicht mehr bestehen, es würde alsdann, wenn die vergrößerte Schubkraft wirklich in A_2 angriffe, das Gewölbe nach oben übergekippt werden. Da aber das Gewölbe im Scheitel und im Widerlager nicht in den Punkten $A_2 B_1$, sondern in den Flächen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gestützt wird, so muß man annehmen, daß bei

der gedachten Vergrößerung der Schubkraft H die Angriffspunkte von A_2 und B_1 aus in das Innere des Gewölbes hineinrücken können, so daß die Stützlinie wie etwa AB in dem Maße flacher wird, wie die Vergrößerung von H es erfordert. Als letzter Grenzzustand, für welchen gerade noch das Gleichgewicht bestehen kann, gilt demgemäß die Stützlinie A_1B_2 des maximalen Schubes, und erst, wenn H den hierzu gehörigen Werth H_{max} überschreitet, wird das Gewölbe nach oben übergestürzt werden. Die beiden Stützlinien des kleinsten und größten Gewölbeschubes entsprechen daher zweien Grenzzuständen, und die Stabilität wird so lange nicht gestört sein, so lange die zugehörige Stützlinie zwischen diesen beiden Grenzen verbleibt. Man könnte daher die Entfernung zwischen diesen beiden äußersten Stützlinien in gewissem Sinne als ein Maß für die Stabilität eines Gewölbes ansehen, insofern die mögliche Veränderlichkeit der Stützlinie mit jener Entfernung zwischen A_1B_2 und A_2B_1 wächst und zu Null wird, sobald, wie in Fig. 58, die Stützlinie des kleinsten gleichzeitig diejenige des größten Gewölbeschubes, also die einzige überhaupt mögliche Stützlinie ist.

Da nun in Wirklichkeit das Material der Gewölbe niemals wie im Vorstehenden zunächst vorausgesetzt wurde, vollkommen starr und unpreßbar ist, so kann die wahre Stützlinie auch niemals durch die Kanten der Steine gehen, sondern muß sich wegen deren Zusammendrückung in gewissem Grade mehr in das Innere des Gewölbes hineinziehen. Scheffler nimmt an, daß an den Stellen, wo die Stützlinie des kleinsten Schubes die äußere oder innere Gewölbfläche trifft, auch die stärkste Zusammendrückung der Wölbsteine in der Nähe der betreffenden äußeren und inneren Kante liegen wird, d. h. daß die wahre Stützlinie, welche bei unpreßbarem Material mit der Stützlinie vom kleinsten Schub wirklich zusammentreffen würde, bei preßbarem Material sich dieser Linie möglichst zu nähern strebt. Ferner wird von demselben angeführt, daß Beobachtungen an ausgeführten Bauten aus Granit, hartem Kalk- und Sandstein zeigen, daß die Stützlinie dabei fast genau die eigentliche Kante des Fugenschnittes erreiche. Nach dieser Voraussetzung darf man keine gleichmäßige Vertheilung des Druckes über die ganze Fugenfläche bei allen Steinen annehmen, da dies offenbar nur bei einer solchen Fuge der Fall sein kann, welche von der Stützlinie in ihrer Mitte getroffen wird. Letzteres wird aber selbst bei einem Gewölbe, für welches die Mittellinie als eine mögliche Stützlinie construirt ist (s. §. 19), nicht in allen Fugen der Fall sein, wenn die wirkliche Stützlinie sich derjenigen vom kleinsten Schube möglichst zu nähern strebt. In diesem Falle muß selbstverständlich die specifische Pressung des Materials in den Fugen um so größer ausfallen, je weiter sich in ihnen die wahre Stützlinie von der Mittellinie des Gewölbes entfernt.

Unter Zugrundelegung dieser Voraussetzung, welche vielfach gemacht

wird, hat man die Prüfung eines Gewölbes in der Weise vorzunehmen, daß man die Begrenzungen des Kerns (s. §. 19) einzeichnet, und diejenige Stützlinie aufsucht, welche ganz innerhalb dieses Kerns verbleibend, dem kleinsten Horizontalschube entspricht, d. h. einen Punkt mit der äußeren und einen tiefer liegenden Punkt mit der inneren Begrenzung dieses Kerns gemeinsam hat. Diese Stützlinie hat man dann als die wirkliche zu betrachten und ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität und Widerstandsfähigkeit nicht als genügend stark anzusehen, wenn sich eine solche Stützlinie von der verlangten Eigenschaft innerhalb des Kerns nicht angeben läßt. Diese Untersuchung soll im nächsten Paragraphen durchgeführt werden.

Ueber die Beschaffenheit der in einem Gewölbe auftretenden wirklichen Stützlinie sind auch andere Behauptungen aufgestellt worden, so u. A. von Culmann*). Derselbe spricht den Satz aus: „Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie eines Gewölbes, welche sich der Axe desselben in der Art am meisten nähert, daß der Druck in den am stärksten comprimirten Fugenkanten ein Minimum ist.

Es kann bemerkt werden, daß die so charakterisirte Stützlinie nicht sowohl dem Minimum des Horizontalschubes H, sondern der relativ kleinsten Pressung, also der günstigsten Anstrengung des Materials entspricht. Demgemäß würde z. B. für ein Gewölbe, das so construirt ist, daß seine Axe oder Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, diese Mittellinie auch die wirkliche Stützlinie sein, denn die Bedingung der kleinsten specifischen Pressung eines Querschnitts wird bei einer gleichmäßigen Druckvertheilung d. h. also dann erfüllt sein, wenn die resultirende Druckkraft durch die Mitte des Querschnitts geht. Culmann giebt übrigens an, daß, da die Aufsuchung der gedachten Stützlinie von der relativ kleinsten Pressung zu umständlich sei, man gewöhnlich das oben angedeutete Verfahren anwenden werde, zu untersuchen, ob sich innerhalb des Kerns eine Stützlinie einzeichnen läßt.

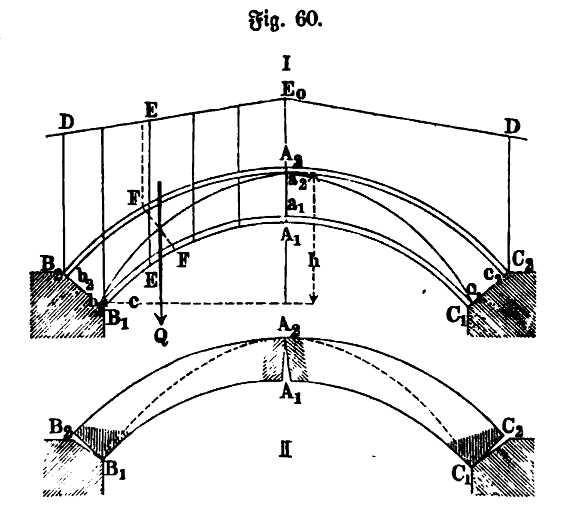
Ist dies der Fall, so ist damit auch der Beweis geliefert, daß es außer dieser Stützlinie noch eine günstigere geben müsse, nämlich die als wirkliche angegebene, welche sich der Mittellinie des Gewölbes noch mehr nähern wird.

§. 21. **Prüfung der Gewölbe.** Um ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität auf graphischem Wege zu prüfen, zeichnet man zu dem Gewölbe zunächst die Belastungslinie, indem man, wie oben angegeben, sämmtliche darauf ruhenden Lasten durch Mauerkörper von dem specifischen Gewichte des Gewölbmaterials ersetzt und gleichmäßig über die ganze Gewölbbreite in der Axenrichtung vertheilt denkt. Diese gleichmäßige Vertheilung nach der Axenrichtung gilt auch insbesondere bei den Brücken für die Brustmauern, welche die Brückenbahn beiderseits begrenzen. Zunächst soll im Folgenden, wie bisher immer eine symmetrische Belastung des Gewölbes vorausgesetzt

*) S. dessen „Graphische Statik". 1. Auflage, 1866.

werden, indem der Einfluß einseitiger und isolirter Lasten später besonders besprochen werden soll. Wenn man in dieser Weise für ein Gewölbe, Fig. 60

Fig. 60.



die Belastungslinie DE_0D gezeichnet hat, so kann man dasselbe durch eine Anzahl Ebenen, am einfachsten von vertikaler Stellung wie EE, in eine Reihe von Streifen von beliebiger Breite theilen, und die Gewichte $Q_1, Q_2 \ldots$ dieser Streifen von 1 m Länge in bekannter Weise, unter Zugrundelegung einer gewissen Basis b für den Kräftemaßstab, durch Strecken darstellen, welche man in dem Kräfteplane in verticaler Richtung aneinandersetzt. Gleichzeitig kann man die den Theilungsebenen E zugehörigen corrigirten Fugen F in der in §. 18 angegebenen Weise ermitteln, und in der daselbst angeführten Art mit Hülfe des Kräftepolygons irgend eine Stützlinie zeichnen, welche durch einen beliebigen Punkt der Scheitelfuge A_1A_2 und durch einen ebenfalls beliebig angenommenen Punkt der Widerlager B_1B_2 bezw. C_1C_2 geht. Jede solche Stützlinie ist in dem vorliegenden Falle symmetrisch gegen die Scheitelfuge, in welcher sie eine horizontale Tangente haben muß. Zeichnet man nun noch in der dem Materiale entsprechenden Entfernung (s. §. 19) von den Wölbflächen die Begrenzungen $b_1a_1c_1$ und $b_2a_2c_2$ des Kerns ein, so kommt es darauf an, innerhalb dieses Kerns die mehrbesagte Stützlinie der kleinsten Schubkraft zu entwerfen.

Zu diesem Ziele gelangt man am einfachsten durch die Zeichnung einer Probestützlinie, welche man unter willkührlicher Annahme eines Punktes in A_1A_2 und B_1B_2 entwirft, und welche man passend corrigirt, falls sie, wie dies meistens der Fall sein wird, den an die wirkliche Stützlinie zu stellenden Anforderungen noch nicht genügt. Dabei wird es sich fast immer

empfehlen, den höchsten Punkt a_2 im Scheitel und den tiefsten Punkt b_1 im Widerlager als die willkührlich anzunehmenden Punkte zu wählen; denn da für diese Punkte der Verticalabstand h ein Maximum ist, so ist zu erwarten, daß die ihnen zugehörige Stützlinie derjenigen vom kleinsten Schube nahe liegt, indem der Schub irgend welcher Stützlinie sich durch $H = Q \frac{c}{h}$ ausdrückt, also um so kleiner ausfällt, je größer der besagte Verticalabstand h zwischen Scheitel- und Kämpferangriff ausfällt.

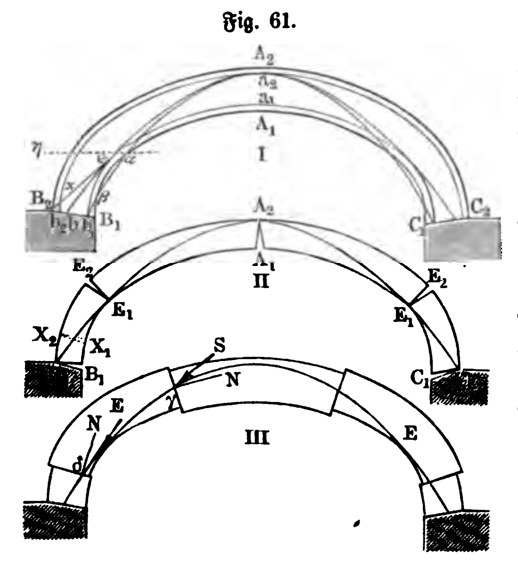
Hat man diese Probestützlinie zwischen a_2 und b_1 entworfen, so können folgende Fälle eintreten. Entweder diese Stützlinie liegt ganz innerhalb des Kerns, oder sie schneidet nur dessen äußere oder nur dessen innere Begrenzung oder aber, sie schneidet beide Begrenzungen. Diese einzelnen Fälle sollen gesondert betrachtet werden.

Gesetzt zunächst, die Probestützlinie $a_2 b_1$ verbleibt, wie in Fig. 60, gänzlich innerhalb des Kerns, so ist sie die wirkliche Stützlinie, und die Stabilität des Gewölbes ist bei der angenommenen Gewölbestärke und Widerstandsfähigkeit der Steine als gesichert zu betrachten. Würde die eine oder die andere dieser letztgedachten Größen indessen soweit verringert, daß ein Einsturz erfolgen müßte, so würde ein Bruch des Gewölbes in zwei Theile eintreten, derart, daß die Fugen nach Fig. 60, II innen im Scheitel bei A_1 und außen in den Kämpfern bei B_2, C_2 sich öffnen würden. Diese gefährlichsten Stellen bei A, B und C nennt man daher bei diesem Gewölbe die Bruchfugen, welchen Namen man auch bei einem stabilen Gewölbe beibehält, welches dem Bruche nicht ausgesetzt ist. Bei der Zeichnung wird man finden, daß der hier angegebene Fall im Allgemeinen sich einstellt bei kreisförmigen Tonnengewölben, deren Mittelpunktswinkel zu jeder Seite des Scheitels den Betrag von 60° nicht übersteigt. Ein Gleiten der Wölbsteine auf einander wird in diesem Falle in der Regel nicht zu befürchten sein, da die Richtung des Fugendruckes von der Fugennormalen nirgends um den Reibungswinkel abweichen wird. Die größte specifische Pressung der Steine findet selbstredend in den Bruchfugen statt.

Wenn dagegen, wie es bei Halbkreisgewölben, gedrückt elliptischen oder Korbbögen meistens der Fall sein wird, die durch a_2 und b_1 gehende Stützlinie, Fig. 61, die innere Grenze $a_1 b_1$ des Kerns oder gar die innere Wölbfläche $A_1 B_1$ bei $\alpha \beta$ durchsetzt, so erhält man genau genug die wirkliche Stützlinie in derjenigen, welche durch denselben Punkt a_2 im Scheitel und außerdem durch denjenigen Punkt e der inneren Kernbegrenzung geht, welcher von der Probestützlinie zwischen α und β die größte Entfernung hat. Zeichnete man diese Stützlinie, und sollte sich herausstellen, daß dieselbe doch noch an einer Stelle den Kern überschreitet, so würde eine Widerholung dieser Construction in jedem Falle mit genügender Genauigkeit die wirkliche Stütz-

linie *aeb* liefern. Hierbei ist nur zu beachten, daß diese letztere nicht die äußere Begrenzung des Kerns etwa bei *x* schneide, denn wenn dies der Fall sein würde, so wäre in dem Gewölbe überhaupt keine Stützlinie möglich, und man müßte, um den Einsturz zu verhüten, die Schenkel bei B_2 und C_2 durch eine daselbst aufgeführte Hintermauerung verstärken, so daß die Stützlinie auch dort innerhalb des Kerns verbleibt. Wenn man diese Hintermauerung bis etwa zu der Horizontalen $\alpha\eta$ durch α aufführt, so erkennt man leicht, daß der vorliegende Fall auf den vorhergehenden durch Fig. 60 dargestellten zurückgeführt ist.

Fig. 61.



Die Bruchfugen, welche sich bei einer ungenügenden Stärke des Gewölbes, Fig. 61, einstellen, liegen im Scheitel $A_1 A_2$ und in den Schenkeln bei $E_1 E_2$, Fig. II. Während die Scheitelfuge bei A_1 sich innen öffnet, erfolgt bei E_2 ein Oeffnen außerhalb für alle die Fugen, welche in dem zwischen α und β erhaltenen Stücke von der Stützlinie nicht getroffen werden. Die Füße der Schenkel zwischen β und den Widerlagern bleiben dabei stehen, sobald die Stützlinie bei *b* innerhalb des Kerns endigt, und aus dem Gewölbe fallen die beiden im Scheitel sich trennenden mittleren Theile *AE* heraus. Würde dagegen die Stützlinie noch oberhalb des Kämpfers *B*, etwa bei *x*, auch die äußere Begrenzung durchschneiden, so würden an dieser Stelle die Fugen sich innerlich bei X_1 öffnen und das Gewölbe dementsprechend in mehrere Theile zerfallen.

Wenn die Richtung des Stützdruckes *S* die Fugen des Gewölbes etwa bei γ und δ, Fig. III, unter Neigungen gegen die Normalen *N* treffen würde, die größer sind, als der Reibungswinkel ϱ der Wölbsteine aufeinander, so würde, wenn man dies nicht durch geeignete Fugenrichtung verhinderte, eine Störung des Gleichgewichtes durch Gleiten eintreten, wobei das Mittelstück abwärts rutschen, und die beiden Seitenstücke *E* seitwärts hinausdrängen würde.

Setzt man ferner voraus, die durch $a_2 b_1$ Fig. 62, I, gehende Stützlinie durchschneide die äußere Begrenzung des Kerns oder gar des Gewölbes bei α und β, so zeichnet man die wirkliche Stützlinie $a d b_1$ durch b_1 und den Punkt d der Kernbegrenzung, welcher von der Probestützlinie $a_2 \alpha \beta b_1$ zwischen α und β die größte Entfernung hat, und es gelten für diesen Fall, welcher besonders bei gothischen Bögen mit geneigten Widerlagsfugen vorkommt, ähnliche Betrachtungen, wie für den vorhergehenden. Die Bruchfugen treten hier, außer im Scheitel A und in den Kämpfern B und C, woselbst ein Oeffnen nach außen stattfindet, noch bei D zu beiden Seiten des Scheitels auf, so daß der Bogen in der aus Fig. II ersichtlichen Weise in mehrere Stücke zerfällt. Dabei wird das Oeffnen bei D entweder nur auf eine Fuge oder auf mehrere neben einander liegende sich erstrecken, je nachdem die Stützlinie die betreffende Wölbfläche berührt, oder durchschneidet.

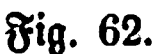
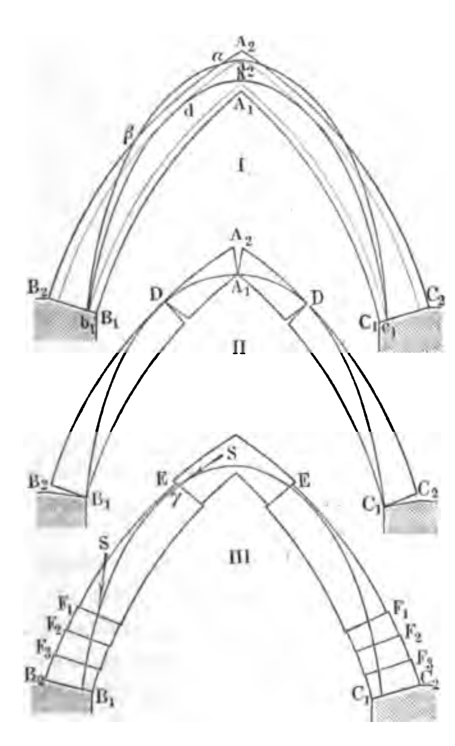


Fig. 62.

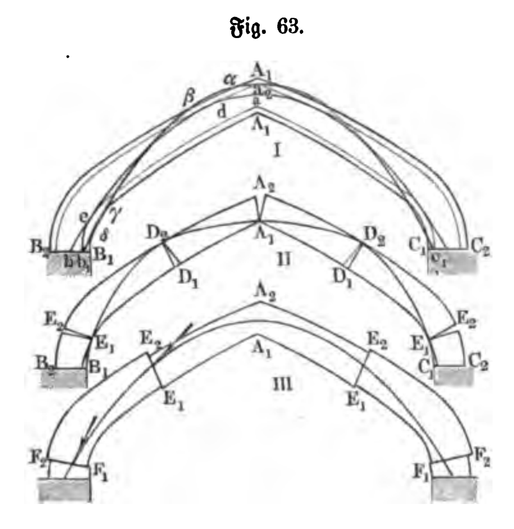


Was den Zustand des Gleitens anbetrifft, so wird, wenn die Druckrichtung S bei γ um mehr als den Reibungswinkel gegen die Fugennormale geneigt ist, jeder Schenkel bei E einwärts gleiten, während in den Fußstücken BF und CF ein Gleiten der Steine in allen den Fugen stattfindet, für welche die besagte Abweichung der Stützkraft S von der Normalen größer als der Reibungswinkel ist.

Wenn endlich der Fall, Fig. 63, I, vorliegt, daß die Probestützlinie $a_2 b_1$ beide Begrenzungen des Kerns und zwar zuerst die äußere bei $\alpha \beta$ und dann die innere bei $\gamma \delta$ durchschneidet, so zeichnet man diejenige Stützlinie $a d e b$ ein, welche durch die beiden Punkte d und e der Kernbegren-

zungen geht, die von der Stützlinie $a_2 b_1$ am entferntesten sind, wozu das in §. 18 angegebene Verfahren am bequemsten dienen kann. Diese Stützlinie wird die wirkliche sein, sobald sie weder oberhalb d die innere, noch unterhalb e die äußere Begrenzung des Kerns durchsetzt. Im Uebrigen gelten ähnliche Betrachtungen, wie in den früheren Fällen, und man erkennt, daß die Bruchfugen, Fig. II bei A, D und E liegen, während bei einem etwaigen Gleiten in jedem Schenkel das Stück EF Fig. III, nach außen gedrückt wird. Der hier vorliegende Fall kommt in der Wirklichkeit besonders bei den gedrückt gothischen, sogenannten normännischen oder Tudorbögen vor.

Fig. 63.



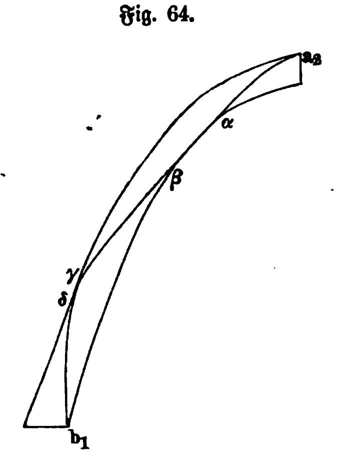
Es bedarf schließlich kaum der Erwähnung, daß bei jedem Gewölbe beim Einsturze, geschehe derselbe nun durch Kanten oder Gleiten, stets eine Senkung des Gesammtschwerpunktes stattfinden muß, selbst wenn auch im Beginne des Einstürzens einzelne Gewölbtheile momentan gehoben werden sollten, wie dies beispielsweise in dem letztbetrachteten Falle der Fig. 63, III mit den Stücken EF in der That geschieht.

Mit den hier vorgeführten Beispielen sind sämmtliche in der Wirklichkeit vorkommende Fälle erledigt, denn wenn z. B. die gedachte Probestützlinie $a_2 b_1$, Fig. 64, zuerst die innere Begrenzung des Kerns in α und β und dann die äußere in γ und δ durchschneidet, so ist überhaupt für das betreffende Gewölbe keine Stützlinie und daher keine Stabilität möglich, wie aus den in §. 18 angegebenen Betrachtungen über die allgemeinen Eigenschaften der Stützlinie sich unschwer ergiebt.

Wenn man für irgend ein Gewölbe diejenige Stützlinie S entworfen hat, welche durch die Mitten der Fugen im Scheitel und den Kämpfern geht, so kann man sich die Aufgabe stellen, das Material des Gewölbes so zu vertheilen, bezw. die Gewölbform so zu verändern, daß die gezeichnete Stützlinie zur geometrischen Mittellinie des Bogens wird. Ist dies geschehen, indem man zu jeder Seite der besagten Stützlinie S die halbe

Gewölbdicke an dieser Stelle anträgt, so wird zwar für diese etwas geänderte Gewölbeform G die ursprüngliche Stützlinie nicht mehr genau eine Stützlinie sein. Man kann indessen leicht die erforderliche Correction der Gewölbform dadurch vornehmen, daß man für die neuerhaltene Gewölbform G abermals die durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfuge gehende Stützlinie S_1 zeichnet, welche von der erstgezeichneten S nur unbedeutend abweichen wird. Wenn man daher dieser neuen Stützlinie S_1 entsprechend die Vertheilung der Gewölbmassen wieder so vornimmt, daß S_1 die Mittellinie wird, so erhält man ein Gewölbe G_1, dessen Mittellinie sehr nahe eine mögliche Stützlinie ist. Es wurde schon früher angeführt, daß damit zwar noch nicht ausgesprochen ist, daß diese mögliche, mit der Mittellinie zusammenfallende Stützlinie auch die wirkliche sei, doch wurde ebenfalls bemerkt, daß jedenfalls ein so construirtes Gewölbe eine große Stabilität besitzen müsse. Es ist daher eine dementsprechende Ermittelung der Verhältnisse von Gewölben von großer Bedeutung für die Baupraxis, und es soll in dem folgenden Paragraphen diese Ermittelung noch auf rechnerischem Wege gezeigt werden.

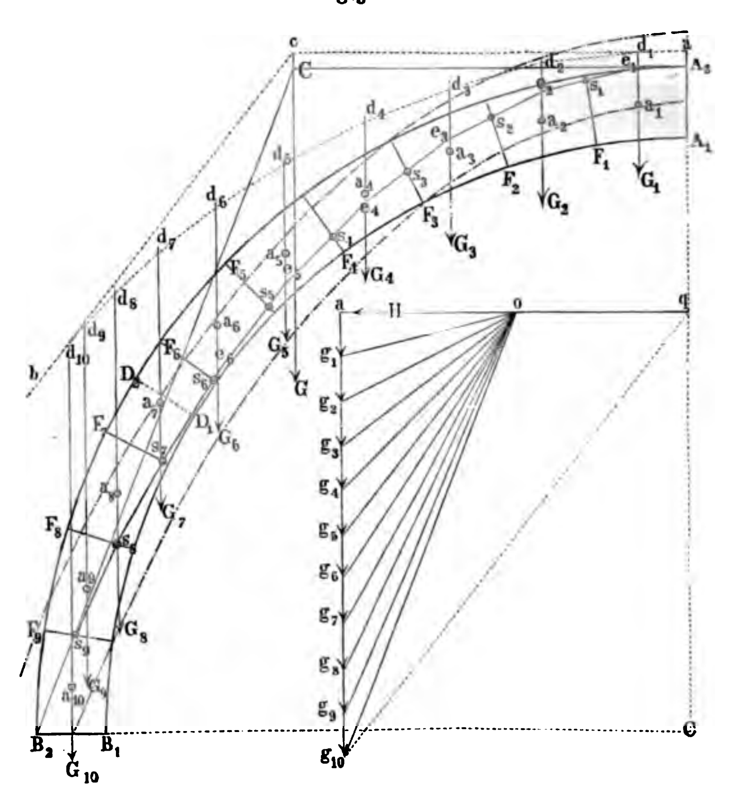
Fig. 64.



Als ein Beispiel von Interesse möge indeß zuvor der häufiger vorkommende Fall hier betrachtet werden, daß ein kreisförmiges Tonnengewölbe nur sein Eigengewicht, sonst aber keine zusätzliche Belastung zu tragen hat. Es sei zu dem Ende in Fig. 65, $A_1 A_2 B_2 B_1$ der Durchschnitt durch die Hälfte eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes dargestellt, dessen überall gleiche Gewölbdicke $A_1 A_2 = B_1 B_2$ gleich 0,1 des äußeren Halbmessers $C A_2 = C B_2$ angenommen wurde. Denkt man nun diese Gewölbhälfte, deren axial gemessene Dimension gleich 1 m vorausgesetzt werde, durch radiale Ebenen $F_1 F_2$.. in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegt, und ermittelt unter Zugrundelegung eines gewissen Kräftemaßstabes die Strecken, welche den Gewichten $G_1\, G_2\, G_3$ u. s. w. der einzelnen Gewölbtheile entsprechen, so erhält man durch Antragen dieser Strecken auf einer Verticallinie den Kräfteplan $a g_1\, g_2 \ldots g_{10}$. In dem vorliegenden Falle, in welchem das Gewölbe in lauter unter sich gleiche Theile getheilt wurde, fallen auch die einzelnen Strecken $a g_1$, $g_1 g_2$, $g_2 g_3$ .... gleich groß aus, so daß man nur die dem Gesammtgewichte G des halben Gewölbes entsprechende Strecke $a g_{10}$ in ebenso viel gleiche Theile zu theilen hat, wie das Gewölbe, um die Einzelgewichte der Theile zu erhalten. Die Einzelgewichte denkt man sich in den Schwerpunkten a_1, a_2, a_3, .. der einzelnen trapezförmigen Gewölbtheile wirksam und

findet nun zunächst die Lage der Schwerkraft G des halben Gewölbes in bekannter Weise durch eine Hülfsconstruction. Nimmt man nämlich ganz beliebig außerhalb ag_{10}, etwa auf der in a zu ag_{10} Senkrechten in p einen Punkt als Pol

Fig. 65.

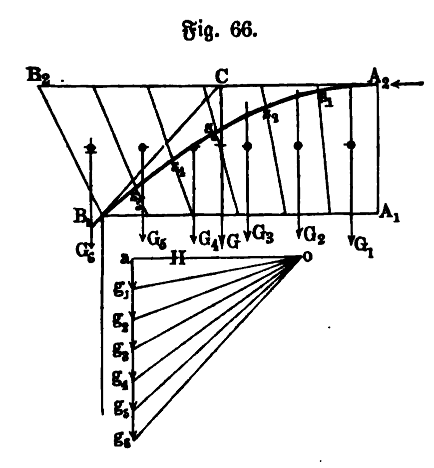


an und construirt mit Hülfe desselben in bekannter Weise ein Seilpolygon $ad_1d_2d_3 \ldots d_{10}b$, so erhält man in dem Durchschnittspunkte c der beiden Endstrahlen ad_1 und bd_{10} einen Punkt, durch welchen die verticale Schwerkraft G der Gewölbhälfte hindurchgeht. Wenn man nun zwei Punkte für eine Stützlinie des Gewölbes annimmt, etwa einen in der Scheitelfuge A_1A_2 und den anderen im Widerlager B_1B_2, so ist es nach dem Vorhergegangenen leicht, diese Stützlinie selbst zu zeichnen. Wählt man als solche Punkte etwa A_2 und B_2, so zieht man durch A_2 die Horizontale bis zum Durchschnitte C mit dem Gewichte G, um in der von C durch B_2 gehenden Geraden die Richtung des Strahls $g_{10}o$ im Kräfteplane zu erhalten, welcher in oa die Schubkraft H ergiebt. Betrachtet man nunmehr o als Pol des Kräftepolygons, und zeichnet danach das Seilpolygon $A_2e_1e_2e_3 \ldots B_2$, so erhält man in den Durchschnitten $s_1s_2s_3 \ldots$ der

Seiten dieses Polygons mit den Fugen F Punkte der gesuchten Stützlinie $A_2 s_1 s_2 \ldots B_2$. Diese Stützlinie nähert sich bei D_1 zwischen s_6 und s_7 in einem Abstande von etwa 60° vom Scheitel der inneren Gewölbeleibung fast bis zur Berührung, und sie stellt daher nach dem in §. 19 Bemerkten gleichzeitig die Stützlinie vom kleinsten wie diejenige vom größten Schube, folglich die einzig mögliche Stützlinie dar. Man erkennt auch aus der Figur leicht, daß durch eine Verrückung nach innen eines ihrer Angriffspunkte sowohl im Scheitel wie im Widerlager die Stützlinie die innere Wölbfläche in der Nähe von D_1 durchschneiden würde. Hieraus ergiebt sich, daß ein halbkreisförmiges Gewölbe von den gewählten Verhältnissen, d. h. dessen Stärke nur $^1/_{10}$ seines Halbmessers beträgt, wenn es nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat, sich im Grenzzustande des Gleichgewichts befindet. Um dem Gewölbe Stabilität zu verleihen, würde daher die Gewölbstärke vergrößert werden müssen, während die geringste Verminderung dieser Stärke unfehlbar mit einem Einsturz verbunden wäre. Wollte man das Gewölbe unter Beibehaltung der Stärke und Spannweite stabil erhalten, so hätte man die Gewölbform zu ändern. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß man die gefundene Stützlinie $A_2 s_1 s_1 \ldots B_2$ als Mittellinie auffaßt, und zu beiden Seiten derselben in dem Abstande gleich der halben Gewölbdicke die Begrenzung der Wölbflächen annimmt, in welchem Falle man ein Gewölbe von der in der Figur durch Striche und Punkte angedeuteten, annähernd parabolischen Gestalt erhält.

Wenn man das Gewölbe nur bis zu der Bruchfuge $D_1 D_2$ ausführt, etwa derart, daß man den Schenkel zwischen D und B durch kräftige Hintermauerung gewissermaßen zu einem Bestandtheile des festen Widerlagers ausbildet, so erkennt man, daß für den übrigbleibenden Bogen AD von einem halben Mittelpunktswinkel von etwa 60° die Stützlinie $A_2 D_1$ eine solche vom kleinsten Horizontalschube ist. Man ersieht hieraus den für die Stabilitätsverhältnisse günstigen Einfluß der Hintermauerung. Der Bogen wird nämlich hierdurch hinreichend stabil, denn es lassen sich für denselben noch unzählig viele Stützlinien dadurch zeichnen, daß man den Scheitelangriff von A_2 herunterrückt, und den Kämpferangriff von D_1 nach D_2 hin erhebt. Für alle diese Stützlinien ist der

Fig. 66.

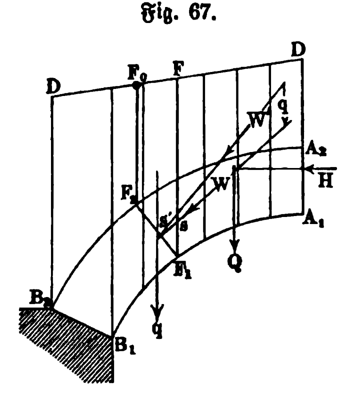


zugehörige Horizontalschub größer, als der der Linie $A_2 s_1 s_2 \ldots D_1$ zukommende H_{min}, und man erhält den größten Werth H_{max} für die durch A_2 und D_2 gehende Stützlinie. Es ist ohne Weiteres klar, daß ein unter H_{min} sinkender Schub die Gewölbhälfte AD am Herunterfallen nach innen nicht hindern kann, während eine Schubkraft größer als H_{max} die Gewölbhälfte um D_2 nach außen umkantet. Ein solches Ueberkanten nach außen wird indessen nicht eintreten können, wie groß

auch immer die Schubkraft sein möge, wenn der Punkt D_2 höher als A_1 gelegen ist. Das letztere ist der Fall bei sehr flachen und insbesondere bei allen scheitrechten Gewölben. Zeichnet man daher für ein scheitrechtes Gewölbe $A_1 A_2 B_2 B_1$, Fig. 66, in der erwähnten Art durch A_2 und B_1 die Stützlinie vom kleinsten Schube, so erhält man in diesem $H = oa$ diejenige Widerstandskraft, welche mindestens von den Widerlagern ausgeübt werden muß, wenn das Gewölbe am Herabfallen durch Kippen um einen Punkt der unteren Leibung verhindert werden soll. Ein Ueberkanten um eine Kante in der oberen Leibung $A_2 B_2$ ist aber niemals denkbar, wie groß auch der auf das Gewölbe ausgeübte Schub sein möge.

§. 22. **Die Kettenlinie als Stützlinie.** Die analytische Behandlung der Stützlinie von Gewölben, welche Linie im Vorstehenden als der geometrische Ort der Angriffspunkte der auf die Fugen des Gewölbes wirkenden Mittelkräfte in diesen Fugen charakterisirt worden ist, würde auf große, kaum lösbare Schwierigkeiten der Rechnung führen. Aus diesem Grunde pflegt man bei der Rechnung eine vereinfachende Voraussetzung zu machen, darin bestehend, daß man das Gewölbe sammt seiner Belastung durch einzelne verticale Ebenen wie FF_1, Fig. 67, in eine größere Anzahl von Streifen theilt und diejenige Stützlinie als Curve betrachtet, welche die Durchschnittspunkte s enthält, in denen diese verticalen Trennungsflächen von den bezüglichen Mittelkräften W getroffen werden. Diese Mittelkräfte selbst hat man sich wieder aus der Zusammensetzung des horizontalen Scheiteldruckes H mit dem Gewichte Q des Gewölbtheiles entstanden zu denken, der zwischen der betreffenden Theilungsebene FF_1 und dem Scheitel $A_1 A_2$ befindlich ist. Die so erhaltene Curve stimmt, streng genommen, nicht mit der dem wirklichen Fugenschnitte des Gewölbes zukommenden Stützlinie überein, denn wie aus Figur ersichtlich ist, erhält man für die durch F_1 gehende Gewölbfuge $F_1 F_2$ den Punkt s' der Stützlinie, indem man das Gewicht q des Trapezes $FF_1 F_2 F_0$ mit der in s angreifenden Mittelkraft W aus H und dem Gewichte Q des Stückes $A_1 DFF_1$ zu einer neuen Mittelkraft W' zusammensetzt. Die Abweichung zwischen den beiden diese Punkte s und bezw. s' aufnehmenden Curven wird um so kleiner sein, je kleiner die Gewölbstärke $F_1 F_2$ gegen die Belastungshöhe FF_1 und je geringer die Neigung der Fuge gegen

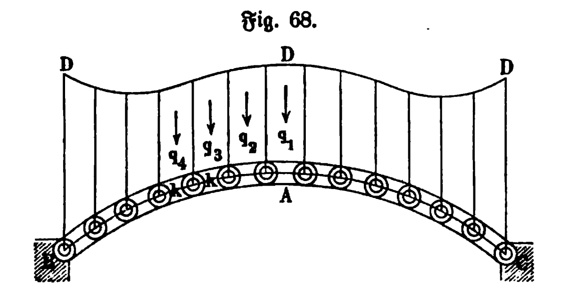
Fig. 67.



die Verticale ist. Diese erwähnte Abweichung wird daher für jedes Gewölbe in der Nähe des Scheitels unmerklich sein, und würde bei einer sehr kleinen Gewölbstärke in allen Punkten verschwinden, und da sie auch für die gewöhnlichen Gewölbe nur unbeträchtlich ausfällt, so hat man, wie schon bemerkt, bei den Rechnungen diese gedachte Linie der Punkte s als Stützlinie des Gewölbes angenommen und es soll dieselbe hier als solche bezeichnet werden. Nach dem im §. 17 über Stützlinien allgemein Gesagten ist es nun ersichtlich, daß die fragliche Linie s mit derjenigen Kettenlinie zusammenfällt, in welche das zur Construction der Stützlinie dienende Seilpolygon bei unendlich kleiner Breite der streifenförmigen Gewölbtheile übergeht, und welche im Vorstehenden mit dem Namen der Drucklinie oder Richtungslinie des Druckes bezeichnet wurde. Es ist auch schon in §. 17 darauf hingewiesen, daß diese beiden Linien zusammenfallen müssen, wenn die Fugen oder Trennungsebenen vertical angenommen werden.

Demgemäß kann man sich nun, wie Schwedler ausführt, dessen Darstellung *) hier im Wesentlichen beibehalten worden ist, das Gewölbe als eine aus einzelnen Gliedern k bestehende Kette, Fig. 68, vorstellen, deren Glieder k so gegen einander und gegen zwei feste Widerlager B und C gestellt sind,

Fig. 68.



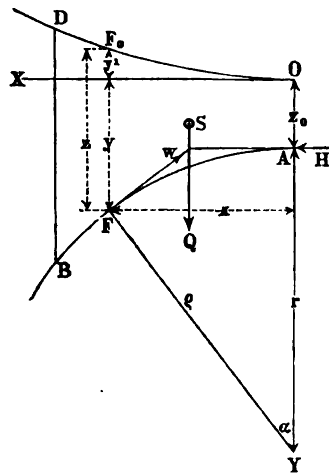
daß sie unter Einfluß der auf die einzelnen Glieder wirkenden Belastungen $q_1\, q_2\, q_3 \ldots$ mit einander im Gleichgewichte stehen. Denkt man sich diese Belastungen wieder durch entsprechend hohe Prismen aus der Wölbsteinmasse ersetzt, deren Breite gleich der Horizontalprojection der betreffenden Kettenglieder ist, so bestimmen die oberen Enden dieser Prismen die bekannte Belastungslinie des Gewölbes, für welche zunächst ebenso wie für das Gewölbe selbst eine symmetrische Gestalt zu beiden Seiten des Gewölbscheitels vorausgesetzt werden soll.

Die Untersuchung geschieht nun ähnlich wie für eine hängende Kette, (s. Thl. I.), in folgender Art. Ist AFB, Fig. 69, die besagte Kettenlinie

*) S. Theorie der Stützlinie von Schwedler, Zeitschr. für Bauwesen 1859.

für eine Belastungslinie OF_0D, deren Ordinaten über der Kettenlinie im Scheitel $AO = z_0$ und für irgend einen Punkt F durch $FF_0 = z$ ausgedrückt sind, so wähle man O zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit verticaler, in die Symmetrieebene des Gewölbes fallender Y Axe. Auf das zwischen dem Scheitel A und dem beliebigen Punkte F mit den Coordinaten x, y gelegene Kettenstück AF wirken nun die Horizontalkraft H im Scheitel, das Gewicht Q des Belastungsfeldes $OAFF_0$ in seinem Schwerpunkte S und in dem Querschnitte bei F der Widerstand des Gewölbes W, welcher, in der Tangente an die Kettenlinie wirkend, mit dem Horizonte den Winkel α bilden möge. Man findet für das Gleichgewicht ohne Weiteres die Beziehungen

Fig. 69.



$$Q = W \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$H = W \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$\frac{Q}{H} = tang\, \alpha = \frac{dy}{dx} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin kann man den Voraussetzungen gemäß,

$$Q = \int_{z_0}^{z} z\, d\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

setzen, wenn man wieder ein Gewölbe von 1 m Länge in Betracht zieht und das Gewicht von 1·cbm Wölbsteinmaterial als Gewichtseinheit annimmt, so daß aus (3) und (4)

$$H \frac{dy}{dx} = \int_{z_0}^{z} z\, d\, x$$

folgt, woraus man durch Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z}{H} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

erhält.

Bezeichnet man nun mit ϱ den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie in F, welcher bekanntlich durch

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + tang^2\,\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^3}} = \frac{1}{cos^3\,\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2}} \quad . . (6)$$

ausgedrückt ist, so findet man aus (5) und (6):

$$\varrho = \frac{H}{z\,cos^3\,\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

als allgemeine Gleichung für den Krümmungsradius der Stützlinie in irgend welchem Punkte, in welchem die Tangente mit dem Horizonte, also auch die Krümmungsradius mit der Verticalen den Winkel α bildet. Für den Scheitel erhält man daraus mit $\alpha = 0$ und $z = z_0$, wenn man daselbst den Halbmesser r nennt,

$$r = \varrho = \frac{H}{z_0} \text{ oder } H = r z_0 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

d. h. der Horizontalschub eines Gewölbes wächst direct mit der Krümmung im Scheitel und mit der Belastung daselbst.

Die Form der Stützlinie hängt wesentlich ab von dem Verhältniß $\frac{r}{z_0}$ des Krümmungshalbmessers zu der Belastung im Scheitel, und man hat, wenn man dieses Verhältniß $\frac{r}{z_0}$, welches auch wohl der Modulus des Gewölbes genannt wird, mit a bezeichnet, nach (8)

$$H = a z_0^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und erhält damit aus (7)

$$\varrho = \frac{a}{cos^3\,\alpha} \frac{z_0^2}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Schreibt man diese letztere Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{cos^3\,\alpha} \frac{z_0}{z} z_0,$$

so erkennt man, daß für denselben Werth des Modulus a der Krümmungshalbmesser ϱ für einen beliebigen Winkel α proportional mit der Scheitel-

belastung z_0 wächst, sobald auch das Verhältniß $\frac{z_0}{z}$ für diesen Winkel constant bleibt, d. h. sobald die Belastung z überall durch dieselbe Funktion von α ausgedrückt ist, mit anderen Worten, sobald die Art der Lastvertheilung dieselbe bleibt. Unter dieser Voraussetzung sind also alle Stützlinien von gleichem Modul unter einander ähnlich.

Um daher die verschiedenen Stützlinien gleicher Belastungsart zu beurtheilen, genügt es, für verschiedene Werthe des Moduls a je eine Stützlinie herauszugreifen, für welche der Halbmesser r im Scheitel eine bestimmte Größe hat, die man etwa gleich der Einheit annehmen darf, indem diese Stützlinie mit allen übrigen, demselben Modul angehörigen Stützlinien gleicher Belastungsart geometrisch ähnlich ist. Der Modul ist in Wirklichkeit natürlich sehr verschieden, er wird aber selten den Werth 25 übersteigen, in welchem Falle also die Höhe der Scheitelbelastung nur 4 Proc. des Gewölbhalbmessers beträgt; während andererseits bei hohen Belastungen der Werth $a = \frac{r}{z_0}$ bis auf einen kleinen ächten Bruch ($^1/_4$ bis $^1/_{10}$) herabgehen kann.

Setzt man zunächst den für Bauausführungen häufigen Fall voraus, daß die Stützlinie ein Kreisbogen ist, so hat man dafür in den vorstehenden Formeln den Krümmungshalbmesser ϱ an jeder Stelle gleich dem Scheitelhalbmesser r zu setzen, und erhält damit aus (7) und (8):

$$r = \frac{H}{z \cos^3 \alpha} = \frac{H}{z_0},$$

oder

$$z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Diese Gleichung gewährt ein einfaches Mittel, für ein gegebenes Kreisgewölbe vom Halbmesser r und für eine gegebene Scheitelbelastung z_0 die Größe der einem beliebigen Winkel α entsprechenden Belastungsordinate z durch Rechnung oder Construction zu finden. Zu letzterem Zwecke hat man nur, wenn AD, Fig. 70, die Ordinate z_0 der Belastung im Scheitel des kreisförmigen Gewölbes CAB ist, für einen Punkt F im Abstande $AMF = \alpha$ vom Scheitel auf dem Radius MF die Strecke $FD_1 = AD$ zu machen, dann $D_1 D_2$ senkrecht zum Radius bis zur Verticalen FF_1 durch F zu ziehen, $D_2 D_3$ senkrecht auf FF_1 und endlich $D_3 F_1$ wieder senkrecht zu FD_3 zu machen, um in

$$FF_1 = \frac{FD_3}{\cos \alpha} = \frac{FD_2}{\cos^2 \alpha} = \frac{FD_1}{\cos^3 \alpha} = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} = z$$

die gesuchte Belastungsordinate für den Winkel α zu erhalten. Wiederholt

man diese Construction für genügend viele Winkel α, so erhält man als Belastungslinie die Curve DF_1D_0, welche sich beiderseits asymptotisch an die durch B und C gelegten Verticalen anschließt.

Fig. 70.

Wenn man entweder in dieser Weise oder durch Rechnung die Belastungslinien für ein und dasselbe Kreisgewölbe vom Radius r, aber für verschiedene Model a, d. h. für verschiedene Scheitelbelastungen

$$\frac{r}{a} = z_0$$

zeichnet, so erhält man eine Darstellung, wie Fig. 71 (a. f. S.), in welcher die Belastungslinien für die Werthe von $a = 1, 2, 3, 5, 10$, und 20 eingetragen sind.

Diese Figur zeigt, daß unter diesen Stützlinien die dem Modul $a = 3$ zugehörige, welche für eine Erstreckung von etwa 20^0 zu jeder Seite vom Scheitel nahezu eine horizontale Gerade wird, in gewissem Sinne eine Grenze bildet zwischen den Formen der Stützlinien mit größerem und denjenigen mit kleinerem Modul. Während nämlich die letzteren ihren tiefsten Punkt im Scheitel haben und durchweg ihre convexe Seite abwärts kehren, sind die übrigen Stützlinien in ihrem mittleren Theile auf einer um so größeren Erstreckung nach unten concav gebogen, ehe sie sich an den Schenkeln wieder erheben, je größer der Modul a ist. Der asymptotische Anschluß aller Stützlinien zeigt, daß es in Wirklichkeit nicht möglich ist, eine Belastung anzugeben, welcher die Form des vollen Halbkreises als Stützlinie zukommt, daß dies dagegen möglich ist für kleinere Mittelpunktswinkel, welche etwa zu $\alpha = 20^0$ für $a = 3$; zu $\alpha = 30^0$ für $a = 5$ u. s. w. aber selbst für $a = 25$ nicht größer als etwa 70^0 nach jeder Seite vom Scheitel anzunehmen sein dürften.

Daß die gedachte Grenze durch diejenige Stützlinie gegeben ist, welche genau dem Modul $a = 3$ entspricht, läßt sich leicht nachweisen. Bezeichnet man mit y' die verticale Ordinate einer Belastungslinie in Bezug auf ihren im Scheitel gelegenen Punkt als Coordinatenanfang, so hat man nach Fig. 69:

$$y' = z - y = z - z_0 - r\,(1 - \cos\alpha) = \frac{z_0}{\cos^3\alpha} + r\cos\alpha - (z_0 + r).$$

Für das Maximum oder Minimum von y' hat man daher

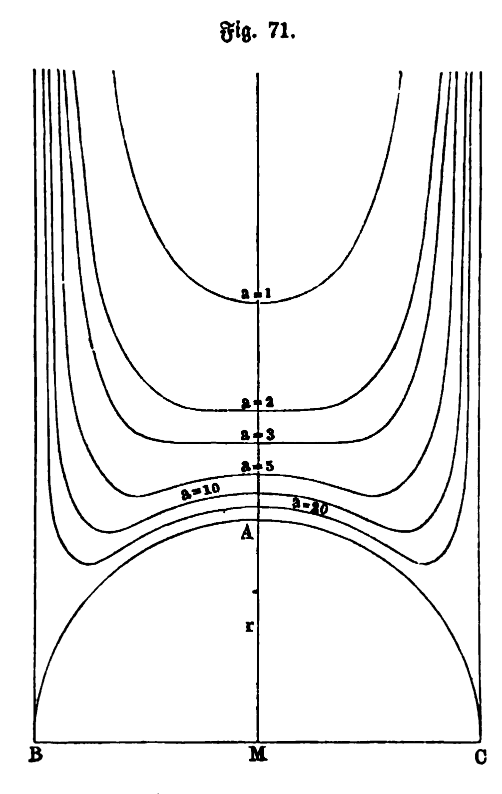
$$0 = \frac{d\,y'}{d\,\alpha} = 3\,\frac{z_0}{\cos^2\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - r\sin\alpha,$$

woraus

$$\cos^4\alpha = 3\,\frac{z_0}{r} = \frac{3}{a}$$

folgt. Hieraus ergiebt sich für $a = 3$; $\cos\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ und für $a > 3$ erhält man zwei gleiche reelle Winkel, welche einen positiven und einen negativen Werth haben, während $a < 3$ imaginäre Werthe ergiebt.

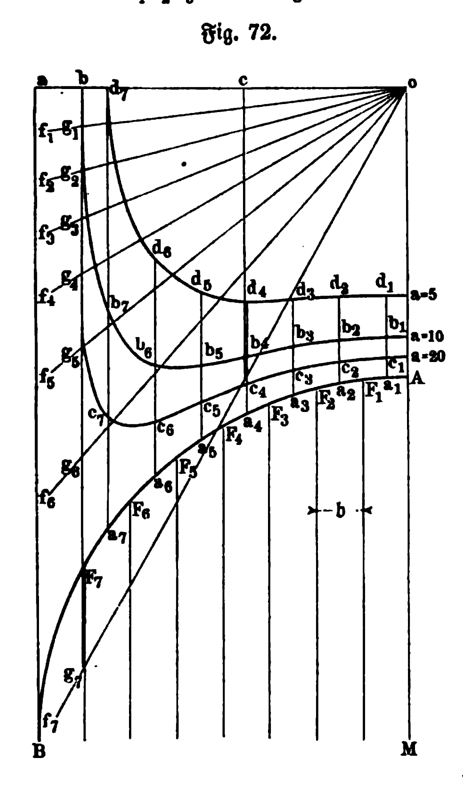
Fig. 71.



Man kann auch für eine kreisförmige oder ganz beliebige Stützlinie die zugehörigen Belastungslinien in einfacher Weise graphisch entwerfen, wenn man zu der angenommenen Stützlinie, welche man als Seilpolygon ansieht, ein zugehöriges Kräftepolygon zeichnet. Diese Construction ist in Fig. 72 für ein Kreisgewölbe MAB dargestellt. Denkt man sich das halbe Gewölbe durch eine möglichst große Anzahl verticaler Theilungsebenen $F_1 F_2 F_3 \ldots$ in einzelne Streifen von gleicher Breite b getheilt, so hat man die Stützkräfte des Bogens in den Theilpunkten $A, F_1, F_2, F_3 \ldots$ in den Richtungen der Tangenten dieser Punkte anzunehmen. Legt man daher durch einen beliebig angenommenen Pol o ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen $oa, of_1, of_2 \ldots$ mit den Tangenten in $A, F_1, F_2 \ldots$ parallel sind, so liefert dieses Strahlenbüschel das zugehörige Kräftepolygon, sobald man die Belastung des Gewölbes auf einer Verticallinie in gehöriger Weise einträgt. Zieht man z. B. durch den Punkt b des horizontalen Strahls oa die Verticale bg_7, so stellen die einzelnen Strecken $bg_1, g_1g_2, g_2g_3 \ldots$ dieser Verticallinie zwischen den Strahlen die auf die Bogenelemente $AF_1, F_1F_2, F_2F_3 \ldots$ entfallenden Belastungen nach einem gewissen

Kräftemaßstabe dar. Wenn man nun für diesen Kräftemaßstab die Breite b der einzelnen Gewölbstreifen als Basis annimmt, so ergiebt sich die dem Kräftepolygone $o\,b\,g_7$ zugehörige Belastungslinie in der Curve $b_1\,b_2\,b_3\ldots$, welche man erhält, wenn man in den Mitten $a_1\,a_2\,a_3\ldots$ der Bogenelemente die verticalen Ordinaten $a_1\,b_1 = b\,g_1$, $a_2\,b_2 = g_1\,g_2$, $a_3\,b_3 = g_2\,g_3\ldots$ aufträgt. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich einfach aus der Bemerkung, daß das angegebene Verfahren im Wesentlichen nur eine Umkehrung des zur Construction der Stützlinie für eine vorgeschriebene Belastungslinie angegebenen ist, und es folgt daraus, daß die Construction gültig bleibt, auch wenn man anstatt des Kreisbogens MAB eine beliebige Curve als Stützlinie voraussetzt. Es läßt sich daher ebensowohl für jede angenommene Stützlinie die Vertheilung der Last ermitteln, wie umgekehrt aus jeder Belastungslinie die zugehörige Stützlinie sich ergiebt. In der Figur ist der Punkt b in solchem Abstande von o gewählt, daß $b\,g_1 = {}^1/_{10}\,MA$ ist, daher wird die Linie $b_1\,b_2\,b_3\ldots$ einem Modul des Gewölbes $a = 10$ entsprechen. Die Verticale durch c, welcher Punkt in der Mitte zwischen o und b angenommen ist, giebt folglich die dem Modul 20 zukommende Belastungslinie $c_1\,c_2\,c_3\ldots$ während ebenso für die Construction der dem Modul $a = 5$ zukommenden Belastungslinie $d_1\,d_2\,d_3\ldots$ eine Verticale angenommen wurde, welche vom Pole o einen doppelt so großen Abstand hat, als $b\,g_7$.

Fig. 72.



Horizontal begrenzte Belastung. In derselben Weise, wie im vorhergehenden Paragraphen zu einer bestimmt angenommenen Stützlinie die zugehörige Belastungslinie ermittelt worden ist, läßt sich, wie schon bemerkt wurde, auch umgekehrt für eine vorgeschriebene Belastung die zugehörige Stützlinie bestimmen. Es möge der häufige Fall vorausgesetzt werden, daß die Belastungslinie des Gewölbes durch eine horizontale Gerade dargestellt ist, so hat man für diesen Fall einfach in den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen überall y für z zu setzen, und erhält daher zunächst aus (5) §. 23.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Multiplicirt man diese Gleichung beiderseits mit $2\,dy$, so erhält man die zur Integration geeignete Form

$$2\,\frac{dy}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2\,y\,dy}{H},$$

woraus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{H} + C$$

folgt, und da für $x = 0$ hier $y = y_0$ und $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = 0$ zu setzen ist, ergiebt sich die Constante C aus

$$0 = \frac{y_0^2}{H} + C \text{ zu } C = -\frac{y_0^2}{H},$$

folglich ist:

$$tang\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - y_0^2}{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und hieraus

$$y = \sqrt{H\,tang^2\,\alpha + y_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Schreibt man die Gleichung (13), um sie nochmals zu integriren,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = \frac{dx}{\sqrt{H}},$$

so erhält man, da

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = d\,ln\left(y + \sqrt{y^2 - y_0^2}\right)$$

ist,

$$ln\left(y + \sqrt{y^2 - y_0^2}\right) + C = \frac{x}{\sqrt{H}}.$$

Da hier $x = 0$ und $y = y_0$ zusammengehörige Werthe sind, so folgt $C = -\,ln\,y_0$, folglich erhält man

$$ln\,\frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0} = \frac{x}{\sqrt{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

als die Gleichung für die gesuchte Stützlinie.

Diese Gleichung, welche zuerst von Hagen*) aufgestellt worden ist, kann dazu dienen, die Ordinaten y für jeden horizontalen Abstand x vom Scheitel zu bestimmen, wenn die Ordinate y_0 der Belastung im Scheitel und der Halbmesser r daselbst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Modulus

*) Hagen, Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin, 1862.

$a = \frac{r}{y_0}$ gegeben sind, denn der Horizontalschub H bestimmt sich nach (8) und (9), wenn man y_0 anstatt z_0 einführt, zu

$$H = r y_0 = a y_0^2.$$

Ebenso kann man, wenn außer der Scheitelbelastung y_0 etwa die Spannweite l und Pfeilhöhe h gegeben sind, die Größe H, also auch den Scheitelhalbmesser $r = \frac{H}{y_0}$ finden, wenn man in Gleichung (15) $\frac{l}{2}$ für x und $h + y_0$ für y einsetzt.

Führt man den Werth $r y_0$ für H in (15) ein, so kann man diese Gleichung auch schreiben:

$$e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0} = \frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1},$$

woraus sich nach einfacher Umformung ergiebt

$$\frac{y}{y_0} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{r y_0}}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Zur Veranschaulichung der dieser Belastungsart zugehörigen Stützlinien kann die Formel (7) für den Krümmungshalbmesser dienen, welche, wenn darin y für z gesetzt wird, in

$$\varrho = \frac{H}{y \cos^3 \alpha}$$

übergeht. Führt man hierin für y den Werth aus (14)

$$y = \sqrt{H \, tang^2 \alpha + y_0^2}$$

ein, und setzt

$$H = a y_0^2,$$

so erhält man

$$\varrho = \frac{a y_0^2}{\cos^3 \alpha \sqrt{a y_0^2 \, tang^2 \alpha + y_0^2}} = \frac{a y_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \, tang^2 \alpha + 1}} \quad . \quad (17)$$

Schreibt man diese Gleichung

$$\cos^3 \alpha \sqrt{a \, tang^2 \alpha + 1} = \frac{a y_0}{\varrho}$$

und differentiirt, so erhält man weiter:

$$\frac{\cos^3 \alpha \, . \, a \, tang \, \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{a \, tang^2 \alpha + 1}} - 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sqrt{a \, tang^2 \alpha + 1} =$$

$$- \frac{a y_0}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\alpha},$$

oder, hierin nach (17)

$$\sqrt{a\,tang^2\,\alpha + 1} = \frac{a\,y_0}{\varrho\,\cos^3\alpha}$$

gesetzt:

$$\frac{\varrho\,\cos^4\alpha\,tang\,\alpha}{y_0} - 3\,a\,y_0\,\frac{tang\,\alpha}{\varrho} = -\frac{a\,y_0}{\varrho^2}\,\frac{d\varrho}{d\alpha},$$

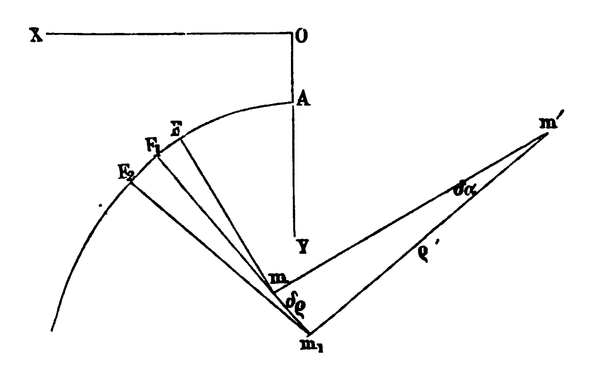
woraus endlich

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho\,tang\,\alpha\left(3 - \frac{\varrho^2\cos^4\alpha}{a\,y_0^2}\right) = \varrho' \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

folgt.

Der hier entwickelte Werth $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ hat bekanntlich die geometrische Bedeutung, den Krümmungshalbmesser für die Evolute der betrachteten Curve darzustellen, wie man am einfachsten aus Fig. 73 ersieht. Ist hier F

Fig. 73.



irgend ein Punkt der betrachteten Stützlinie mit den Coordinaten x, y und F_1 der unendlich nahe liegende Punkt der Curve mit den Ordinaten $x + dx$ und $y + dy$, also FF_1 das Curvenelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so schneiden sich die beiden in F und F_1 auf der Curve daselbst errichteten Normalen in dem Krümmungsmittelpunkte m des Elementes FF_1, und ebenso ist der Schnittpunkt m_1 der Normalen in F_1 und F_2 der Krümmungsmittelpunkt des Elementes F_1F_2, und man hat daher $Fm = \varrho$, und da $mm_1 = d\varrho$ ist, so stellt mm_1 das zugehörige Element der Evolute für die Curve AF vor. Die Normalen zu den Krümmungshalbmessern in m und m_1, welche sich in m' schneiden mögen, schließen denselben Winkel $d\alpha$ mit einander ein, wie die Krümmungshalbmesser Fm und F_1m_1 oder die Tangenten der Stützlinie in F und F_1. Bezeichnet man daher den

Krümmungshalbmesser $m m' = m_1 m'$ der Evolute in $m m_1$ mit ϱ', so hat man $\varrho' d\alpha = m m_1 = d\varrho$, d. h. $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho'$.

Setzt man nun den in (18) für $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ gefundenen Werth gleich Null, so erhält man in den zugehörigen Werthen von α diejenigen Winkel, für welche ϱ ein Maximum oder Minimum wird, und offenbar entspricht diesen Punkten der Stützlinie eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt der Evolute. Die mit $\frac{d\varrho}{d\alpha} = 0$ aus (18) entstehende Gleichung

$$0 = \varrho \, tang \, \alpha \left(3 - \frac{\varrho^2 \cos^4 \alpha}{a y_0^2}\right)$$

wird nun erfüllt erstens durch $tang \, \alpha_1 = 0$, d. h. für $\alpha_1 = 0$ im Scheitel des Gewölbes, welchem daher stets eine Spitze der Evolute entspricht, und zweitens durch $3 a y_0^2 = \varrho^2 \cos^4 \alpha$. Aus dieser Gleichung und (17) folgt:

$$3 a y_0^2 = \frac{a^2 y_0^2 \cos^4 \alpha}{\cos^6 \alpha \, (a \, tang^2 \alpha + 1)}$$

oder

$$3 = \frac{a}{\cos^2 \alpha \, (a \, tang^2 \alpha + 1)} = \frac{a \, (tang^2 \alpha + 1)}{a \, tang^2 \alpha + 1},$$

woraus man den gesuchten Winkel α_2 durch

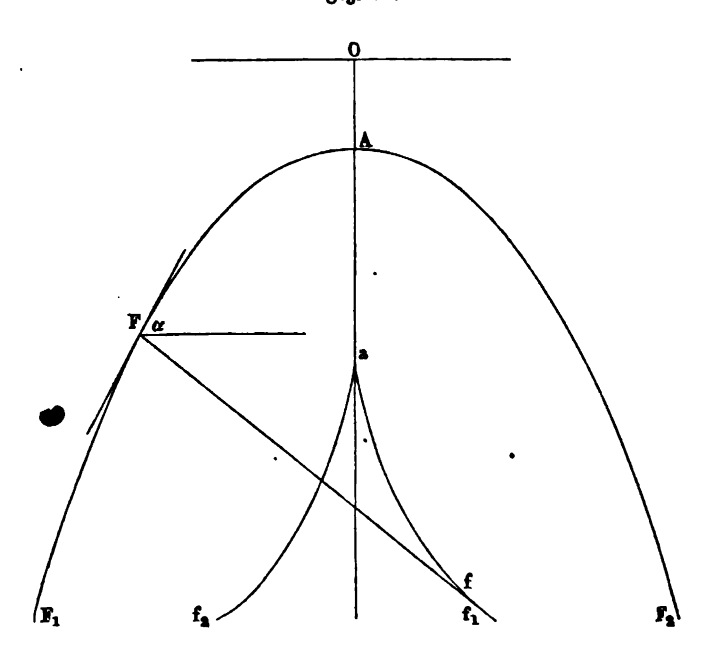
$$tang \, \alpha_2 = \sqrt{\frac{a - 3}{2a}} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

erhält.

Dieser Gleichung gemäß hat man wieder die Stützlinien zu unterscheiden in zwei Arten, je nachdem der Modulus a kleiner oder größer ist als 3. Für $a < 3$ führt die Gleichung (19) zu imaginären Werthen, ein Anzeichen dafür, daß in diesem Falle die Größe $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho'$ nur einmal zu Null wird, nämlich für den Scheitel d. h. für $\alpha = 0$, und zwar ist daselbst der Krümmungsradius $\varrho = a y_0 = r$ ein Minimum, indem ϱ nach (17) um so größer ausfällt, je größer man α annimmt. Die Evolute der Stützlinie hat daher hier nur einen Rückkehrpunkt a, Fig. 74 (a. f. S.), von welchem aus zwei Curvenzüge $a f_1$ und $a f_2$ symmetrisch zur Verticalen durch den Scheitel ausgehen, derart, daß der Evolutenzweig $a f_1$ die Krümmungsmittelpunkte für die halbe Stützlinie $A F_1$ aufnimmt, z. B. stellt f den Krümmungsmittelpunkt für die Stützlinie in F vor, woselbst die Tangente von der Horizontalen um den Winkel α abweicht. Es ist hieraus ersicht-

lich, daß alle diese Stützlinien, für welche $a < 3$ ist, eine überhöhete oder eiförmige Gestalt zeigen müssen.

Fig. 74.



Setzt man dagegen voraus, daß $a > 3$ sei, so liefert die Gleichung (19) für α zwei gleiche entgegengesetzte Werthe α_2, welchen nunmehr ein Minimalwerth von ϱ_2 angehört, der sich aus (19) und (17) zu

$$\varrho_2 = \frac{a y_0 \sqrt{1 + tang^2 \alpha}^3}{\sqrt{a\, tang^2 \alpha + 1}} = \frac{a y_0 \sqrt{1 + \frac{a-3}{2a}}^3}{\sqrt{\frac{a-3}{2} + 1}} = \frac{a y_0 \sqrt{\frac{3}{2a}(a-1)}^3}{\sqrt{\frac{a-1}{2}}}$$

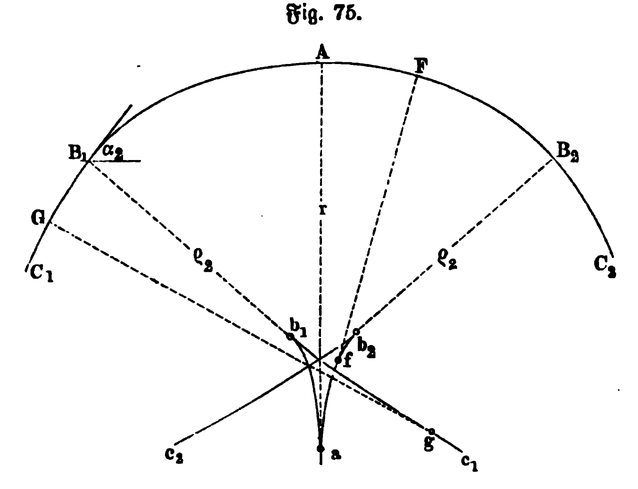
$$= \frac{3}{2} \sqrt{3} . y_0 \frac{a-1}{\sqrt{a}} = 2{,}6\, y_0 \frac{a-1}{\sqrt{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

berechnet. Der Werth $\varrho_1 = r$ für $\alpha = 0$ entspricht in diesem Falle einem relativen Maximum des Krümmungshalbmessers, welcher vom Scheitel aus bei allmäliger Zunahme von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_2$ zunächst seinen Werth auf $\varrho_2 = 2{,}6\, y_0 \frac{a-1}{\sqrt{a}}$ vermindert, um dann bei weiterer Zunahme von

α bis ins Unendliche zu wachsen, so daß die Schenkel der Stützlinie sich verticalen geraden Linien nähern.

Der Verlauf der Stützlinien und ihrer Evoluten für den Fall $\alpha > 3$ ist aus Fig. 75 ersichtlich. Während für den Scheitel A der Stützlinie der

Fig. 75.



Mittelpunkt in der Spitze a der Evolute liegt, wandert bei allmäliger Zunahme von α der Krümmungsmittelpunkt von a nach b_1 bezw. b_2, und erreicht diese Ecken, sobald in B der Winkel der Stützlinie gegen den Horizont nach (19) den Werth $\alpha_2 = arc\ tang \sqrt{\frac{a-3}{2a}}$ erlangt hat, in welchem Falle der Krümmungshalbmesser von $aA = r$ im Scheitel auf $b_1 B_1 = b_2 B_2 = \varrho_2$ herabgegangen ist. Bei noch weiterer Vergrößerung von α wandert der Krümmungsmittelpunkt der Stützlinie den Zweigen $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ der Evolute entlang bis ins Unendliche, indem nunmehr der Krümmungshalbmesser fortwährend wächst. Für den Punkt F z. B. ist f und für den Punkt G ist g der Krümmungsmittelpunkt. Es ist hieraus ersichtlich, daß die Stützlinien dieser Gruppe (für $a > 3$) gedrückte Gestalt nach Art der Korblinien zeigen werden.

Mittelst der Formel (17)

$$\varrho = \frac{a y_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{a\ tang^2 \alpha + 1}}$$

kann man nun für irgend ein Gewölbe, dessen Modul $\frac{r}{y_0} = a$ gegeben ist, für jeden beliebigen Winkel α den Krümmungshalbmesser ϱ berechnen, und

damit die Stützlinie selbst mit beliebig großer Annäherung verzeichnen. Zur Erleichterung dieser Aufgabe soll hier die von Schwedler berechnete Tabelle der Krümmungshalbmesser für Winkel von 5° zu 5° wachsend, angeführt werden. Diese Tabelle enthält für die in der obersten Horizontalreihe angegebenen Modul a zwischen 0,1 und 25 in den Verticalreihen die Coefficienten

$$\frac{a}{\cos^3\alpha\sqrt{a\,\mathrm{tang}^2\alpha+1}},$$

mit denen die Belastungsordinate y_0 im Scheitel multiplicirt werden muß, um denjenigen Halbmesser ϱ der Stützlinie zu finden, welcher von der Verticalen im Scheitel um den zugehörigen Winkel α abweicht. Nimmt man dabei die Ordinate y_0 der Belastung im Scheitel als Einheit an, so geben die gedachten Zahlen natürlich direct die Krümmungshalbmesser, und die Werthe der obersten Horizontalreihe für den Modul a sind gleichbedeutend mit den Halbmessern $r = a y_0$ im Scheitel. Ferner sind unter der Bezeichnung ϱ_2 die kleinsten Halbmesser für diejenigen Stützlinien angeführt, deren Modul a größer als 3 ist, und die unter α_2 angegebenen Werthe entsprechen den Abweichungen dieser kleinsten Werthe ϱ_2.

In welcher Weise diese Tabelle dazu dienen kann, für einen bestimmten Fall die Stützlinie zu verzeichnen, ist aus Fig. 76 zu ersehen, welche die dem Modul $a = 25$ zugehörige Stützlinie darstellt. Hier ist auf der durch den Scheitel A gezogenen Verticallinie die Strecke $Aa = 25$ Einheiten des zu Grunde gelegten Maßstabes abgetragen, und um a mit dem Halbmesser $aA = r = 25$ ein Bogen AA_1 von 2,5° nach jeder Seite gezeichnet. Nunmehr ist auf dem Radius $A_1 a$ die Strecke $A_1 a_1$ gleich dem aus der Tabelle für $\alpha = 5°$ zu entnehmenden Radius $\varrho = 23{,}2$ angetragen und a_1 als Mittelpunkt für das Bogenelement $A_1 A_2$ von 5° Erstreckung benutzt. Ebenso ist auf $A_2 a_1$ die Strecke $A_2 a_2 = 19{,}8$ angetragen, entsprechend dem Werthe ϱ für $\alpha = 10°$, und von a_2 der Bogen $A_2 A_3$ gezeichnet u. s. w. Auf diese Weise erhält man in der Aufeinanderfolge der Bogen von je 5° eine Curve, welche sich der wirklichen Stützlinie sehr nahe anschließt, während die einzelnen Mittelpunkte $a\, a_1\, a_2 \ldots$ die Ecken eines Polygons darstellen, welches der Evolute der Stützlinie eingeschrieben ist. Wollte man die Annäherung an die genaue Stützlinie noch weiter treiben, so hätte man nur die obige Tabelle in der Art zu erweitern, daß man die Intervalle des Winkels α kleiner annimmt und die entsprechenden Zwischenwerthe von ϱ noch berechnet. Der damit gezeichnete Zug von Kreisbögen wird sich dann der wirklichen Stützlinie um so mehr nähern, je kleiner man die Intervalle von α annimmt. Diese genauere Construction, welche übrigens keine besonderen Schwierigkeiten darbietet, wird

Tabelle der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{a}{\cos^3 \alpha \sqrt{a\, tang^2 \alpha + 1}}\, y_0$$

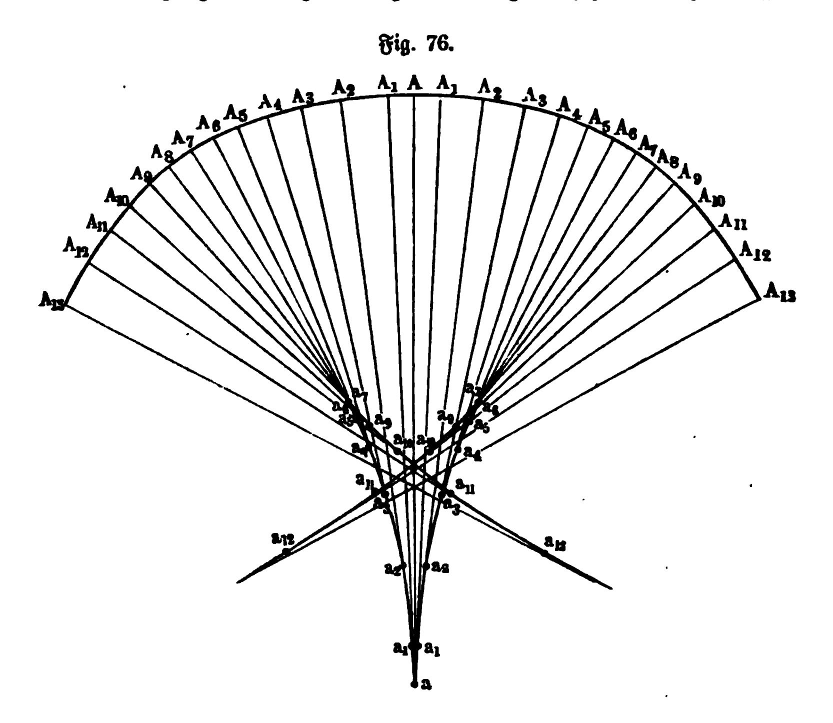
für Stützlinien mit horizontaler Belastungsebene

$y_0 = 1.$

$a = r =$	25	20	15	10	8	5	3	1	0,5	0,1
$\alpha =$ 5°	23,2	18,7	14,3	9,7	7,84	4,96	3,01	1,01	0,51	0,10
10°	19,8	16,6	13,1	9,1	7,51	4,89	3,02	1,03	0,52	0,10
15°	16,7	14,4	11,6	8,5	7,10	4,78	3,03	1,07	0,55	0,11
20°	14,6	12,6	10,5	7,9	6,68	4,70	3,06	1,14	0,58	0,12
25°	13,4	11,6	9,7	7,5	6,48	4,64	3,13	1,22	0,64	0,13
30°	12,5	11,1	9,4	7,4	6,42	4,7	3,27	1,34	0,71	0,15
35°	12,5	11,1	9,4	7,5	6,55	4,84	3,47	1,41	0,82	0,18
40°	12,8	11,4	9,8	7,8	6,87	5,19	3,75	1,69	0,96	0,21
45°	13,8	12,2	10,5	8,5	7,48	5,70	4,22	1,99	1,15	0,27
50°	15,5	13,8	11,9	9,3	8,55	6,56	4,89	2,40	1,43	0,35
55°	18,4	16,2	14,1	11,4	10,0	7,85	5,90	3,0	1,85	0,48
60°	23	20,5	17,7	14,4	12,8	10,0	7,60	4,0	2,53	0,70
75°	76,1	68,8	59,5	48,7	43,1	34,2	26,5	15,1	10,2	3,70
$\varrho_2 =$	12,5	11,1	9,4	7,4	6,42	4,6				
$\alpha_2 =$	33° 30′	33°	32° 20′	30° 30′	29° 20′	24° 20′				
$r_1 =$	22,2	18,1	14	9,5	7,74	4,98	3,1	1,1	0,56	0,12
$\alpha' =$	12,5°	12,5°	12,5°	12,5°	12,5°	12,5°	30°	30°	30°	30°
$r_2 =$	14,4	12,7	10,35	8,3	6,8	4,73	5	2,2	1,3	0,33
$\alpha'' =$	55°	55°	50°	50°	47,5°	35°	60°	60°	60°	60°
$r_3 =$	23	20	17	15	10	7	17	10	10	3

aber nur in den seltensten Fällen nöthig werden; im Gegentheil wird man sich für gewöhnlich einer weiteren Vereinfachung in der Construction der Stützlinie bedienen können, darin bestehend, daß man die Stützlinie durch eine Vereinigung von einigen wenigen Kreisbögen ersetzt, deren Halbmesser

Fig. 76.



und Mittelpunkte so gewählt werden, daß die einzelnen Bögen nicht nur wie bei den bekannten Korbbögen ohne Knick in einander übergehen, sondern sich auch in ihrem Verlaufe der exacten Stützlinie möglichst nahe anschließen. Zur Bestimmung der geeignetsten Halbmesser für diese einzelnen Kreisbogensegmente giebt Schwedler folgenden Weg an.

Der relativ größte Halbmesser ist unter der Voraussetzung $a > 3$ nach dem Vorhergehenden der Scheitelhalbmesser r, in Fig. 76 durch $Aa = 25$ gegeben, während der kleinste Halbmesser der Stützlinie zu $\varrho_2 = 12{,}5$ entsprechend einem Winkel $\alpha = 33^0\ 30'$ aus der Tabelle zu entnehmen ist, und in der Figur einem Punkte zwischen A_6 und A_7 angehört. Der mittlere Halbmesser zwischen beiden ist also durch $\frac{1}{2}\,(25 + 12{,}5) = 18{,}75$ ausgedrückt, welcher einem Punkte der Stützlinie zwischen A_2 und A_3 zukommt. Denkt man sich nun von sämmtlichen Krümmungshalbmessern

zwischen demjenigen r im Scheitel A und diesem mittleren Werthe $\frac{r + \varrho_2}{2}$ zu beiden Seiten des Scheitels das arithmetische Mittel genommen, welches durch r_1 ausgedrückt sein mag, so kann man dieses Mittel als den Halbmesser eines Kreissegmentes annehmen, welches sich auf einen Winkel erstreckt, der gleich ist der Summe aller der Winkel, die den einzelnen Radien zukommen, von denen r_1 das arithmetische Mittel ist. So z. B. ergiebt sich im vorliegenden Falle für $a = 25$ nach der Tabelle das arithmetische Mittel aller Radien zu beiden Seiten des Scheitels, die zwischen $r = 25$ und $\frac{1}{2}(r + \varrho_2) = 18{,}75$ gelegen sind, zu:

$$r_1 = \frac{19{,}8 + 23{,}2 + 25 + 23{,}2 + 19{,}8}{5} = 22{,}2,$$

und der Centriwinkel, welcher allen diesen Radien zukommt, zu $5 . 5 = 25^0$. Folglich wird man mit dem Radius $r_1 = 22{,}2$ ein Kreissegment von 25^0 oder zu jeder Seite des Scheitels von $12{,}5^0$ als angenäherte Form für die Stützlinie anwenden können. In derselben Weise ergiebt sich nun das arithmetische Mittel r_2 aller der zwischen dem kleinsten Werthe $\varrho_2 = 12{,}5$ und jenem mittleren Werthe $\frac{1}{2}(r + \varrho_2) = 18{,}75$ gelegenen Radien nach der Tabelle zu:

$$r_2 = \frac{16{,}7 + 14{,}6 + 13{,}4 + 12{,}5 + 12{,}5 + 12{,}8 + 13{,}8 + 15{,}5 + 18{,}4}{9} = 14{,}4,$$

und der zu diesem Radius zugehörige Centriwinkel ist $9 . 5 = 45^0$. Will man die Stützlinie über den Winkel $12{,}5 + 45^0 = 57{,}5^0$ hinaus verlängern, so kann man der Tabelle zufolge den Halbmesser $\varrho = 23$ für $\alpha = 60^0$ anwenden u. s. w. In der Tabelle finden sich in den mit r_1, r_2, r_3 bezeichneten Horizontalreihen diese mittleren Halbmesser und unter α', α'' die zugehörigen Winkelabstände vom Scheitel angegeben, so zwar, daß man mit dem Halbmesser r_1 einen Bogen vom Scheitel aus zu jeder Seite im Betrage α' zu zeichnen, daran in jeder Gewölbhälfte je einen Bogen mit dem Halbmesser r'' vom Winkelbetrage $\alpha'' - \alpha'$ zu schließen hat u. s. w. In ähnlicher Weise würde man die mittleren Halbmesser bestimmen können, wenn man behufs engeren Anschlusses der Korblinie an die wirkliche Stützlinie für die erstere eine größere Anzahl (ungerade) von Bogensegmenten anwenden wollte.

Eine in der vorstehenden Art aus verschiedenen Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie kann natürlich nur als angenäherte Form der wirklichen Stützlinie gelten, und man wird bei der Annahme dieser Korblinie gewisse Fehler begehen, von deren Größe man sich leicht in jedem Falle Rechenschaft geben kann. Es sei zu dem Zwecke beispielsweise in Fig. 77 (a. f. S.) die Korblinie aus fünf Mittelpunkten $o_1\, o_2\, o_3$ gezeichnet, welche der obigen Tabelle gemäß

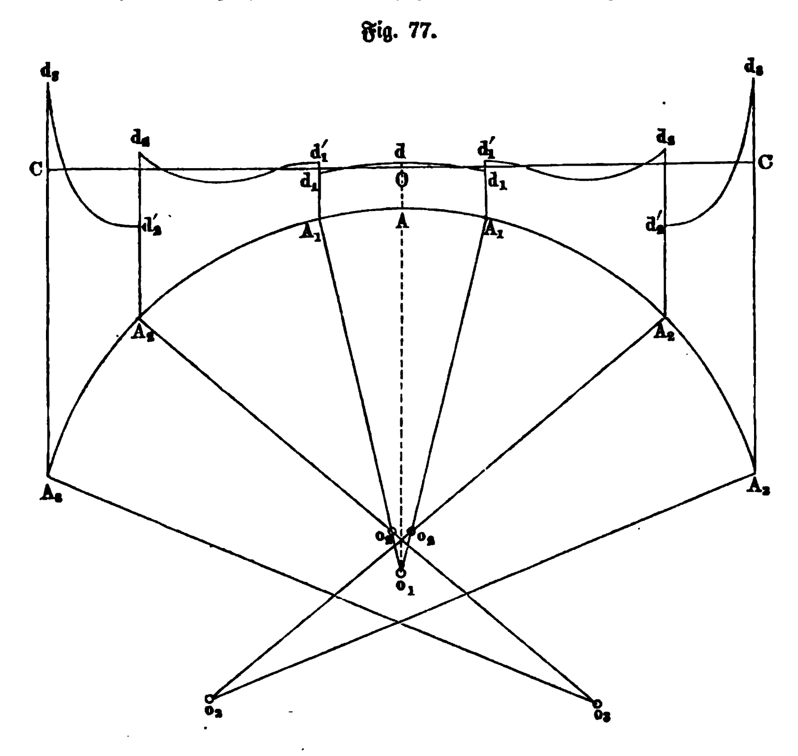
der Stützlinie für den Modulus $a = 10$ entspricht, indem die Radien und Bögen

$$r_1 = A o_1 = 9,5; \quad \alpha' = A o_1 A_1 = 12,5^0,$$
$$r_2 = A_1 o_2 = 8,3; \quad \alpha'' = A A_1 A_2 = 50^0,$$
$$r_3 = A_2 o_3 = 15; \quad \alpha''' = A A_1 A_2 A_3 = 60^0$$

gewählt sind.

Man kann sich nun jedes der fünf verschiedenen Kreissegmente als eine exacte Stützlinie vorstellen, wenn man nämlich voraussetzt, daß die Belastung jedes einzelnen Theiles genau so vorgenommen werde, wie es nach dem vorigen Paragraphen für die zugehörige kreisförmige Stützlinie er-

Fig. 77.



forderlich ist. Wenn dann, wie hier, die einzelnen Segmente in den vier Vereinigungspunkten A_1 und A_2 ohne Knick in einander übergehen, und man ferner die für jede Stützlinie geltende Bedingung eines überall gleichen Horizontalschubes H für alle Segmente stellt, so kann man auch die Vereinigung der fünf Segmente, d. h. die ganze Korblinie als eine exacte Stützlinie ansehen, für welche die Belastung durch die Vereinigung

der auf die einzelnen Theile entfallenden Belastungen gegeben ist. Natürlich ist dann diese Belastung nicht mehr durch eine horizontale Ebene, sondern durch fünf verschiedene Belastungsflächen von der Art der in Fig. 71 gezeichneten dargestellt. Der Horizontalschub des Bogens ist nach Gleichung (8) allgemein durch $H = r z_0$ ausgedrückt, unter r den Halbmesser im Scheitel und unter z_0 die Belastung daselbst verstanden, folglich hat man für die vorliegende Korblinie die Bedingung

$$H = \mathfrak{r}_1 z_0' = \mathfrak{r}_2 z_0'' = \mathfrak{r}_3 z_0''',$$

wenn z_0', z_0'', z_0''' die betreffenden Scheitelbelastungen der einzelnen Kreisgewölbe bedeuten. Dieser Horizontaldruck H ist nun auch gleich demjenigen des Gewölbes mit horizontal abgeglichener Belastung vom Modul $a = 10$ zu setzen, für dessen Stützlinie die Korblinie ein Ersatz sein soll, und da für dieses Gewölbe, wenn $A O = y_0$ gleich der Einheit angenommen wird,

$$H = r y_0 = a y_0^2 = 10$$

ist, so findet man ohne Weiteres die Scheitelbelastungen der einzelnen Gewölbtheile zu

$$z_0' = \frac{H}{\mathfrak{r}_1} = \frac{10}{9{,}5} = 1{,}05 \text{ für } A_1 A A_1,$$

$$z_0'' = \frac{H}{\mathfrak{r}_2} = \frac{10}{8{,}3} = 1{,}205 \text{ für } A_1 A_2,$$

$$z_0''' = \frac{H}{\mathfrak{r}_3} = \frac{10}{15} = 0{,}667 \text{ für } A_2 A_3.$$

Mit diesen Scheitelbelastungen findet man nun durch die für Kreisgewölbe im vorigen Paragraphen gefundene Formel (11) $z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha}$ die Belastungshöhen für die Endpunkte A_1, A_2 und A_3 jedes Bogenstückes, wenn man für α die entsprechenden Werthe $\alpha' = 12{,}5^0$, $\alpha'' = 50^0$, $\alpha''' = 66^0$ einführt. Auf diese Weise hat man die Belastungsordinaten für

1) das mittlere Bogenstück $A_1 A_2$ im Scheitel:

$$z_0' = 1{,}05 = A d,$$

an den Enden A_1:

$$z_0' \sec^3 12{,}5^0 = 1{,}13 = A_1 d_1;$$

2) das Gewölbstück $A_1 A_2$ jederseits in A_1:

$$z_0'' \sec^3 12{,}5^0 = 1{,}30 = A_1 d_1',$$

in A_2:

$$z_0'' \sec^3 50^0 = 4{,}54 = A_2 d_2;$$

3) das Gewölbstück $A_2 A_3$ jederseits in A_2:

$$z_0''' \sec^3 50^0 = 2{,}51 = A_2 d_2',$$

in A_3:

$$z_0''' \sec^3 66^0 = 9{,}94 = A_3 d_3.$$

Berechnet man auch noch für Zwischenpunkte die Ordinaten z, so erhält man als Belastungslinie die gebrochene Curve $d\, d_1\, d_1'\, d_2\, d_2'\, d_3$. Nach dieser Linie müßte folglich die Belastung über dem Gewölbe ausgebreitet sein, wenn die Korblinie eine exacte Stützlinie sein sollte. Soll dagegen die Korblinie nur als angenäherte Stützlinie für ein Gewölbe mit horizontal abgeglichener Belastung gelten, so hat man die Anordnung, d. h. die Halbmesser und Winkel für die Korblinie, so zu wählen, daß die horizontale Belastungslinie COC die Belastungscurve jedes einzelnen Gewölbtheiles derart schneidet, daß die Flächentheile oberhalb der Geraden gleich denjenigen unterhalb werden. In welcher Weise man, falls dies nicht der Fall sein sollte, eine entsprechende Correctur der Korblinie vornehmen kann, ist leicht zu erkennen, denn wenn man z. B. den Halbmesser $r_2 = A_1 o_2$ entweder kleiner oder größer wählt, so wird dadurch das Curvenstück $d_1' d_2$ im ersten Falle gehoben, im zweiten gesenkt.

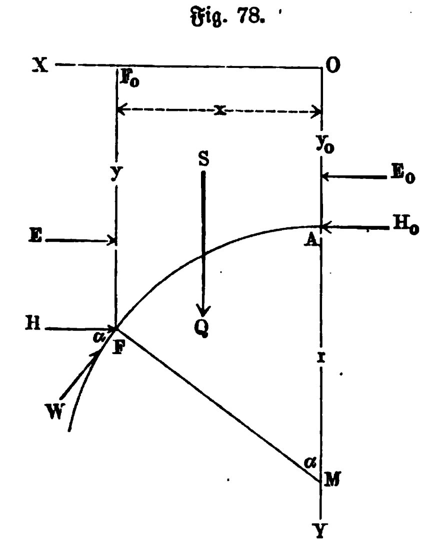
Aus dem Vorstehenden dürfte wohl von selbst hervorgehen, in welcher Weise man zu verfahren haben wird, um die Belastungsvertheilung zu ermitteln, vermöge deren eine bestimmt vorliegende Gewölbeform zur Stützlinie wird. In der Ausführung hat man dann in geeigneter Weise, z. B. bei Brückengewölben, durch Herstellung von Hohlräumen, Zwischengewölben, Mauerkörpern &c. dafür zu sorgen, daß die wirkliche Belastung des Gewölbes der gefundenen entspricht. Wo eine derartige Freiheit in der Belastung indessen nicht möglich ist, die letztere vielmehr von vornherein nahezu feststeht, wird man durch entsprechende Wahl der Gewölbeform diese zu einer Stützlinie machen können.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß in der Praxis meistens nicht der Modulus oder der Halbmesser im Scheitel, sondern in der Regel die Spannweite l und die Pfeilhöhe, d. h. die Höhe h des Scheitels über den Kämpfern, sowie auch die Belastung im Scheitel y_0 gegeben ist. In diesem Falle hat man nur nöthig, in der Formel (15) für x den Werth $\frac{l}{2}$ und für y die Summe $y_0 + h$ einzuführen, um daraus die horizontale Schubkraft H und folglich auch den Scheitelhalbmesser $r = \frac{H}{y_0}$ und den Modulus $a = \frac{r}{y_0} = \frac{H}{y_0^2}$ zu erhalten.

§. 24. Die Stützlinie für Erddruck. Wenn die Belastung des Gewölbes durch Sand, Erde oder überhaupt lockere Massen dargestellt wird, wie dies z. B. bei den Durchlässen unter Dammschüttungen der Fall ist, so hat man außer dem Gewichte dieser Massen auch deren Horizontalschub gegen das

Gewölbe zu berücksichtigen. Es sei A, Fig. 78, wieder der Scheitel des Gewölbes, über welchem die aus Erde vom specifischen Gewichte γ zu denkende, oben horizontal abgeglichene Belastung die Höhe $AO = y_0$ habe, und sei das Eigengewicht des Gewölbes selbst gegen die darauf ruhende Erdmasse zuvörderst unberücksichtigt, was bei den gewöhnlich bedeutenden Ueberschüttungen nur einen unbeträchtlichen Fehler verursachen wird. Ein Stück des Gewölbes zwischen den Verticalebenen AO durch den Scheitel und FF_0 durch den Punkt F, dessen Coordinaten x, y sind, ist jetzt im Gleichgewichte unter Einfluß des Horizontalschubes H_0 im Scheitel, des Gewichtes Q der betrachteten Masse OF, des Bogenwiderstandes W in F, der unter dem Winkel α gegen den Horizont wirkt, und der beiden horizontalen Druckkräfte E_0 und E, mit welchen die verticalen Flächen AO und FF_0 von der umgebenden Erdmasse gedrückt werden.

Fig. 78.



Setzt man den Erddruck gegen eine verticale Fläche von der Breite 1 und der beliebigen Tiefe y nach den Ergebnissen des ersten Capitels (s. §. 8) gleich $\frac{k}{2}\gamma y^2$, unter k einen von der Beschaffenheit der Erde abhängigen Coefficienten verstanden, so hat man, wenn man noch das Gewicht γ eines Cubikmeters Erde als Kräfteeinheit wählt:

$$E_0 = \frac{k}{2} y_0^2 \text{ und } E = \frac{k}{2} y^2$$

zu setzen, und man hat daher, wenn hier unter $H = W \cos \alpha$ die horizontale Componente des Bogenwiderstandes W verstanden wird, ähnlich wie in §. 22 die Gleichungen:

$$Q = W \sin \alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$H = H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2), \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$\frac{Q}{H} = \operatorname{tang} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

und

$$Q = \int_{y_0}^{y} y \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Man erhält daher durch Differentiiren der aus (2), (3) und (4) folgenden Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} y \partial x = H \, tang \, \alpha = \left(H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)\right) \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$y = \left(H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ky \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

woraus

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y \frac{1 + k\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)} = y \frac{1 + k \, tang^2 \alpha}{H} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

folgt. Multiplicirt man beiderseits mit $2 k \partial y$, so hat man

$$2k \frac{\partial y}{\partial x} \partial \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{k y \partial y}{H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)} \left[1 + k\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right],$$

woraus durch Integration

$$ln \left[1 + k\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = -2 \, ln \left(H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)\right) + Const \quad (6)$$

folgt. Da für $x = 0$, $y = y_0$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist, so folgt die Constante aus $0 = -2 \, ln . H_0 + C$, und Gleichung (6) geht damit über in

$$ln \left[1 + k\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = 2 \, ln \frac{H_0}{H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)} = 2 \, ln \frac{H_0}{H} \quad . \quad . \quad (7)$$

Diese Gleichung schreibt sich auch:

$$1 + k \, tang^2 \alpha = \left(\frac{H_0}{H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2)}\right)^2,$$

oder

$$H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2) = H = \frac{H_0}{\sqrt{1 + k \, tang^2 \alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

woraus weiter

$$y = \sqrt{y_0^2 + \frac{2 H_0}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \, tang^2 \alpha}}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

sich ergiebt, welche Gleichung die Ordinate y für irgend welchen Neigungswinkel α der Stützlinie bestimmt.

Um auch die Krümmungsverhältnisse der Stützlinie zu ermitteln, hat man wieder den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{(1+tang^2\,\alpha)^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{1}{cos^3\,\alpha\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad \ldots (10)$$

zu benutzen, welche Gleichung mit Rücksicht auf (5) und (8) übergeht in:

$$\varrho = \frac{H}{cos^3\,\alpha\,y\,(1+k\,tang^2\,\alpha)} = \frac{H_0}{y\,cos^3\,\alpha\,(1+k\,tang^2\,\alpha)^{3/2}} \quad \ldots (11)$$

Setzt man ferner wieder den Modulus des Gewölbes $\frac{r}{y_0} = a$, und den Schub im Scheitel $H_0 = r y_0 = a y_0^2$, so erhält man hiermit aus (9) und (11) die Gleichungen:

$$y = y_0 \sqrt{1 + \frac{2a}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k\,tang^2\,\alpha}}\right)} \quad \ldots (12)$$

und

$$\varrho = \frac{a\,y_0}{cos^3\,\alpha\sqrt{(1+k\,tang^2\,\alpha)^3\left[1+\frac{2a}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+k\,tang^2\,\alpha}}\right)\right]}} \quad (13)$$

Kennt man den von der Beschaffenheit der Erdmasse abhängigen Coefficienten k, so lassen sich mit Hülfe dieser letzteren Formel die Krümmungshalbmesser der Stützlinie für beliebig viele Punkte berechnen, sobald man noch über den Modulus $a = \frac{r}{y_0}$ eine Annahme macht. Dieser Modul wird bei den hier in Betracht kommenden Tunnelgewölben wegen der meist hohen Scheitelbelastung y_0 immer nur einen kleinen Werth haben. Nach dem in §. 8 über den Erddruck Gesagten kann man

$$k = tang^2\,\frac{90^0 - \varrho}{2}$$

annehmen, und erhält für mittlere Erde, deren Reibungswinkel $\varrho = 36^0\,40'$ ist

$$k = tang^2\,\frac{90^0 - 36^0\,40'}{2} = tang^2\,26^0\,40' = 1/4.$$

Für diesen Werth von k hat Schwedler folgende Tabelle der Krümmungshalbmesser für die Werthe des Moduls $a = 3,\ 1,\ 0{,}5$ und $0{,}1$ berechnet, in welcher wiederum die Ordinate y_0 der Scheitelbelastung als Einheit angenommen ist.

Tabelle der Krümmungshalbmesser ϱ für Stützlinien mit Erddruck.

$$\varrho = \frac{a y_0}{\cos^3\alpha \sqrt{(1 + k\, tang^2\alpha)^3 \left[1 + \frac{2a}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k\, tang^2\alpha}}\right)\right]}},$$

$$y_0 = 1,\ k = 1/4.$$

$\alpha =$	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	90^0
$a = 3$	2,99	2,90	2,94	3,04	3,4	4	4,8
$a = 1$	1,02	1,07	1,19	1,34	1,62	2	2,7
$a = 0,5$	0,51	0,55	0,64	0,75	0,95	1,25	1,8
$a = 0,1$	0,103	0,113	0,134	0,168	0,225	0,317	0,6

Den Werthen dieser Tabelle entsprechend ist in Fig. 79 die Stützlinie für den Modul $a = 0,5$ in der Weise gezeichnet, wie früher gelegentlich der Fig. 76 angegeben wurde. Zur einfacheren Construction einer angenäherten Form schlägt Schwedler vor, eine aus mehreren Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie zu wählen, und zwar soll man für die vorliegende, dem Modul $a = 0,5$ entsprechende Stützlinie, dem Scheitelradius $\mathfrak{r}_1$ eine Größe gleich $0,5\, y_0$ geben, die Halbmesser $\mathfrak{r}_1 = o_1 A_1$, $\mathfrak{r}_2 = o_2 A_2$ und $\mathfrak{r}_3 = o_3 A_3$ in dem Verhältnisse wie $1 : 1,5 : 2,5$ annehmen, und jedem der drei Bögen $A A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ einen Centriwinkel von 30^0 geben. Unter dieser Voraussetzung würde die Spannweite $A_3 A_3$, die sich allgemein durch

$$l = 2\left[\mathfrak{r}_1 \sin\alpha' + \mathfrak{r}_2 (\sin\alpha'' - \sin\alpha') + \mathfrak{r}_3 (\sin\alpha''' - \sin\alpha'')\right]$$

ausdrückt, zu

$$l = 2,77\ \mathfrak{r}_1$$

sich ergeben, oder man hätte

$$\mathfrak{r}_1 = 0,361\ l,$$

folglich

$$\mathfrak{r}_2 = 1,5\ \mathfrak{r}_1 = 0,542\ l$$

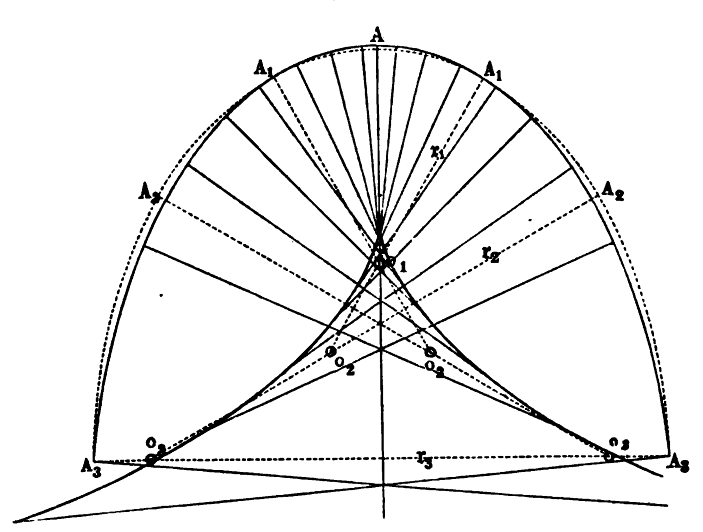
und

$$\mathfrak{r}_3 = 2,5\ \mathfrak{r}_1 = 0,903\ l.$$

Die Halbmesser und die angenäherte Korblinie sind in der Figur durch punktirte Linien angegeben.

Für einen größeren Modul, wie etwa für $a = 1$ bis zu $a = 3$, genügen danach zwei Kreisbogen für jede Gewölbhälfte, von denen jeder einem

Fig. 79.



Centriwinkel von 45° entspricht (s. die Abhandlung von Schwedler an vorgedachter Stelle).

Bei der vorstehenden Untersuchung ist, wie bereits bemerkt worden, das Eigengewicht des Gewölbes nicht berücksichtigt worden. Ebenso ist dabei angenommen, daß die horizontale Componente E des Erddruckes auf ein beliebiges Element der Wölbfläche proportional mit dessen Verticalprojection und unabhängig von der Neigung dieses Elementes gegen den Horizont ist. Letztere Annahme wird nun mit dem im Cap. I über den Erddruck Gesagten sich nicht vereinbaren lassen, da hiernach sowohl die Richtung wie die Größe des Erddruckes gegen eine Fläche mit deren Neigung veränderlich ist. Die Durchführung einer Rechnung, welche diese Abhängigkeit des Erddruckes auf die verschiedenen Gewölbtheile von deren Neigung berücksichtigt, würde kaum möglich sein, wogegen eine graphische Behandlung des vorliegenden Falles keinerlei Schwierigkeiten darbietet. Es soll daher im Folgenden auf graphischem Wege die Aufgabe gelöst werden, für ein Tunnelgewölbe die Stützlinie oder diejenige Form des Gewölbes zu ermitteln, bei welcher die Mittellinie zu einer Stützlinie wird, und soll dabei nicht nur die erwähnte Abhängigkeit des Erddruckes von der Neigung der Gewölbflächentheile, sondern auch das Eigengewicht des Gewölbes berücksichtigt werden.

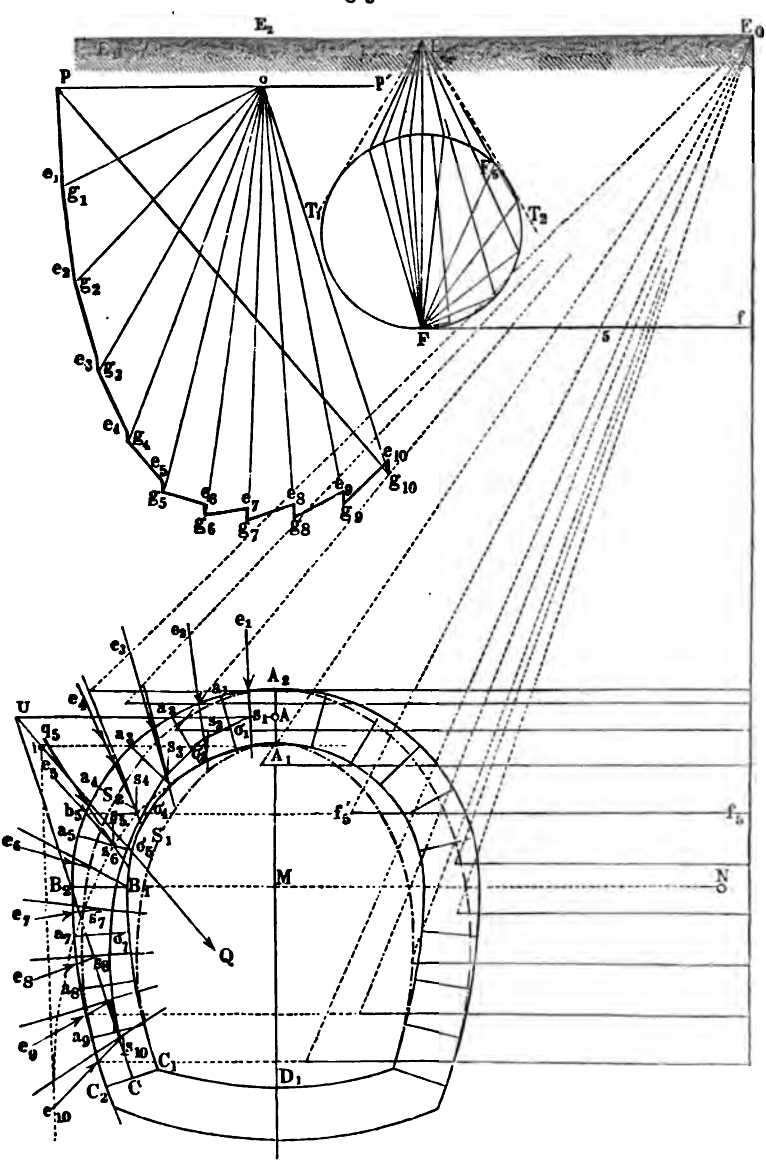
Um zu dieser vortheilhaftesten Gewölbform zu gelangen, könnte man nun zwar von irgend einer ganz beliebigen Gewölbform ausgehen, welche durch die aus der Stützlinie sich ergebende Correction in die geforderte günstigste Form übergeführt würde, doch wird es sich empfehlen, zum Ausgangspunkte der Construction eine Gewölbform zu wählen, welche erfahrungsmäßig der betreffenden noch zu suchenden Stützlinie schon nahe kommt, wodurch man eine öftere Wiederholung der Correctionen wird vermeiden können.

Demgemäß sei denn, entsprechend den in der Praxis meist gebräuchlichen Tunnelprofilen von annähernd elliptischer Form, zunächst ein Tunnelgewölbe von dem Profile $A_1 B_1 C_1 D_1$, Fig. 80, vorausgesetzt, welches oberhalb durch einen Halbkreis zum Mittelpunkte M und Radius MA_1, zu jeder Seite durch einen flachen Kreisbogen $B_1 C_1$ zum Mittelpunkte N und unterhalb ebenfalls durch einen flachen Kreisbogen $C_1 D_1$ begrenzt sein soll. Die Gewölbstärke sei überall gleich $d = A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2$ angenommen und vorausgesetzt, daß die horizontale Oberfläche $E_1 E_2$ der Erde eine Höhe $E_2 A_2 = h = 9$ m über dem Scheitel A_2 des Tunnels habe. Das specifische Gewicht der Erde sei zu $\gamma = 1600$ kg, der natürliche Böschungswinkel zu $\varphi = 30^0$ angenommen, und vorausgesetzt, daß auf eine Cohäsion derselben nicht zu rechnen sei, wie dies bei Dammschüttungen der Wirklichkeit entsprechen wird. Wenn dagegen die Erde, wie bei Tunnelausführungen anzunehmen ist, eine gewisse Cohäsion besitzt, so gewährt die Vernachlässigung derselben eine gewisse Sicherheit, indem die Druckkräfte der Erde dann in Wirklichkeit geringer sein werden, als unter der Voraussetzung einer cohäsionslosen Masse gefunden wird. Das specifische Gewicht der Mauermasse sei zu $\gamma_1 = 2000 \text{ kg} = {}^5/_4\,\gamma$ vorausgesetzt, und es mögen sämmtliche Kräfte als die Gewichte von Erdprismen angesehen werden, deren Basis 1 m breit und 5 m lang ist, so daß in bekannter Art die Höhen dieser Prismen die einzelnen Kräfte darstellen, und daß also jede Strecke, welche nach dem Längenmaßstabe der Figur ($^1/_{100}$) 1 m bedeutet, im Kräfteplane einer Kraft von $5 . 1600 \text{ kg} = 8$ Tonnen entspricht. Es ergiebt sich daher, daß die Volumina der Gewölbtheile durch eine Vergrößerung im Verhältnisse von $\gamma : \gamma_1 = 4 : 5$ auf Erdmassen reducirt werden müssen.

Um nun die einzelnen Kräfte zu ermitteln, sei das halbe Gewölbe ABC (mit Ausnahme der Sohle), in eine beliebige Anzahl von Theilen durch die radialen Fugen durch $a_1, a_2, a_3 \ldots$ getheilt. In der Figur ist der obere Theil AB in sechs unter sich gleiche Theile und der Seitentheil BC in vier ebenfalls gleiche Theile zerlegt. Es ist nun leicht, die Gewichte $g_1, g_2, g_3 \ldots g_{10}$ dieser Theile in der angegebenen Weise durch Strecken darzustellen, welche den Höhen der Erdprismen gleich sind, die bei gleichem Gewichte mit den Gewölbtheilen die gemeinsame Basis von 5 qm zur Grundfläche haben. Die Ausführung der zu dieser Reduction dienenden Verwandlung

ist, als hinreichend bekannt, in der Figur nicht näher angegeben. Die Gewichte $g_1 \ldots g_{10}$, von denen nach dem Vorstehenden g_1 bis g_6 und g_7 bis

Fig. 80.



g_{10} unter sich gleiche Größe haben, wirken in den Schwerpunkten s_1, $s_2 \ldots s_{10}$ der einzelnen Gewölbsectoren, welche in bekannter Weise leicht zu bestimmen sind, wenn man die Profile der einzelnen Gewölbtheile als Trapeze ansieht.

Um nun die Größe und Richtung des Erddruckes für jeden der einzelnen Gewölbtheile zu ermitteln, kann man sich am besten der aus der Mohr'schen Theorie des Erddruckes (s. §. 4) gefolgerten Regeln bedienen. Zu dem Ende sei eine Verticallinie EF durch irgend einen Punkt E der Erdoberfläche gezogen und darauf eine beliebige Strecke EF (in der Figur 4 m), abgetragen. Werden dann ferner an EF unter dem Reibungswinkel $\varphi = 30^0$ die beiden Geraden ET_1 und ET_2 gelegt, so erhält man bekanntlich in dem diese Geraden berührenden und durch F gehenden Kreise K ein Mittel zur Bestimmung des specifischen Erddruckes für irgend ein Flächenelement in F, d. h. in einer Tiefe EF unter der Oberfläche. Danach ergiebt sich nun leicht folgende Construction:

Um für irgend einen Gewölbtheil, z. B. den zwischen a_4 und a_5 gelegenen, den Erddruck zu bestimmen, kann man die Fläche $a_4 a_5$ genügend genau als eine Ebene betrachten. Zieht man daher durch F eine Parallele FF_5 mit $a_4 a_5$, so erhält man nach §. 4 in der Strecke EF_5 das Maß für die specifische Spannung eines in der Tiefe EF unter der Erdoberfläche gelegenen Flächenelementes, das mit $a_4 a_5$ parallel ist. Da nun der specifische Druck proportional mit der Tiefe wächst, so hat man, um die Pressung für $a_4 a_5$ zu erhalten, auf der Horizontalen durch F nur die Strecke EF_5 gleich $f\,5$ anzutragen, durch die Mitte b_5 zwischen a_4 und a_5 eine Horizontale $b_5 f_5$ zu ziehen, auf welcher die durch E_0 und 5 gezogene Gerade das Stück $f_5 f_5'$ abschneidet, welches die mittlere specifische Pressung des Erddruckes auf das Element $a_4 a_5$ darstellt. Daher ist der Erddruck auf diese Fläche $a_4 a_5$ gegeben durch das Gewicht eines Erdprismas von der Höhe $f_5 f_5'$ und einer Basis, deren Breite gleich $a_4 a_5$, und deren Länge senkrecht zur Figur 1 m ist. Die Reduction dieses Prismas auf die gemeinsame Basis 5 qm liefert die Strecke für den gesuchten Erddruck. Die Richtung dieses Druckes ist ebenfalls durch den Kreis K festgestellt, denn nach §. 4 giebt FEF_5 den Winkel δ an, unter welchem der Erddruck gegen die Normale zur Fläche $a_4 a_5$ geneigt ist, so daß der Erddruck in der Richtung $e_5 b_5$ angetragen werden kann.

In derselben Weise ist nun für jeden Gewölbtheil der Erddruck bestimmt und seine Richtung in den Mitten der gedrückten Flächen angetragen ($e_1, e_2, e_3 \ldots e_{10}$). Um alsdann den Erddruck e jedes Elementes mit dem Gewichte g desselben zu vereinigen, ist nun das Kräftepolygon $p\, e_1 g_1 e_2 g_2 \ldots e_{10} g_{10}$ gezeichnet, indem die einzelnen Kräfte e und g ihrer Aufeinanderfolge gemäß von einem beliebigen Punkte p aus aneinander gefügt sind. Man ersieht

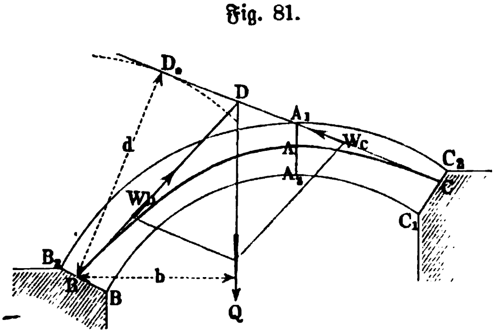
hieraus zunächst, daß die Eigengewichte g der einzelnen Gewölbsegmente gegen den Erddruck derselben nur sehr gering sind. Um nun die Mittelkraft aus e und g für irgend ein Element, z. B. $a_4 a_5$ zu finden, hat man nur im Kräftepolygon die Punkte g_4 und g_5 zu verbinden, so erhält man in der Strecke $g_4 g_5$ der Richtung und Größe nach die Mittelkraft q_5 aus dem Eigengewichte g_5 und dem Erddrucke e_5 des Elementes $a_4 a_5$, und zwar hat man sich den Durchschnittspunkt dieser beiden Kräfte als den Angriffspunkt der Mittelkraft q_5 zu denken. Ist diese Construction von $q_1, q_2, q_3 \ldots$ für sämmtliche Theile des Gewölbes durchgeführt, so ist es leicht, die resultirende Kraft Q aller dieser Kräfte $q_1 q_2 \ldots q_{10}$ zu bestimmen. Die Größe und Richtung derselben ist schon aus dem Kräfteplane durch die Strecke $p g_{10}$ gegeben, und um auch die Lage von Q festzustellen, kann in bekannter Weise ein Seilpolygon dienen, welches man mit Hülfe eines willkürlich angenommenen Poles p' zeichnet. Dieses Seilpolygon ist in der Figur punktirt angedeutet, und der Durchschnittspunkt i des ersten Seiles mit dem letzten ist bekanntlich ein Punkt der Resultirenden Q, welche letztere also in der durch i zu $p g_{10}$ gezogenen Parallele gefunden ist. Um nunmehr die Stützlinie zu zeichnen, welche durch die Mitte A der Scheitelfuge und die Mitte C der untersten Fuge $C_1 C_2$ geht, hat man wieder durch A eine Horizontale bis zum Durchschnitte U mit der Resultirenden zu ziehen, um in der Geraden CU die Richtung und Lage der Widerstandskraft in C zu finden. Zieht man daher mit CU eine Parallele durch g_{10} im Kräftepolygone, so schneidet dieselbe auf der Horizontalen durch p die Strecke po ab, welche den Horizontalschub H im Scheitel darstellt. Die Zeichnung des Seilpolygons für den gefundenen Horizontalschub H oder Pol o macht nun keine Schwierigkeiten, und wenn man die Schnittpunkte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$, in welchen die Fugen von den entsprechenden Seiten des Seilpolygons getroffen werden, mit einander durch eine stetige Curve $A \sigma_1 \sigma_2 \ldots C$ verbindet, so stellt diese die gesuchte Stützlinie des Gewölbes vor.

Wie aus der Figur zu ersehen ist, fällt diese Stützlinie zwar überall in die Gewölbstärke hinein, doch hat sie mit der Mittellinie des Gewölbes außer den Punkten A im Scheitel und C im Kämpfer keinen Punkt gemein. Am meisten nähert sich die Stützlinie der inneren Leibung zwischen den Punkten σ_4 und σ_5. Wenn nun die Aufgabe gestellt ist, die Gewölbform so zu entwerfen, daß die Mittellinie eine Stützlinie wird, so hat man nur nöthig, zu beiden Seiten dieser Stützlinie $A \sigma_1 \sigma_2 \ldots C$ zwei parallele Curven $A_1 S_1 C_1$ und $A_2 S_2 C_2$ zu ziehen, von welchen jede von der Stützlinie $A \sigma C$ um die halbe Gewölbdicke entfernt ist, und dann sind diese beiden Curven als die Profile für die innere und äußere Leibung anzusehen. Allerdings wird durch die so vorgenommene Veränderung der Gewölbform auch eine Aenderung in der Druckvertheilung herbeigeführt werden, so daß die nunmehr dem Ge-

wölbe zugehörige Stützlinie nicht mehr genau mit $A\,\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,C$ zusammenfällt. Zeichnet man daher in der vorgedachten Weise durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens die neue Stützlinie, und betrachtet diese letztere als Mittellinie, so wird nunmehr die damit verbundene Abänderung so gering ausfallen, daß man die gefundene Form als die der Aufgabe entsprechende ansehen darf.

§. 25. **Unsymmetrische Gewölbe.** Bisher wurde immer eine gegen den Scheitel des Gewölbes symmetrische Form und Belastung desselben vorausgesetzt, in Folge dessen es genügte, eine Hälfte des Gewölbes zu betrachten, indem unter dieser Voraussetzung die Stützkraft H im Scheitel sowie die Tangente der Stützlinie daselbst die horizontale Richtung haben, und auch die Stützlinie zu beiden Seiten symmetrisch ausfallen muß. Wenn dagegen hinsichtlich der Form, oder der Belastungsart oder in Bezug auf beide Elemente zu beiden Seiten des Scheitels eine Verschiedenheit vorhanden ist, so wird auch die Stützlinie

Fig. 81.



nicht mehr symmetrisch sein. Es wird in dem Scheitel, d. h. an der höchsten Stelle $A_1 A_2$, Fig. 81, des Gewölbes im Allgemeinen weder die Stützlinie noch die Stützkraft horizontal sein, vielmehr wird dies an einer anderen Stelle stattfinden, deren Lage von der Form und Lastvertheilung des Gewölbes abhängt. Es ist daher nöthig, diesen allgemeinen Fall noch einer besonderen Behandlung zu unterziehen, welche mit Rücksicht auf das Vorhergegangene besondere Schwierigkeiten nicht darbietet.

Während es nach dem Vorhergehenden (s. §. 18) für ein symmetrisches Gewölbe, dessen Lastvertheilung gegeben ist, zur Construction der Stützlinie genügt, irgend zwei verschieden hoch gelegene Punkte derselben zu kennen, reicht diese Bedingung für ein unsymmetrisches Gewölbe nicht mehr aus, wie sich leicht übersehen läßt. Denn nimmt man z. B. für das Gewölbe BAC, Fig. 81, dessen resultirende Gesammtbelastung Q in die Richtung DQ fallen möge, irgend zwei Punkte B und C an, durch welche die Stützlinie hindurchgehen soll, so läßt sich das Gleichgewicht zwischen der Belastung Q und zwei von B und C geäußerten Stützreactionen W_b und W_c in unendlich verschiedener Art herstellen. Man kann nämlich irgend welchen Punkt D in

der Richtung von Q mit B und C verbinden, und erhält durch die Zerlegung von Q nach den beiden Richtungen DB und DC die gesuchten Stützreactionen W_b und W_c. Zur Beseitigung dieser Unbestimmtheit ist daher noch die Kenntniß eines dritten Elementes erforderlich, sei dies die Richtung oder die Größe einer der Stützreactionen, oder sei es ein dritter Punkt, durch welchen die Stützlinie ebenfalls hindurchgeht.

Ist z. B. außer B und C die Richtung der Reaction W_b gegeben, so ist damit auch der Schnittpunkt D unzweifelhaft festgestellt. Ebenso ist dies der Fall, wenn eine der Stützkräfte, z. B. W_c in C nur ihrer Größe nach, nicht aber ihrer Richtung nach bekannt ist, denn in diesem Falle erfordert das Gleichgewicht in Bezug auf den anderen Stützpunkt B, daß die Gleichung erfüllt sei:

$$Qb = W_c d,$$

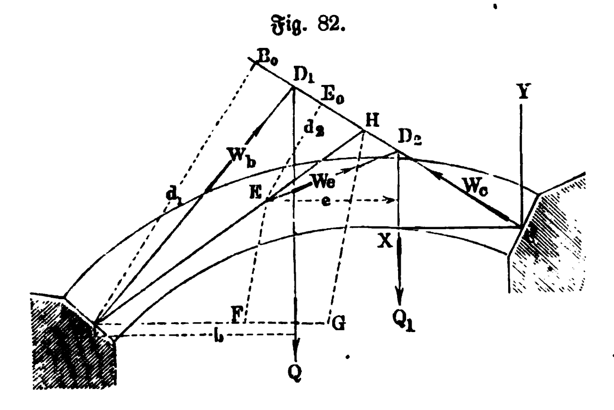
wenn b und d die betreffenden Hebelarme bedeuten. Zeichnet man daher mit dem aus obiger Gleichung zu berechnenden Hebelarme

$$d = \frac{Qb}{W_c}$$

als Radius einen Kreis um B, so giebt die von C an diesen Kreis gezogene Tangente CD_0 die Richtung von W_c und in D den Schnittpunkt mit Q, durch welchen auch die andere Reaction W_b hindurchgeht.

Wenn von der Stützlinie drei beliebige Punkte B, C und E, Fig. 82 gegeben sind, so läßt sich die Stützlinie ebenfalls leicht folgendermaßen be-

Fig. 82.



stimmen. Ist wieder mit W_c die der Richtung und Größe nach unbekannte Reaction in C bezeichnet, deren verticale und horizontale Componenten bezw. V_c und H_c sein mögen, und denkt man C als Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit horizontaler X Axe, in welchem

x_e, y_e, x_b und y_b die Coordinaten von E und B sind, so hat man wieder, unter Q und Q_1 die Gewichte von CB und CE und unter b und e deren Hebelarme für B und E verstanden, die Gleichungen

$$Q\,b = H_c y_b + V_c x_b \text{ für } B$$

und

$$Q_1 e = H_c y_e + V_c x_e \text{ für } E.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind in jedem Falle die Componenten V_c und H_c der Stützreaction in C zu bestimmen, wodurch diese selbst ihrer Größe und Richtung nach festgestellt ist.

Man kann diese Reaction W_c aber auch graphisch leicht finden. Bezeichnet man nämlich mit d_1 und d_2 die Abstände der vorläufig noch unbekannten Richtung W_c von B und E, so hat man:

$$W_c d_1 = Q\,b \text{ für } B$$

und

$$W_c d_2 = Q_1 e \text{ für } E,$$

daher

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}.$$

Nun ist aber nach der Figur, wenn man BE zieht, auch

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BH}{EH} = \frac{Q\,b}{Q_1 e},$$

woraus die Construction unmittelbar folgt: Man trage auf einer beliebig durch B gezogenen Geraden BG in einem ebenfalls beliebigen Maßstabe die Strecken BG und FG proportional den Momenten Qb und $Q_1 e$ auf so daß

$$\frac{BG}{FG} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}$$

ist, ziehe FE und durch G eine Parallele damit bis zum Durchschnitte H mit BE, so erhält man in CH die Richtung der Stützkraft W_c in C, denn aus der Construction ergiebt sich

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BB_0}{EE_0} = \frac{BH}{EH} = \frac{BG}{FG} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}.$$

Man erhält dann in D_1 den Punkt, durch welchen die Stützkraft W_b in B und in D_2 denjenigen, durch welchen die Stützkraft W_e in E hindurchgehen muß u. s. w. Ueberhaupt kann nunmehr die Construction der Stützlinie in ihrem ganzen Verlaufe mit Hülfe des zugehörigen Kräftepolygons in der mehrfach besprochenen Weise vorgenommen werden.

Die für symmetrische Gewölbe gefundene Eigenschaft, wonach die Horizontalkraft für alle Punkte der Stützlinie denselben Betrag H hat, gilt all-

gemein auch für ein unsymmetrisch geformtes Gewölbe, welches durch verticale Kräfte in ganz beliebiger Weise belastet ist, und ebenso hat man für die verticalen Componenten V_b und V_c der Stützkräfte W_b und W_c zweier beliebigen Punkte B und C der Stützlinie die Beziehung

$$V_b + V_c = Q,$$

wenn Q die gesammte zwischen B und C auf das Gewölbe wirkende Belastung bedeutet. Bezeichnet allgemein V die verticale Componente in irgend einem Punkte der Stützlinie, so gilt für den Neigungswinkel α der Stützkraft gegen den Horizont in diesem Punkte ebenfalls die Gleichung

$$tang\ \alpha = \frac{V}{H}.$$

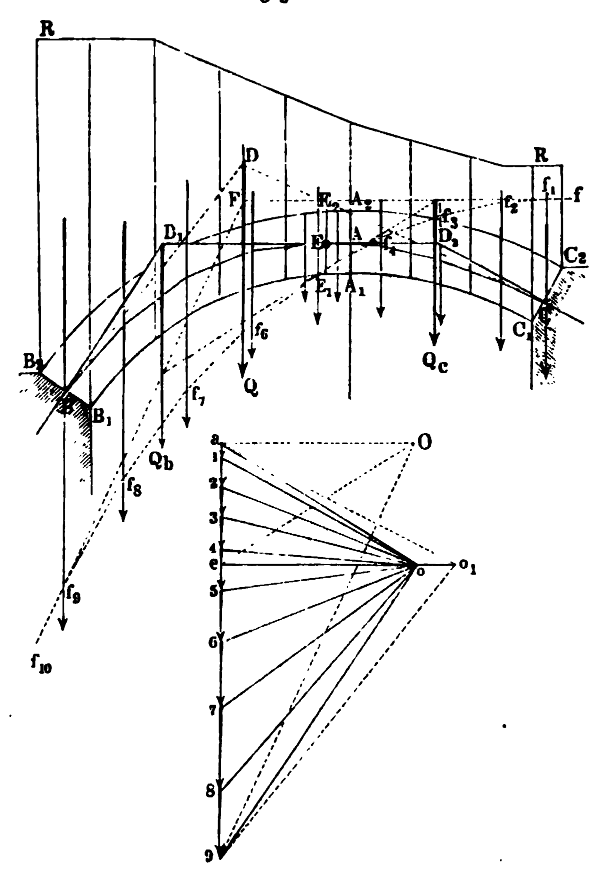
Dieser Winkel α wird demgemäß gleich Null sein für denjenigen Punkt, für welchen $V = 0$ ist. In diesem Punkte wird aber nicht bloß die Richtung der Stützkraft, sondern auch die Tangente an die Stützlinie horizontal sein, wie aus den früheren Betrachtungen sich folgern läßt. Dieser Punkt, in welchem $V = 0$ ist, stellt daher den höchsten oder Scheitelpunkt der Stützlinie dar, von welchem aus nach beiden Seiten den beiderseitigen Gewölbschenkeln entsprechend zwei verschiedene Zweige der Stützlinie ausgehen, welche beide in dem besagten Scheitel horizontal und ohne Knick in einander übergehen. Dieser höchste Punkt oder Scheitel der Stützlinie, welcher übrigens im Allgemeinen mit dem höchsten Punkte oder Scheitel des Gewölbes nicht in dieselbe Verticallinie fällt, kann nun als der Vereinigungspunkt angesehen werden, in welchem die Stützlinien der beiderseitigen Gewölbtheile zusammentreffen. Betrachtet man diese Gewölbtheile als die Hälften zweier symmetrischen Gewölbe, so ist offenbar die Untersuchung des unsymmetrischen Gewölbes auf diejenige des symmetrischen zurückgeführt, und die sämmtlichen im Vorstehenden gemachten Bemerkungen sind gültig.

Es handelt sich daher im Wesentlichen nur darum, in jedem besonderen Falle den besagten Scheitel der Stützlinie, d. h. den Punkt, für welchen $V = 0$ ist, zu bestimmen. Dieser Punkt wird in jedem Falle in demjenigen Verticalschnitte gelegen sein, welcher das gesammte Gewicht des Gewölbes Q so in zwei Theile Q_b und Q_c theilt, daß diese Theile gerade gleich den Verticalcomponenten V_b und V_c der Kämpferreactionen sind, denn aus der allgemeinen Gleichung $V_b + V = Q_b$ ergiebt sich mit $V_b = Q_b$ offenbar $V = 0$, d. h. die Bedingung für den Scheitel. Eine Ermittelung dieses Querschnittes wird in jedem besonderen Falle durch Rechnung oder Construction geschehen können, dagegen wird die Aufstellung allgemeiner Formeln nicht möglich sein, wenn Form und Belastungsart des Gewölbes ganz willkürlich angenommen werden. Am einfachsten wird man

die Bestimmung des Gewölbscheitels und der beiden Stützlinienzweige durch Construction bewirken, und zwar kann dies etwa folgenderart geschehen.

Es sei BAC, Fig. 83, der Querschnitt irgend eines Gewölbes, dessen Kämpferfugen durch $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ dargestellt sind, und dessen Scheitel

Fig. 83.



in der Verticalebene durch A gelegen ist. Die ganz beliebig vertheilte Belastung sei auf das specifische Gewicht des Gewölbmaterials reducirt und die Belastungslinie durch RR dargestellt. Es mögen zunächst die beliebigen Punkte B und C in den Kämpferfugen als Punkte der Stützlinie vorausgesetzt und es soll der noch zu suchende Scheitel der Stützlinie in der Mitte der Gewölbstärke liegend angenommen werden. Zunächst sucht man die Schwerlinie DQ des ganzen Gewölbes nebst Belastung, was am einfachsten mit

Hülfe des Kräfteplans $a\,1\,2\ldots 9$ geschieht, welcher in den einzelnen Strecken $a\,1$, $1\,2$, $2\,3\ldots 8\,9$ die Gewichte der einzelnen Streifen darstellt, in welche das Gewölbe durch eine Anzahl verticaler Ebenen zerlegt wird. Nimmt man ganz beliebig irgendwo einen Pol O an, und construirt mit Hülfe desselben das in der Figur punktirte Seilpolygon $f f_1 f_2 \ldots$, so erhält man bekanntlich in dem Schnittpunkte F der Endseile einen Punkt, durch welchen die Schwerlinie des ganzen Gewölbes hindurchgeht, dessen Gewicht nach dem gewählten Kräftemaßstabe durch die Strecke $a\,9$ dargestellt ist. Zieht man nun durch irgend einen Punkt D dieser Schwerlinie Strahlen nach B und C, und damit im Kräfteplane durch a und 9 Parallelen, welche sich in o_1 treffen, so erhält man in $a o_1$ und $o_1 9$ die Stützkräfte W_c und W_b gegen die Kämpfer in C und B; daher ist, wenn noch $o_1 e$ horizontal gezogen wird,

$$ae = V_c \text{ und } e\,9 = V_b.$$

Der Punkt e im Kräftepolygone entspricht dem Verticalschnitte $E_1 E_2$ im Gewölbe, und folglich muß in dieser Verticalebene der gesuchte Scheitel der Stützlinie liegen. Wählt man der Bedingung gemäß die Mitte E zwischen E_1 und E_2 als diesen Punkt der Stützlinie, so ist die letztere nunmehr leicht nach bekannten Regeln zu zeichnen. Sucht man nämlich mit Hülfe des Seilpolygons $f f_1 f_2 \ldots$ die Schwerlinien $D_1 Q_b$ und $D_2 Q_c$ der beiden Gewölbtheile EB und EC, so hat man nur durch E eine Horizontale bis zu diesen Verticalen zu ziehen, um in D_1 und D_2 Punkte zu erhalten, durch welche die Stützkräfte der Kämpfer in B und C hindurchgehen. Zieht man daher durch a eine Parallele mit $D_2 C$ und durch 9 eine Parallele zu $D_1 B$, so erhält man in dem Durchschnitte o dieser Linien, welcher übrigens auf der Horizontalen $o_1 e$ liegen muß, den Pol, mit dessen Strahlen oa, $o\,1$, $o\,2 \ldots oe$ der rechte Zweig EC der Stützlinie gezeichnet wird, während die Strahlen oe, $o\,5$, $o\,6 \ldots o\,9$ für den linksseitigen Zweig EB dienen. Die Strecke oe giebt die Größe des Horizontalschubes H, welcher, wie schon bemerkt worden, für das ganze Gewölbe constant ist, und die Zeichnung giebt über alle Verhältnisse genügend Aufschluß, wie z. B. über die Richtung der Stützkräfte durch die Neigung der Polstrahlen u. s. w.

Für jeden der beiden Zweige der Stützlinie gelten nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen für symmetrische Gewölbe angeführten Bemerkungen, und man kann beispielsweise die Form des Gewölbes derart verändern, daß die gefundene Stützlinie eine Mittellinie des Gewölbes wird. Mit dieser Veränderung ist dann zwar auch eine geringe Abänderung der Lastvertheilung verbunden, doch wird die Abweichung der nunmehrigen Stützlinie in den meisten Fällen so unbeträchtlich sein, daß eine Wiederholung derselben Construction für die neue Gewölbform nur ausnahmsweise nöthig werden wird.

§. 26. **Bewegliche Belastung.** In derselben Weise, wie vorstehend die Stabilitätsverhältnisse eines unsymmetrischen und beliebig belasteten Gewölbes geprüft worden sind, läßt sich die Untersuchung auch für ein symmetrisches Gewölbe führen, dessen beide Hälften in ungleicher Weise belastet werden. Dieser Fall gewährt deswegen ein besonderes Interesse, weil er bei allen Brückengewölben vorkommt, sobald eine bewegliche Last, z. B. ein Eisenbahnzug oder ein Frachtwagen über die Brücke fährt. Von dem Augenblicke an, in welchem diese bewegliche Last einen Kämpfer des Gewölbes überschreitet, wird die vorher im Gewölbe vorhandene symmetrische Stützlinie sich fortwährend verändern, indem der Scheitel der Stützlinie sich gleichzeitig mit der Last verschiebt, und es handelt sich daher noch darum, zu untersuchen, ob durch diese Verschiebung die Stabilität des Gewölbes nicht in bedenklicher Weise gefährdet wird. In dieser Beziehung kann man folgende Bemerkungen machen.

Es sei BAC, Fig. 84, ein zu MA symmetrisches Brückengewölbe, dessen Eigengewicht incl. der Fahrbahn, auf das Gewölbmaterial reducirt, durch

Fig. 84.

die Belastungslinie $N_1 M N_2$ dargestellt sein soll, während $D_1 M D_2$ die horizontale Fahrbahn sein möge. Für den unbelasteten Zustand wird die Stützlinie in der Mitte MA_1 eine horizontale Tangente haben, und es möge etwa angenommen werden, daß für diesen Zustand die Stützlinie durch die Mitten B und C der Kämpferfugen und A der Scheitelfuge gehe. Denkt man sich nun von links her eine bewegliche Last, etwa einen Eisenbahnzug ankommend, welcher bis zu einem beliebigen Punkte K um die Länge $D_1 K = \lambda$ sich bewege. Drückt man auch diese als gleichmäßig auf die Länge $D_1 K$ vertheilt anzunehmende bewegliche Last Q durch das Gewicht

eines Prismas von Gewölbmaterial aus, dessen Höhe zu $q = D_1 D_0 = K K_0$ ermittelt sein soll, so ist die Verkehrslast durch das Rechteck $D_1 K K_0 D_0$ vom Inhalte $q \lambda$ gegeben. Durch diese einseitige Belastung des Gewölbes wird der Scheitel der Stützlinie aus der Mittelebene MA um eine gewisse Größe nach links gerückt, und es möge etwa die Ebene $E_1 E_2$ im Abstande e von M nunmehr den Punkt der Stützlinie enthalten, in welchem ihre Tangente horizontal ist. Es sei ferner etwa E' dieser Punkt und H' die daselbst wirkende Horizontalkraft, sowie h' die verticale Höhe von E' über der Horizontalen BC. Die Ebene $E_1 E_2$ theilt die linke Gewölbhälfte BA in zwei Theile BE' und $E'A$, deren Gewichte, ohne Einschluß der beweglichen Last, bezw. durch G_1 und G_2 bezeichnet werden sollen, während a_1 und a_2 die Abstände dieser Gewichte vom Kämpfer B, also $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ die betreffenden Momente sind. Wenn man nun auch die rechte Gewölbhälfte AC durch eine Ebene $F_1 F_2$, ebenfalls im Abstande e von M, in zwei eben solche Theile von den Gewichten G_1 und G_2 und den Momenten $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ in Bezug auf C getheilt denkt, so kann man, unter $2l = BC$ die horizontale Entfernung der Kämpferstützen verstanden, für die beiden im Scheitel E' der Stützlinie zusammenstoßenden Gewölbtheile BE' und CE' die beiden Gleichgewichtsbedingungen schreiben:

$$H'h' = G_1 a_1 + q \lambda \frac{\lambda}{2} \text{ für } BE'$$

und

$$H'h' = G_1 a_1 + G_2 a_2 + G_2 (2l - a_2) = G_1 a + G_2 2l \text{ für } CE',$$

daher erhält man durch Subtraction:

$$q \frac{\lambda^2}{2} = G_2 2l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Aus dieser einfachen Gleichung läßt sich jederzeit für eine bestimmte einseitige Belastung die Verschiebung e des Scheitels der Stützlinie aus der Gewölbmitte dadurch bestimmen, daß man der jeweiligen Form und Construction der Brücke entsprechend dasjenige Stück des Gewölbes AE' ermittelt, dessen Gewicht

$$G_2 = \frac{q \lambda^2}{4l}$$

gegeben ist, und man ersieht auch, daß die Rechnung dieselbe bleibt, wenn die bewegliche Last Q nicht gleichmäßig vertheilt, sondern in einem oder mehreren Punkten concentrirt angenommen werden müßte, in welchem Falle man anstatt $q \frac{\lambda^2}{2}$ nur das Moment dieser concentrirten Belastung für den Punkt B in die Rechnung einzuführen hätte. In den meisten Fällen der

Wirklichkeit wird man indessen, wie hier geschehen, eine gleichmäßige Vertheilung der Last annehmen dürfen, da auch concentrirte Lasten, wie die Drucke der Wagenräder durch die Erdschüttung und das Pflaster, bezw. durch die Schienen und Schwellen und deren Bettung sich auf eine größere Fläche des eigentlichen Gewölbes übertragen.

Die gefundene Beziehung $G_2 = \frac{q \lambda^2}{4 l}$ zeigt, daß mit zunehmendem Momente $q \frac{\lambda^2}{2}$ der einseitigen Last Q auch das Gewicht G_2 des zwischen A und E' gelegenen Gewölbtheiles, und folglich auch die Größe $ME' = e$ zunimmt. Dieses Verhalten gilt aber nur so lange, als die von D_1 aus vorrückende Last den veränderlichen Scheitel E' der Stützlinie noch nicht überschreitet, da von dem Augenblicke an, wo letzteres geschieht, die thatsächlichen Verhältnisse sich anders gestalten, als bei vorstehender Entwickelung vorausgesetzt wurde. Man findet leicht, daß der stattfindende Vorgang sich folgendermaßen darstellen läßt.

Wenn eine bewegliche Last über die Brücke geführt wird, so bewegt sich der Scheitel der Stützlinie aus seiner mittleren Lage in der Ebene MA der Last Q so lange entgegen, also von rechts nach links, wenn die Last bei D_1 ankommt, bis die Last und der Scheitel der Stützlinie sich in einem Abstande e vom Scheitel begegnen, welcher durch die Gleichung

$$q \frac{(l - e)^2}{2} = G_2 \, 2 l \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

gegeben ist, die man aus der oben gefundenen allgemeinen Gleichung (1) erhält, sobald man darin für λ den Werth $l - e$ und für G_2 das Gewicht des Gewölbstückes zwischen dem Scheitel und dem Begegnungspunkte einführt. Bei einer weiteren Bewegung der Last kehrt der Scheitel der Stützlinie, wie leicht zu erkennen ist, seine Bewegung um, indem er nunmehr in gleicher Richtung wie die Last sich bewegt, und zwar so, daß er wieder nach der Mitte M gelangt, sobald die Last q bis zu dem rechten Kämpfer D_2 vorgeschritten ist, also die Brücke gleichmäßig über die ganze Spannweite einer specifischen Belastung q unterworfen ist. Denkt man sich nun die bewegliche Last von beschränkter Erstreckung, so daß das Ende der Last in einem gewissen Augenblicke den linken Kämpfer D_1 überschreitet, so setzt von diesem Augenblicke an der Scheitel der Stützlinie seine Bewegung nach rechts fort, und zwar ebenfalls bis zu einem Punkte in demselben Abstande e wie vorher vom Scheitel. Diese äußerste Verschiebung der Stützlinie findet in demjenigen Augenblicke statt, in welchem auch das Ende der beweglichen Last bis zu diesem Punkte vorgeschritten ist, daher die Brücke nunmehr in der rechten Hälfte einer Belastung auf die Länge $l - e$ vom Kämpfer D_2 aus unter-

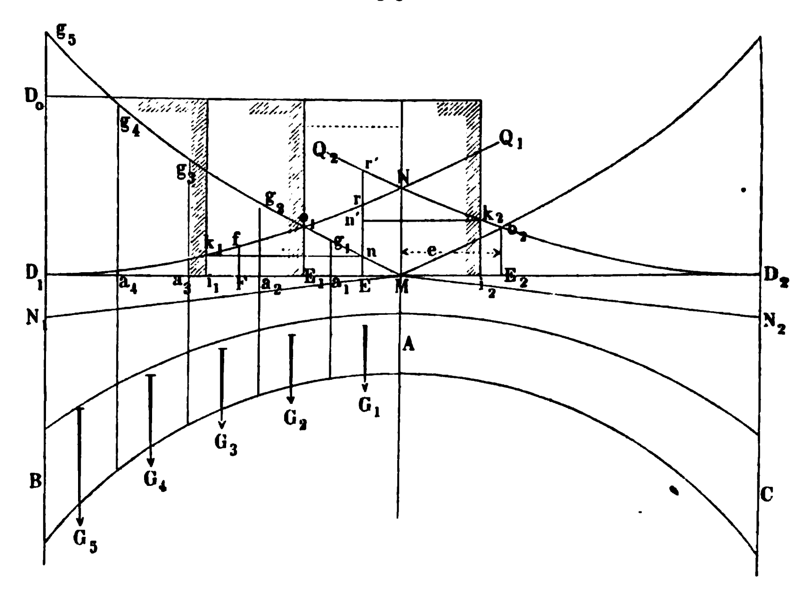
worfen ist. Bei weiterer Ueberführung der Last kehrt dann der Scheitel der Stützlinie wieder nach der Mitte M zurück, welche er erreicht, sobald die Last in dem Punkte D_2 angekommen ist, die Brücke also nur noch ihrem Eigengewichte ausgesetzt ist, wie zu Anfang des betrachteten Vorganges. Ein analoges Verhalten muß natürlich eintreten, wenn die Last die Brücke in der entgegengesetzten Richtung überschreitet; in jedem Falle wird ein einfaches Ueberführen der Last den Scheitel der Stützlinie zu einer Doppelschwingung aus der Mitte M des Gewölbes nach der einen Seite um die Länge e, dann zurück durch die Mitte nach der anderen Seite um e und wieder zurück nach der Mitte veranlassen. Es ist danach klar, daß bei einer Belastung von einer Hälfte des Gewölbes der Scheitel der Stützlinie von der Gewölbmitte einen Abstand nach der belasteten Hälfte hin hat, welcher kleiner als der gedachte Werth e ist.

Die größte Verschiebung e des Scheitels der Stützlinie wird daher durch Gleichung (2) gegeben sein, und man wird die derselben entsprechende einseitige Belastung als die für den Gleichgewichtszustand der Brücke ungünstigste anzusehen und zu untersuchen haben, ob bei derselben die Stützlinie nicht den Wölbflächen zu nahe tritt, und zwar der äußeren Wölbfläche auf der belasteten und der inneren Wölbfläche auf der unbelasteten Seite. Die Zeichnung der Stützlinie für diesen äußersten Belastungszustand ist, da man nach (2) die Verticalebene für den Scheitel kennt, nach dem Vorangegangenen jederzeit leicht auszuführen. Die Lage des Scheitelpunktes E' selbst ist in der Ebene $E_1 E_2$ noch in gewissem Maße willkürlich, und man hat zu untersuchen, ob sich wenigstens ein Punkt darin angeben läßt, für welchen als Scheitel die Stützlinie ganz innerhalb des Kernes verbleibt. Würde man etwa finden, daß für eine gewählte Lage E des Scheitels der Stützlinie die letztere auf der belasteten Seite die äußere Kernbegrenzung durchschnitte, auf der unbelasteten Seite aber die innere Kernbegrenzung noch nicht erreichte, so hätte man zu untersuchen, ob man durch eine entsprechende Senkung des Scheitelpunktes und damit der ganzen Stützlinie parallel zu sich selbst den Zweig der belasteten Hälfte in das Innere des Kerns zurückziehen kann, ohne daß der andere Zweig in Folge der Senkung die innere Kernbegrenzung durchschneidet. Würde aber ein solches Durchschneiden dadurch herbeigeführt werden, so hätte man die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern. Würde sich für die gedachte ungünstigste einseitige Belastung eine Stützlinie ergeben, welche auf der einen Seite vom Scheitel die äußere, auf der anderen Seite die innere Kernbegrenzung berührte, so ist leicht einzusehen, daß diese Stützlinie die einzig mögliche wäre, denn sowohl eine Veränderung in der Höhenlage des Scheitels wie eine Aenderung der Horizontalkraft würde den einen oder anderen Zweig der Stützlinie aus der betreffenden Kernbegrenzung heraustreten lassen. In diesem Falle wäre

das Gewölbe für den betrachteten Zustand der einseitigen Belastung im labilen Gleichgewichte, während dabei jedoch nicht ausgeschlossen ist, daß das Gewölbe für symmetrische Belastung eine gewisse Stabilität besitzen kann, d. h. daß es für diesen Zustand verschiedene Stützlinien giebt, für welche das Gleichgewicht möglich ist. Es ist zwar die bewegliche Last in den meisten Fällen, besonders bei kleinen Spannweiten, gegen das beträchtliche Eigengewicht der Brücken nur von untergeordneter Bedeutung, doch kann in besonderen Fällen, namentlich bei größeren Spannweiten, die seitliche Verschiebung des Scheitels erheblich genug werden, um eine besondere Prüfung der Stabilität mit Rücksicht auf die beweglichen Lasten nöthig zu machen.

Die Größe e der seitlichen Verschiebung des Scheitels der Stützlinie aus der Mitte des Gewölbes ist zwar mit Hülfe der Gleichungen (1) oder (2) für jedes Gewölbe und jede einseitige Belastung einfach zu berechnen, doch läßt sich die betreffende Ermittelung auch aus einer Zeichnung entnehmen, welche zugleich

Fig. 85.



ein anschauliches Bild von dem betreffenden Vorgange gewährt. Zu dem Ende sei BAC, Fig. 85, ein symmetrisches Gewölbe mit der Belastungslinie $N_1 M N_2$, und es sei $D_1 D_0 = q$ die der mobilen Last zugehörige Belastungshöhe. Man denke sich dann jede Gewölbhälfte durch verticale Ebenen in $a_1 a_2 a_3 \ldots$ in eine Anzahl Lamellen getheilt, und in bekannter Art die Gewichte $G_1 G_2 G_3 \ldots$ dieser Lamellen bestimmt. Trägt man dann auf den durch die Theilpunkte a gezogenen Verticalen die Strecken $a_1 g_1$, $a_2 g_2$, $a_3 g_3 \ldots$ so auf, daß jede dieser

Ordinaten nach einem gewählten Kräftemaßstabe das Gewicht des zwischen dieser Ordinate und der Gewölbmitte M gelegenen Gewölbtheils darstellt, daß also

$$a_1 g_1 = G_1;\ a_2 g_2 = G_1 + G_2;\ a_3 g_3 = G_1 + G_2 + G_3$$

u. s. w. ist, so erhält man durch die Endpunkte $g_1 g_2 g_3 \ldots$ eine gewisse Curve $M g_1 g_2 g_3 \ldots$ auf jeder Seite der Gewölbmitte. Die Ordinate dieser Curve in irgend einem Punkte wie z. B. En in E kann nun auch als das Maß für das in der Gleichung (1) vorkommende Moment $G_2 . 2l$ angesehen werden, vorausgesetzt, daß man den Hebelsarm $2l$ d. h. die Spannweite BC des Gewölbes als Einheit des Hebelsarmes zu Grunde legt.

In derselben Weise kann man nun auch für das Gewölbe eine Curve $D_1 o_1 N$ zeichnen, deren Ordinate Ff in jedem Punkte F im Abstande $D_1 F = \lambda$ vom Kämpfer das Maß für das Moment $q \frac{\lambda^2}{2}$ der beweglichen Last bedeutet, die bis zu diesem Punkte F vorgerückt ist, wobei natürlich derselbe Kräftemaßstab wie für die Gewichte $g_1 g_2 \ldots$ und auch die Länge $2l$ als Einheit für den Hebelsarm zu Grunde zu legen ist. Diese Curve ist offenbar eine Parabel mit dem Scheitel in D_1 und deren Ordinate in der Mitte oder für $\lambda = l$

$$MN = q \frac{l^2}{2} \frac{1}{2l} = q \frac{l}{4}$$

ist. Hat man also diese Größe, d. h. die Strecke für die Belastung einer Länge $\frac{l}{4}$ bestimmt und gleich MN aufgetragen, so ist die Zeichnung der Parabel $D_1 o_1 N$ leicht ausgeführt. Eine symmetrische Parabel $D_2 o_2 N$ mit dem Scheitel in D_2 giebt in derselben Weise in ihren Ordinaten das Maß für die Momente der von D_2 aus aufgefahrenen Belastung in Bezug auf den Punkt D_2. So ist z. B. $i_2 k_2$ das Moment der von D_2 bis i_2 aufgefahrenen Belastung und Er' dasjenige der Last, wenn dieselbe die Strecke $D_2 E$ bedeckt, folglich erhält man auch in $n'r' = Er' - i_2 k_2$ das Moment einer die Strecke $E i_2$ bedeckenden Last q in Bezug auf den Punkt D_2. Hieraus folgt nun ohne Weiteres, daß die beiden symmetrisch zur Mitte M im Abstande e von derselben gelegenen Schnittpunkte o_1 und o_2 die Schwingungsweite für die vorstehend gedachte Verschiebung des Scheitels der Stützlinie ergeben, indem dieser Scheitel in die Verticalebene durch o_1 oder o_2 fällt, je nachdem die bewegliche Last entweder von D_1 bis E_1 oder von D_2 bis E_2 vorgerückt ist. Will man die Belastung finden, welcher die Brücke ausgesetzt sein muß, damit die Stützlinie in irgend einem zwischenliegenden Verticalschnitte z. B. dem durch E geführten ihre horizontale Tangente hat, so giebt die Zeichnung hierüber ebenfalls Aufschluß. Zieht man nämlich zu dem Ende durch den Schnitt n der betreffenden Verticalebene mit der Eigengewichtscurve $g_1 g_2 g_3 \ldots$ eine Horizontale bis zum Schnitte k_1 mit der Belastungscurve $D_1 N Q_1$, so erhält man in k_1 den Punkt, bis zu welchem die Last von D_1 vorgerückt sein muß, wenn die Stützlinie ihren Scheitel in der Verticalebene E haben soll. Das Letztere findet aber noch bei einer zweiten Belastung statt, welche man, wie sich leicht ergiebt, findet, sobald man die Strecke nr von der Belastungslinie $D_2 N Q_2$ abwärts gleich $r'n'$ abträgt und durch n' eine Horizontale zieht, welche in k_2 den Punkt liefert, bis zu welchem die bewegliche Last von D_1 aus vorgerückt sein muß, um wieder den Scheitel der Stützlinie in die Verticalebene durch E zu verschieben. Dies ergiebt sich mit Rücksicht darauf, daß nach der

Construction die beiden in E zusammenstoßenden Gewölbtheile EB und EC gleiche Momente in Bezug auf B und C haben, denn es ist nach der Construction $Er = En + n'r'$, und nach dem Vorbemerkten ist $n'r'$ gleich dem Momente der über Ei_2 befindlichen Last, in Bezug auf D_2 oder C. Bezeichnet daher wieder $G_1 a_1$ das Moment des Gewölbstückes BE in Bezug auf B, und ist G_2 das Gewicht des Stückes ME, so hat man das Moment des Theils BE in Bezug auf B, gleich $M_1 = G_1 a_1 + Er$, und dasjenige von EC in Bezug auf C gleich

$$M_2 = G_1 a_1 + 2 G_2 . l + n'r' = G_1 a_1 + En + nr = M_1.$$

§. 27. **Gewölbstärke.** Wenn für ein Gewölbe in der vorstehend angegebenen Weise für eine bestimmte Belastung die Form des Bogens, oder für eine gegebene Bogenform die Vertheilung der Last so bestimmt ist, daß sich eine ganz im Innern des Gewölbes, resp. des Kerns verbleibende Stützlinie einzeichnen läßt, so ist das Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität gegen Drehung als gesichert zu betrachten. Wenn ferner die Fugenstellung so gewählt wird, daß die Richtung der Stützkraft nirgend um den Reibungswinkel von der Normalen zur Fuge abweicht, so kann auch kein Gleiten der einzelnen Wölbsteine stattfinden. Diese letztere Bedingung wird immer leicht zu erfüllen sein, denn wenn man, wie dies wohl allgemein geschieht, die Fugen überall normal zur Mittellinie oder auch wohl zur inneren Bogenfläche anordnet, so wird man im Allgemeinen fast immer finden, daß der gedachte Abweichungswinkel der Stützkraft von der Fugennormalen für die verschiedenen möglichen Stützlinien wesentlich unter dem Reibungswinkel für die Steine bleibt, und daß man nicht genöthigt ist, auf eine besondere Cohäsion oder Scheerfestigkeit des Mörtels zu rücksichtigen. Das Gewölbe ist aber außer auf seine Stabilität auch in Hinsicht seiner Festigkeit zu prüfen, und dazu ist es erforderlich, daß die einzelnen Wölbsteine mit hinreichend großen Flächen sich gegen einander stützen, um nicht durch den auf sie wirkenden Druck zermalmt zu werden. Bezeichnet man allgemein mit W den Normaldruck zwischen zwei beliebigen Wölbsteinen, und ist p die Druckspannung pro Flächeneinheit, welche man für das Wölbmaterial als zulässig erachtet, so ist zur Aufnahme dieses Druckes eine Fläche $F = \frac{W}{p}$ erforderlich. Dieser Werth würde in dem Falle gleich der ganzen Fugenfläche zu setzen sein, wenn der Druck W in der Mitte der Fuge wirkte, weil in diesem Falle eine gleichmäßige Vertheilung des Druckes angenommen werden kann. Wenn jedoch der Angriffspunkt der Druckkraft außerhalb der Mitte gelegen ist, etwa in einem Abstande e von derselben, so findet eine ungleiche Vertheilung der Pressung statt, und es gelten hierfür die gleichen Betrachtungen, welche in §. 14 in Bezug auf die Futtermauern angeführt worden sind. Insbesondere wird die Pressung an der einen

Kante der Fuge gleich Null, sobald der besagte Abstand e den Werth $\frac{d}{6}$ erreicht, unter d die Stärke des Gewölbes an der betrachteten Stelle verstanden. Deswegen hat man auch, wie schon im §. 19 angeführt worden ist, das innere Drittel des Gewölbes häufig als den Kern vorausgesetzt, aus welchem die Stützlinie nicht heraustreten soll. Was die zulässige Pressung p des Wölbmaterials anbetrifft, so pflegt man dieselbe ebenso wie die Belastungen meist durch die Höhe eines Prismas von gleichem specifischen Gewichte mit dem Wölbmateriale auszudrücken, so daß, unter k diese Höhe und unter γ dieses specifische Gewicht verstanden, die specifische Pressung durch $p = k\gamma$ gegeben ist. Für die rückwirkende Festigkeit, d. h. diejenige Belastungshöhe K durch deren Einfluß das Material zerdrückt wird, sind in der nachfolgenden kleinen Tabelle die mittleren Werthe angegeben, welche nach Bauschinger's Versuchen den für Gewölbe meist angewendeten Baumaterialien zukommen. In der Tabelle ist gleichzeitig das specifische Gewicht und die Festigkeit in Kilogrammen pro 1 qcm eingeführt.

Tabelle für die rückwirkende Festigkeit der Gewölbematerialien.

	Specif. Gewicht γ	Zerdrückungshöhe K	Zerdrückungskraft
Syenit	2800 kg	4890 m	1370 kg
Granit	2600 „	4150 „	1080 „
Kalkstein	2400 „	2920 „	700 „
Sandstein	2400 „	1500 „	360 „
Ziegel	1800 „	940 „	170 „
Cementmörtel	—	—	180 „
Beton	2300 „	—	60 „

Die mit Sicherheit zulässige Belastungshöhe k ist jedoch aus verschiedenen Gründen bei den Ausführungen nur zu einem kleinen Bruchtheile von K anzunehmen. Zunächst ist, wie aus dem Vorstehenden sich ergiebt, keineswegs vorauszusetzen, daß die Druckkraft überall die Mitte der Fuge trifft, denn selbst in den Fällen, in welchen das Gewölbe so entworfen ist, daß die Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, kann durch verschiedene Umstände, wie z. B. das Setzen des Gewölbes beim Ausrüsten, durch die Ausdehnung bei Temperaturveränderungen, ferner durch bewegliche Belastung u. s. w. die Stützlinie an einzelnen Stellen aus der Mitte gedrängt werden, in Folge dessen

der Druck sich ungleichförmig über die Lagerfugen vertheilt und einzelne Theile besonders stark gedrückt werden. Hierzu kommt die ungleichförmige Beschaffenheit des Baumaterials, welches nicht als durchaus homogen vorausgesetzt werden kann. Auch ist es nicht möglich, die einzelnen Wölbsteine so genau zu bearbeiten und zu versetzen, daß die Berührung gleichmäßig in der ganzen Fugenfläche stattfindet, vielmehr wird die Berührnng immer nur auf einzelne Stellen sich beschränken, in welchen der Druck sich derartig concentrirt, daß daselbst ein theilweises Zermalmen des Materials und Zerstören des ganzen Wölbsteins herbeigeführt werden kann. Gerade zur Vermeidung dieses letzteren Uebelstandes ist die Verwendung des Mörtels zwischen den Steinen erforderlich, welcher gewissermaßen als Füllmaterial die Ungleichmäßigkeiten ausgleichen soll. Da aber das gehörige gleichmäßige Vertheilen des Mörtels, besonders in der Nähe des Scheitels, mit großen Schwierigkeiten verbunden zu sein pflegt, und auch der noch nicht gehörig erhärtete Mörtel bei übermäßigem Drucke leicht aus den Fugen herausgedrückt wird, so muß man aus allen diesen Gründen nur eine verhältnißmäßig geringe Pressung zwischen den Wölbsteinen zulassen.

Um für diese Pressung einen Anhalt zu finden, bleibt bei der bislang ungenügenden Kenntniß der erwähnten Umstände nichts anderes übrig, als aus den Dimensionen und Belastungen bewährter Ausführungen die Größe der Pressung zu ermitteln, welche in diesen Ausführungen stattfindet. In dieser Weise hat z. B. Scheffler*) eine große Anzahl von verschiedenen gut bewährten und renommirten Brücken derartig untersucht, daß er aus den bekannten Dimensionen und Belastungen die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes ermittelte, und dann diesen Schub H selbst durch die Beziehung (s. §. 18) $H = \frac{Qc}{h}$ berechnete, unter Qc das Moment des halben Gewölbes in Bezug auf den Kämpfer und unter h dessen Abstand von der Schubkraft im Scheitel verstanden. Wurde nun die gefundene Größe H durch die Gewölbstärke d im Scheitel dividirt, so ergab sich die specifische Pressung daselbst zu $p = \frac{H}{d}$ oder die Pressungshöhe zu $k = \frac{p}{\gamma}$. Ebenso wurde der Normaldruck W auf die unter dem Winkel α gegen die Verticale geneigte Kämpferfuge zu

$$W = H \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

bestimmt, und die Pressung des Kämpfers, dessen Dicke d_1 ist, zu

$$p_1 = \frac{W}{d_1} \text{ bezw. } k_1 = \frac{p_1}{\gamma}$$

ermittelt.

*) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken.

Diese Untersuchung ergab, daß die Pressungshöhe k im Scheitel für die verschiedenen Spannweiten oder Horizontalschübe sehr verschieden ist, indem diese Höhe bei ganz kleinen Brücken nicht mehr als etwa 3 m betrug, und sich dagegen bei den größten Spannweiten bis über 60 m erhob. Ebenso schwankte die Pressungshöhe in den Kämpferfugen, woselbst sie immer wesentlich größer als im Scheitel sich herausstellte, und in einzelnen Fällen den 3- bis 4 fachen Werth der Scheitelpressung mit gegen 250 m erreichte. Mit Rücksicht hierauf giebt Scheffler an, man solle die specifische Pressung mit der absoluten Größe des Horizontalschubes H wachsend, die größte Pressungshöhe im Scheitel aber nicht über 200′ oder 63 m annehmen, während man die Pressung für die Kämpfer gleich der anderthalbfachen Scheitelpressung, also die Belastungshöhe daselbst ebenfalls nicht größer als 300′ oder 95 m anzunehmen habe. Für die Wahl des in jedem Falle anzuwendenden Betrags ist an dem gedachten Orte eine Tabelle mitgetheilt, welche für verschiedene Werthe des Horizontalschubes H die specifischen Pressungen, also auch die Gewölbstärken ergiebt.

Auch auf Grund der in §. 22 ermittelten Beziehungen hat man mit Rücksicht auf ausgeführte stabile Brücken, deren Krümmungshalbmesser, Belastungshöhe und Gewölbstärke im Scheitel bekannt sind, die specifischen Pressungen des Materials bestimmt, und es ist in dieser Weise von Heinzerling*) eine Tabelle angegeben, welche im Auszuge hier angeführt werden soll. Die hierfür geltenden Beziehungen lassen sich im Wesentlichen folgendermaßen wiedergeben.

Nach §. 22, Gleichung (8), welche zu

$$H = r z_0 \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gefunden wurde, ist für jede Stützlinie der Horizontalschub H eines 1 m breiten Gewölbstreifens gleich dem Gewichte eines Steinprismas von der Höhe z_0, der Länge r und der Breite gleich 1 m. Denkt man sich nun ein Gewölbe nach dem Vorhergegangenen so construirt, daß die Stützlinie durch die Mitte der Scheitelfuge geht, und dessen innere Leibung überall parallel zur Stützlinie ist, d. h. denkt man sich die innere Wölblinie durch Abtragen der halben Scheitelstärke $\frac{d}{2}$ in allen Punkten der Stützlinie erhalten, so findet zwischen dem Halbmesser r_1 der inneren Wölblinie im Scheitel und demjenigen r der Stützlinie daselbst die Beziehung statt:

$$r = r_1 + \frac{d}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnet man nun noch mit h_0 die auf das specifische Gewicht γ des Gewölbmaterials reducirte Belastungshöhe, welche die Uebermauerung, Fahr-

*) S. Heinzerling. Die Brücken der Gegenwart, II. Abtheilung, sowie dessen Aufsatz in der Zeitschrift für Bauwesen, 1869 u. 1872.

bahn und Verkehrslast repräsentirt, so hat man die Scheitelbelastungshöhe

$$z_0 = d + h_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zu setzen. Kennt man nun für irgend ein Gewölbe den Scheitelhalbmesser r_1 der inneren Wölbung und die Größen d und h_0, so findet man nach obiger Gleichung (1) den Horizontalschub für einen 1 m breiten Gewölbstreifen zu

$$H = \left(r_1 + \frac{d}{2}\right)(d + h_0)\,\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und wenn man die specifische Pressung in der Scheitelfuge gleich p, also

$$H = p\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

setzt, so erhält man aus (4) und (5)

$$p = \left(r_1 + \frac{d}{2}\right)\left(1 + \frac{h_0}{d}\right)\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$\frac{d^2}{2} + d\left(r_1 + \frac{h_0}{2}\right) + r_1 h_0 = \frac{p}{\gamma}\,d,$$

oder

$$d^2 - 2\,d\left(\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2}\right) + 2\,r_1 h_0 = 0.$$

Hieraus findet man, wenn p gegeben ist, die erforderliche Gewölbstärke zu

$$d = \frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2}\right)^2 - 2\,r_1 h_0} \quad . \quad (7)$$

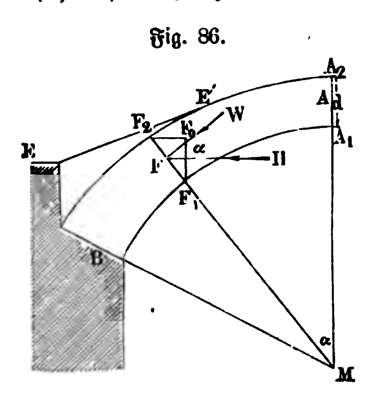
Mittelst der Gleichung (6) sind nun aus stabilen Ausführungen die in der Tabelle unter der Bezeichnung $\frac{p}{10\,000}$ angegebenen specifischen Pressungen in Kilogrammen pro Quadratcentimeter für Straßen und Eisenbahnbrücken aus Haustein ($\gamma = 2500$), Backstein ($\gamma = 2000$) und Bruchstein ($\gamma = 2200$) ermittelt, wobei zu bemerken ist, daß die Scheitelbelastung $h_0\gamma$ pro Quadratmeter für Straßenbrücken zu 1800 kg und für Eisenbahnbrücken zu 2800 kg angenommen worden ist.

Tabelle der Pressungen in den Schlußsteinen der Brückengewölbe.

Scheitelhalbmesser r_1 der inneren Wölbfläche Meter	Gewölbstärke d im Scheitel			Pressung pro Quadratcentimeter $\frac{p}{10\,000}$ in Kilogrammen					
	Haustein $\gamma = 2500$	Backstein $\gamma = 2000$	Bruchstein $\gamma = 2200$	Straßenbrücken $h_0 \gamma = 1800$ kg			Eisenbahnbrücken $h_0 \gamma = 2800$ kg		
				Haustein	Backstein	Bruchstein	Haustein	Backstein	Bruchstein
5	0,52	0,58	0,64	3,14	2,70	2,70	4,15	3,61	3,50
10	0,64	0,71	0,79	5,48	4,70	4,65	7,10	6,15	5,97
15	0,77	0,85	0,95	7,44	6,35	6,33	9,44	8,16	7,96
20	0,89	0,99	1,10	9,24	7,82	7,89	11,54	9,89	9,75
25	1,02	1,13	1,26	10,88	9,17	9,27	13,38	11,43	11,30
30	1,14	1,26	1,41	12,43	10,50	10,67	15,10	12,93	12,85
35	1,27	1,41	1,57	13,96	11,70	11,97	16,76	14,23	14,25
40	1,39	—	—	15,44	—	—	18,37	—	—
45	1,52	—	—	16,86	—	—	19,87	—	—
50	1,64	—	—	18,28	—	—	21,38	—	—
55	1,77	—	—	19,65	—	—	22,81	—	—
60	1,89	—	—	21,04	—	—	24,26	—	—

Mit Hülfe der aus dieser Tabelle in jedem bestimmt vorliegenden Falle zu entnehmenden Pressung p kann man durch die Gleichung (7) die Stärke d des Gewölbes im Scheitel ermitteln. Wenn man diese Stärke auch für alle übrigen Punkte des Gewölbes beibehalten wollte, so würde offenbar die specifische Pressung des Materials von dem Scheitel nach den Kämpfern hin in derselben Weise wachsen wie der Stützdruck zunimmt. Um eine möglichst gleichmäßige Anstrengung des Materials zu erreichen, ist es daher gerathen, die Stärke des Gewölbes nach den Widerlagern hin entsprechend zu vergrößern. Das Gesetz für diese Verstärkung ist leicht zu erkennen. Es sei AFB, Fig. 86, die Hälfte eines symmetrischen Gewölbes, welches mit Rücksicht auf den Horizontaldruck H eine Scheitelstärke $A_1 A_2 = d$ erhalten hat, und $F_1 F_2$ sei irgend eine Gewölbfuge, welche in F senkrecht zu dem daselbst wirksamen resultirenden Drucke W angeordnet ist, also mit der Verticalen denselben Winkel $\alpha = AMF$ bildet, unter welchem die Stützkraft W gegen den Horizont geneigt ist. Wegen des überall gleichen Horizontalschubes hat man dann

Fig. 86.



$$W \cos\alpha = H$$

oder

$$W = \frac{H}{\cos\alpha},$$

und daher hätte man die Stärke $F_1 F_2$ des Gewölbes in F ebenfalls zu

$$d_1 = \frac{d}{\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zu wählen, wenn die specifische Pressung in F denselben Werth $\frac{H}{d} = p$ wie im Scheitel haben soll. Da diese Betrachtung für jede Fuge F gilt, so folgt hieraus das Gesetz, daß man behufs gleichmäßiger Pressung des Gewölbematerials die Gewölbstärke derartig vom Scheitel nach den Kämpfern hin vergrößern muß, daß sämmtliche Lagerfugen wie $F_1 F_2$ dieselbe mit der Scheitelfuge $A_1 A_2 = d$ gleiche Verticalprojection $F_1 F_0 = d_1 \cos\alpha = d$ haben, entsprechend dem für alle Fugen gleichen Horizontaldrucke. In dieser Weise pflegt man vielfach die Verstärkung des Gewölbes vom Scheitel nach den Widerlagern hin vorzunehmen, doch ist leicht einzusehen, daß dies nur bis zu einer gewissen Größe von α praktisch ausführbar sein wird, denn schon für $\alpha = 60^0$ erhält man

$$d_1 = \frac{d}{^1/_2} = 2\,d,$$

und bei weiterer Zunahme von α würde d_1 sehr schnell wachsen. Man wird aber sowohl aus Schönheitsrücksichten, wie aus Gründen der Ausführung die Stärke d_1 an den Widerlagern niemals größer als höchstens $2\,d$ machen, und pflegt dann wohl, um das Material des Gewölbbogens daselbst nicht zu sehr anzustrengen, die in den Bogenzwickeln aufgeführte Hintermauerung BEE' durch geeignete Anordnung der Fugen zur Aufnahme eines Theils des Gewölbdruckes zu befähigen.

Ueber die für Gewölbe zu wählende Stärke sind auch vielfach empirische, durch die Erfahrung bewährte Regeln, wie z. B. von der Form

$$d = \alpha + \beta r$$

angegeben, worin r der Halbmesser, und α und β gewisse, von dem Materiale und der Belastung der Gewölbe abhängige Constante sind. Auch ist es deutlich, daß bei der Verwendung von Ziegelsteinen zu Gewölben in Gebäuden die Stärken mit Rücksicht auf das übliche Ziegelformat gewählt werden müssen, und daß man dabei mit der Stärke nie unter ein gewisses Maß, etwa die Breite eines Ziegels, herabgehen darf. Hinsichtlich derartiger Vorschriften muß auf die betreffenden Bauhandbücher verwiesen werden.

Beispiel. Wie groß hat man die Gewölbstärke einer Eisenbahnbrücke aus Haustein zu machen, deren innere Wölbung nach einem Kreissegment von $h = 6$ m Pfeilhöhe und $2\,l = 25$ m Spannweite ausgeführt ist, wenn das specifische Gewicht des Gewölbematerials $\gamma = 2400$ kg ist, und die durch die Fahrbahn und Verkehrslast dargestellte Scheitelbelastung einer Höhe von $h_0 = 1{,}5$ m entspricht.

Man findet hier den Halbmesser r_1 der inneren Wölbung aus

$$l^2 = h(2r_1 - h)$$

zu

$$r_1 = \frac{l^2 + h^2}{2\,h} = \frac{12{,}5^2 + 36}{2\,.\,6} = 16{,}02\,\text{m}$$

und kann demnach der obigen Tabelle zufolge

$$\frac{p}{10\,000} = 9{,}44 + \frac{1{,}02}{5}\,(11{,}54 - 9{,}44) = 9{,}87,$$

also $p = 98\,700$ kg pro Quadratmeter annehmen; demnach hat man

$$\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2} = \frac{98\,700}{2\,400} - 16{,}02 - 0{,}75 = 24{,}35$$

und nach (7) die Scheitelstärke

$$d = 24{,}35 - \sqrt{24{,}35^2 - 2\,.\,16{,}02\,.\,1{,}5} = 24{,}35 - 23{,}34 = 1\,\text{m}.$$

Die Fuge am Kämpfer ist gegen die Verticale unter einem Winkel α geneigt, für welchen

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r} = \frac{16{,}02 - 6}{16{,}02} = 0{,}667$$

ist, woraus $\alpha = 48^0\,10'$ folgt. Soll daher die specifische Pressung in dieser Fuge gleich der im Scheitel sein, so hat man daselbst die Gewölbdicke gleich

$$d_1 = \frac{d}{\cos\alpha} = \frac{d}{0{,}667} = 1{,}5 = 1{,}5\,\mathrm{m}$$

zu machen.

§. 28. **Die Widerlager.** Das in den vorhergehenden Paraprahen besprochene Verhalten der Gewölbe findet nur dann statt, wenn die Gewölbe mit ihren Anfängen sich beiderseits gegen feste, nicht nachgiebige Widerlager stemmen, welche unter dem Einfluße der in den Kämpfern zur Wirkung kommenden Druckkräfte nicht zur Seite gedrängt werden. Nur in seltenen Fällen werden solche Festpunkte, wie etwa durch Felsen gebildet, von vornherein gegeben sein, im Allgemeinen wird man die Widerlager durch Ausführung hinreichend massiger Mauerkörper herstellen müssen. Die Stabilität eines solchen Widerlagskörpers ist nur durch ein genügend großes Eigengewicht desselben zu erzielen, welches, mit dem Gewölbschube W gegen die Kämpferfuge zusammen eine Mittelkraft giebt, die nirgends aus dem Widerlager heraustritt, und welche für keine Lagerfuge von deren Normalen um einen Winkel abweicht, der den Betrag des zugehörigen Reibungswinkels daselbst erreicht. Es gelten somit für die Stabilität der Widerlager dieselben Regeln, welche im ersten Capitel für Futtermauern aufgestellt sind, von welchen letzteren hinsichtlich der Wirkung der Kräfte die Widerlager sich nur insofern unterscheiden, als der auf dieselben seitwärts ausgeübte Gewölbeschub in der Kämpferfuge concentrirt ist, während die Futtermauern durch den auf eine größere Fläche vertheilten Erddruck seitlich angegriffen werden. Nach dem über die Futtermauern Gesagten ist daher die Prüfung der Widerstandsfähigkeit der Widerlager unschwer zu bewirken, und es muß bei ihnen wie bei den Futtermauern nicht nur eine genügende Sicherheit gegen das Umkanten sowie gegen das Verschieben vorhanden sein, sondern das Material darf auch nicht über einen gewissen Betrag auf Druck beansprucht werden.

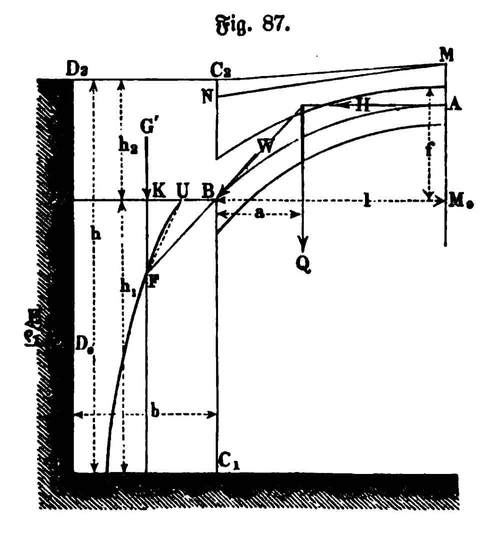
Um die Stabilität eines Widerlagers durch Rechnung zu prüfen, bezw. seine Dimensionen zu ermitteln, sei AB, Fig. 87, die Stützlinie eines halben Tonnengewölbes von der halben Spannweite $BM_0 = l$, dessen Belastungslinie durch MN gegeben sei. Die Pfeilhöhe M_0A der Stützlinie sei durch f bezeichnet, und der Angriffspunkt B im Kämpfer liege um $BC_1 = h_1$ über der als unwandelbar anzunehmenden Grundfläche D_1C_1 des Widerlagers, welches als ein parallelepipedischer Mauerklotz von der Breite $DB = b$ bis zu einer Höhe $BC_2 = h_2$ über dem Kämpferangriffe B aufgeführt sein soll. Das specifische Gewicht des Widerlagers, welches meist gleich demjenigen des Gewölbmaterials angenommen werden kann, sei

wieder mit γ bezeichnet, und es soll wie bisher ein Streifen des Widerlagers und Gewölbes von einer Breite gleich 1 m der Betrachtung unterzogen werden. Auf das Widerlager wirkt nun außer seinem in der verticalen Mittellinie anzunehmenden Eigengewichte

$$G = \gamma b (h_1 + h_2) = \gamma b h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die von dem Gewölbe in B ausgeübte resultirende Kraft W, deren horizontale Componente H gleich dem Schub des halben Gewölbes AB sammt seiner Belastung ist. Außerdem wird gegen die hintere Mauerfläche $D_1 D_2$ die Hinterfüllungserde mit einem unter dem Reibungswinkel ϱ_1 gegen den Horizont gerichteten Drucke E wirken, dessen Angriffspunkt D_0 nach dem vorhergehenden Capitel in $\frac{h}{3}$ über dem Fußpunkte D_1 anzunehmen ist. Die Größe dieses Erddruckes kann man nach §. 8 allgemein zu

Fig. 87.



$$E = \gamma_0 k \frac{h^2}{2} \quad . \quad . \quad (2)$$

setzen, wenn γ_0 das specifische Gewicht der Hinterfüllungserde und k einen von deren Böschungswinkel ϱ und der Oberfläche abhängigen Coefficienten bedeutet. Dieser Coefficient kann, wenn eine horizontale Oberfläche vorausgesetzt und von der Reibung der Erde an der Wandfläche D abgesehen wird, nach §. 8 zu $tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}$ angenommen werden, also ist für diesen Fall E horizontal und

$$E = \gamma_0 \frac{h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

Sollte nun unter Einfluß dieser Kräfte das Widerlager gerade noch stabil sein, so müßte die Resultirende sämmtlicher Kräfte durch die Kante D_1 gehen, d. h. die Momentensumme aller Kräfte in Bezug auf D_1 müßte gleich Null sein, in welchem Falle das Widerlager an der Grenze der Stabilität sich befinden würde. Da man jedoch eine gewisse Sicherheit oder einen Ueberschuß an Stabilität verlangen muß, so kann man entweder die

Bedingung stellen, daß die Resultirende durch einen mehr nach dem Innern der Mauer etwa in J gelegenen Punkt hindurchgehe, oder, was auf dasselbe Resultat hinauskommt, daß erst die σfache Schubkraft H des Gewölbes im Stande sein soll, den Grenzzustand der Stabilität herbeizuführen. Die Zahl σ ist dann wieder der Stabilitätscoefficient, für welchen man meistens einen zwischen 2 und 3 liegenden Werth anzunehmen pflegt *). Mit Rücksicht hierauf lautet nun die betreffende Gleichgewichtsgleichung, wenn noch mit a der Abstand des Punktes B von der Schwerlinie des Gewichtes Q der Brückenhälfte bezeichnet wird:

$$\sigma H(f + h_1) = Q(a + b) + G\frac{b}{2} + E\cos\varrho_1\frac{h}{3} \quad . . (3)$$

oder mit Rücksicht auf (1) und (2^a), wenn man $\varrho = 0$ setzt:

$$\sigma H(f + h_1) = Q(a + b) + \gamma\frac{h}{2}b^2 + \gamma_0 \, tang^2\frac{90^0 - \varrho}{2}\frac{h^3}{6} \quad (3^a)$$

Diese Gleichung, welche direct zur Ermittelung des Stabilitätscoefficienten σ für eine gegebene Widerlagerstärke b dienen kann, schreibt sich behufs Bestimmung der erforderlichen Stärke b des Widerlagers:

$$b^2 + 2\frac{Q}{\gamma h}b = \frac{2}{\gamma h}\left[\sigma H(f + h_1) - Qa - \gamma_0 \, tang^2\frac{90^0 - \varrho}{2}\frac{h^3}{6}\right]$$

woraus die erforderliche Stärke

$$b = -\frac{Q}{\gamma h}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\gamma h}\left[\sigma H(f + h_1) - Qa - \gamma_0 \, tang^2\frac{90^0 - \varrho}{2}\frac{h^3}{6}\right] + \frac{Q^2}{\gamma^2 h^2}} \quad . (4)$$

folgt. Es läßt sich hierbei bemerken, daß mit zunehmender Belastung Q die Stärke b des Widerlagers nur bis zu einem gewissen Maximalwerthe zunimmt, von welchem aus bei weiterer Vergrößerung der Belastung b wieder abnimmt. Dies ist aus Gleichung (3) ersichtlich, denn wenn auch durch eine größere Belastung Q der Horizontalschub H und also das umstürzende Moment $H(f + h_1)$ gleichfalls vergrößert auftritt, so wird doch auch das Moment $Q(a + b)$ auf der rechten Seite der Gleichung (3) damit vergrößert, und es giebt in jedem Falle eine gewisse Belastung Q des Gewölbes, welcher die größte Widerlagsstärke b_{max} entspricht, ein Umstand, der insbesondere bei hohen Belastungen der Gewölbe in Betracht kommt. Wollte

*) Scheffler findet auf Grund der Untersuchung einer großen Anzahl ausgeführter Brücken, daß für Straßenbahnen genüge, $\sigma = 2{,}5$ anzunehmen, dagegen für Eisenbahnbrücken die Annahme von $\sigma = 3$ rathsam erscheint.

man diesen Grenzfall rechnerisch feststellen, so könnte man in (4) den Horizontalschub H durch Q ausdrücken, indem man $H = Q \frac{a}{f}$ setzt, und denjenigen Werth von Q ermitteln, welcher der Gleichung

$$\frac{db}{dQ} = 0$$

entspricht, eine Rechnung, die hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Wie aus der Figur ersichtlich ist, hat der Erddruck einen für die Stabilität des Widerlagers günstigen Einfluß, so daß durch denselben, wie auch Gleichung (4) zeigt, die erforderliche Stärke b verringert wird. Es kann sogar bei hohen Widerlagern dieser Einfluß des Erddruckes überwiegend sein, so daß ein Umkippen des Widerlagers nach innen zu befürchten ist. Man hat in solchen Fällen die Untersuchung ganz ähnlich, wie oben zu führen, mit dem einzigen Unterschiede, daß man für die Innenkante C_1 die Momentengleichung ansetzt, und den σfachen Erddruck voraussetzt, wenn auch hier ein Stabilitätscoefficient σ zu Grunde gelegt werden soll. Man würde demgemäß für diesen Fall die Gleichung

$$H(f + h_1) = Qa - \frac{\gamma h^2}{2} b + \sigma \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \quad . \; (3^a)$$

erhalten, woraus wie oben die Stärke b zu ermitteln wäre. Dieser Fall kommt daher im Wesentlichen auf die Untersuchung einer Futtermauer hinaus, welche auf der dem Erddrucke abgewendeten Seite durch Strebebögen gestützt wird. Auch sonst gelten für die Widerlager die im Capitel I für Futtermauern gefundenen Beziehungen, so namentlich hinsichtlich der Pressungen, welchen das Material in den Lagerfugen ausgesetzt ist. Für diese Pressungen ist bekanntlich der Abstand $y = OJ$ maßgebend, um welchen der Angriffspunkt J der Resultirenden aller Kräfte von der Mitte O der betreffenden Lagerfuge absteht. Man findet diesen Abstand y, wenn man $\sigma = 1$ setzt, und die Momentengleichung für den Punkt J ansetzt, also durch:

$$H(f + h_1) = Q\left(a + \frac{b}{2} + y\right) + \gamma b h y + \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \quad . \; (3^b)$$

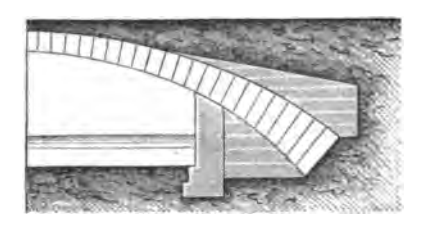
woraus bei einer gewählten Stärke b, wie sie unter Zugrundelegung eines bestimmten Stabilitätscoefficienten σ festgesetzt worden ist

$$y = \frac{H(f + h_1) - Q\left(a + \frac{b}{2}\right) - \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6}}{Q + \gamma b h} \text{ folgt} \quad . \; . \; (5)$$

Hinsichtlich der einem bestimmten Werthe von y entsprechenden Vertheilung der Pressungen gelten ausnahmslos die im §. 14 angeführten Bemerkungen.

Damit ein Ausweichen des Widerlagers durch Gleiten nicht möglich sei, darf die Resultirende für irgend eine Lagerfuge von deren Normalrichtung an keiner Stelle um den Reibungswinkel der Steine daselbst auf einander abweichen, und man erhält hiervon ein deutliches Bild durch die Zeichnung der Stützlinie bezw. der Richtungslinie des Druckes. Man hat es durch geeignete Stellung der Lagerfugen in dem Widerlager immer in der Hand, einem Gleiten wirksam zu begegnen, und man hat zu dem Zwecke vielfach das Widerlager mit solchem Fugenschnitte ausgeführt, daß es, Fig. 88, gewissermaßen eine Fortsetzung des Gewölbes bildet. Diese Ausführung wird aber nur in den seltensten Fällen nöthig sein, vielmehr wird auch bei horizontalen Fugen des Widerlagers die gedachte Abweichung der Resultirenden von der Verticalen kleiner sein als der Reibungswinkel ϱ des Mauerwerks, welchen Winkel man wegen Ausführung des Mauerwerks im regelrechten Verbande zu $\varrho = 45^0$ annehmen kann, so daß $\varphi = tang\, \varrho = 1$ zu setzen ist.

Fig. 88.



Die größte Gefahr des Gleitens findet, wie sich leicht ergiebt, in dem Horizontalschnitte BD statt, welcher durch den Anfang B der Stützlinie, Fig. 87, gedacht wird, da für jede tiefere Fuge die Richtung der Resultirenden steiler ausfällt, indem bei gleichbleibender Horizontalkraft H die Verticalkraft mit der Tiefe zunimmt. Um für diesen Querschnitt DB die Stabilitätsverhältnisse in Bezug auf das Gleiten zu bestimmen, denkt man sich den in B wirkenden Gewölbschub W, dessen verticale und horizontale Componenten bezw. Q und H sind, mit dem in der Mitte K wirkend zu denkenden Gewichte $G' = \gamma b h_2$ des oberhalb BD gelegenen Mauerkörpers $D D_2 C_2 B$ zusammengesetzt. Man erhält dadurch die durch F gehende Richtung FU der Stützkraft in BD, welche gegen die Verticale unter dem Winkel $KFU = \beta$ geneigt ist, der sich bestimmt aus

$$tang\, \beta = \frac{KU}{KF} = \frac{H}{Q + G'} = \frac{H}{Q + \gamma b h_2} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Setzt man nun eine σ' fache Stabilität in Bezug auf das Gleiten voraus, d. h. nimmt man an, daß erst in Folge einer Horizontalkraft $\sigma' H$ der Winkel β den Reibungswinkel ϱ erreichen soll, so findet man

$$tang\, \varrho = \frac{\sigma' H}{Q + \gamma b h_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

woraus bei gegebener Widerlagsstärke b die Stabilität zu

$$\sigma' = \frac{Q + \gamma b h_2}{H} \, tang\, \varrho, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

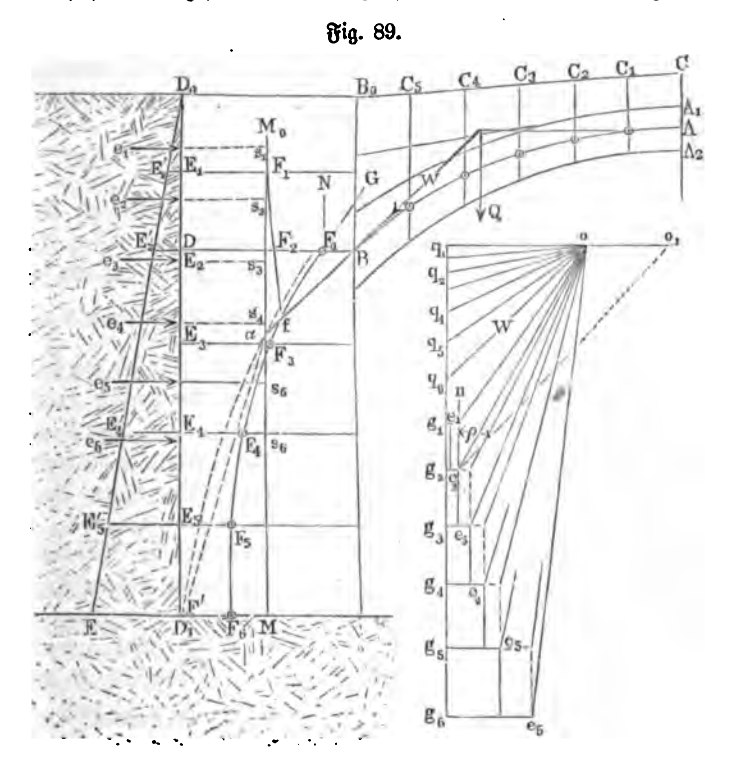
oder für einen gewünschten Stabilitätscoefficienten σ' die erforderliche Stärke

$$b = \frac{1}{\gamma h_2} \left(\frac{\sigma' H}{tang\, \varrho} - Q \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

folgt u. s. w. Als Stabilitätscoefficienten σ' gegen Gleiten kann man passend denselben Werth σ gleich 2 bis 3, wie für Umstürzen annehmen.

In Fig. 89 ist die Stützlinie eines Widerlagers BD gezeichnet, gegen welches in B ein Gewölbe AB sich stemmt, während die Rückseite $D_0 D_1$ dem Drucke der Hinterfüllungserde ausgesetzt ist. Es sei das Gewicht Q der Gewölbhälfte $A_1 A_2 B$, deren Belastungslinie $B_0 C$ sein mag, durch $q q_6$ im Kräfteplane dargestellt und mit Hülfe der verticalen Theilungsebenen

Fig. 89.



durch $C_1 C_2 \ldots C_5$ die durch A und B gehende Stützlinie construirt. Für diese Stützlinie erhält man durch Construction in der bekannten Weise den Horizontalschub H in der Strecke oq, und daher ist die resultirende Kraft

W, mit welcher das Gewölbe in B auf das Widerlager wirkt, durch $o q_6$ der Größe und Richtung nach gegeben. Man denkt sich ferner das Widerlager durch horizontale Ebenen $E_1, E_2, E_3 \ldots E_5$ in eine beliebige Anzahl Stücke getheilt, und trägt von q_6 aus die Strecken $q_6 g_1; q_6 g_2, q_6 g_3 \ldots$ an, welche dem gewählten Kräftemaßstabe entsprechend die Gewichte der Widerlagskörper zwischen der oberen Begrenzung $D_0 B_0$ und der betreffenden jedesmaligen Theilebene vorstellen. Um noch den Erddruck E gegen die verticale Wandfläche $D_0 D_1$ von der Höhe h zu bestimmen, wähle man die Gleichung

$$E = \gamma_1 \frac{h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}$$

und setze für mittlere Erde

$$tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} = \frac{1}{4},$$

(entsprechend $\varrho = 36^0 40'$), und das specifische Gewicht der Erde $\gamma_1 = 1600 \text{kg}$, während das des Gewölbmauerwerks $\gamma = 2000 \text{kg}$ sein mag. Wenn man daher auf der Verticalen $D_0 D_1$ die horizontale Strecke

$$D_1 E = \frac{\gamma_1}{\gamma} h \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{5} D_0 D_1$$

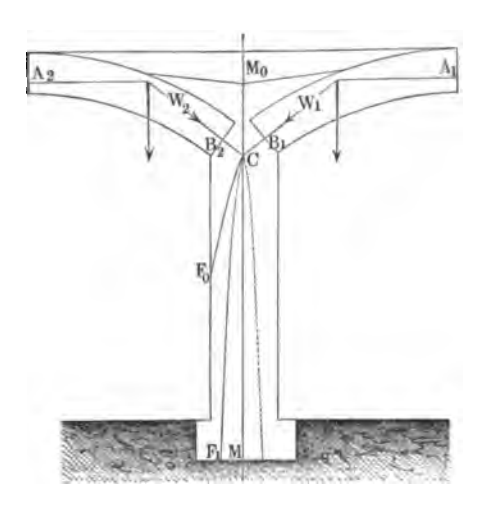
anträgt und $E D_0$ zieht, so erhält man bekanntlich in dem Dreiecke $D_0 D_1 E$ den Querschnitt eines Steinprismas von der Länge 1 m, dessen Gewicht die Größe des auf die Wandfläche $D_0 D_1$ wirkenden Druckes darstellt, welcher im Abstande $\frac{1}{3} D_0 D_1$ über D_1 angreift. In gleicher Weise erhält man in jedem der durch die Ebenen $E_1, E_2, E_3 \ldots$ abgetrennten Dreiecke den Erddruck auf den betreffenden Theil der Wandfläche, z. B. in dem Dreiecke $D_0 E_4 E_4'$ den Erddruck e_4 auf $D_0 E_4$, dessen Angriffspunkt in $1/3 \, D_0 E_4$ über E_4 gelegen ist. Wenn man daher durch Verwandlung dieser Dreiecke in Rechtecke von einer Grundlinie gleich der dem Kräfteplane zu Grunde gelegten Basis die dem Erddrucke entsprechenden Strecken bestimmt und in $g_1 e_1, g_2 e_2, g_3 e_3 \ldots g_6 e_6$ in den Kräfteplan einträgt, so läßt sich die Stützlinie des Widerlagers in bekannter Weise leicht zeichnen. Man erhält dann zunächst für das über dem Kämpfer B gelegene Stück $B D D_0 B_0$ des Widerlagers unter Einfluß des Eigengewichtes und Erddruckes die Stützlinie $M_0 F_1 F_2$, indem man nämlich durch den Schnittpunkt s_1 zwischen e_1 und der Schwerlinie $M_0 M$ eine Parallele zu $q_6 e_1$, ferner durch s_2 eine Parallele mit $q_6 e_2$ zieht. Die Lagerfuge $D B$ wird daher in F_2 von der Kraft $q_6 e_2$ und in B von der Kraft $o q_6$ angegriffen, und man erhält den Angriffspunkt der Resultante in F_0, wenn man durch den Durchschnitt f der beiden in F_2 und B angreifenden Kräfte eine Parallele zu $o e_2$ im Kräfteplane legt. In solcher Art zeichnet sich die Stützlinie $F_0 F_3 F_4 F_5 F_6$ für den unteren Theil des Wider-

lagers, indem man z. B., um den Punkt F_5 der Lagerfuge E_5 zu erhalten, durch den Durchschnitt s_5 des Erddrucks e_5 mit der Schwerlinie $M_0 M$ eine Parallele zu $q_6 e_5$ und von dem Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Richtung Bf des Gewölbschubes W eine Parallele mit der Resultirenden $o e_5$ zieht, welche die Fuge E_5 in dem Punkte F_5 der Stützlinie trifft. Die Stützlinie schneidet die Grundfläche $B_3 D_3$ in einem Abstande $MF_6 = y$ von der Mitte, und aus diesem Werthe läßt sich, wie bei den Futtermauern gezeigt, die Vertheilung der Pressung bestimmen. Ebenso würde man die Größe des Stabilitätscoefficienten σ gegen Umstürzen nach außen finden, wenn man diejenige Größe des Horizontalschubes H_1 ermittelt, vermittelst deren die Stützlinie durch die Kante D_1 geht. Auch erkennt man aus der Figur leicht den Einfluß des Erddrucks auf die Stabilität des Widerlagers. Wenn man nämlich den Erddruck vernachlässigen, also $g_6 e_6 = 0$ setzen wollte, würde man den Schnittpunkt der Stützlinie mit der Grundfläche in F' erhalten, wenn man durch den Schnittpunkt α des Gewölbschubes W mit der Mittellinie $M_0 M$ eine Parallele mit $o g_6$ zöge. Diese in der Figur punktirte Gerade $\alpha F'$ trifft die Grundfläche in der Nähe der äußeren Kante D_1, so daß also ohne das Vorhandensein des Erddruckes in dem vorliegenden Falle die Grenze der Stabilität gegen Umstürzen schon nahezu erreicht sein würde. Wie man aus der Figur erkennt, zeigt die Stützlinie in der durch den Kämpferpunkt B gehenden Lagerfuge eine Stetigkeitsunterbrechung, welche dem Gewichte des oberen Pfeilerstückes $B_0 D$ die Entstehung verdankt. Würde das Widerlager erst in der Höhe BD beginnen, so würde auch die Stützlinie F des Widerlagers an diejenige des Gewölbes in B sich anschließen. Der Winkel $G F_0 N = \beta$, welchen die Mittelkraft in F_0 mit der Normalen $F_0 N$ zur Fuge bildet, läßt das Maß der Stabilität gegen Gleiten erkennen. Hierzu hat man, da dieser Winkel auch im Kräftepolygon als $n e_2 o = \beta$ wiederkehrt, sobald $e_2 n$ vertical gezeichnet ist, nur den Reibungswinkel ϱ gleich $n e_2 o_1$ anzutragen, um in $q o_1$ die Horizontalkraft H_1, also in $\frac{q o_1}{q o} = \sigma_1$ den Stabilitätscoefficienten gegen Gleiten zu erhalten.

Von den Widerlagern oder Landpfeilern der Brücken, welche, wie im Vorstehenden immer angenommen wurde, nur auf einer Seite dem Drucke eines Gewölbes ausgesetzt sind, unterscheiden sich die Zwischenpfeiler der Brücken mit mehr als einer Oeffnung, welche beiderseits den Druck von Gewölben empfangen. Wenn hierbei die beiden Gewölbe $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, Fig. 90, ihrer Form und Belastung nach übereinstimmen, so sind auch die Stützkräfte W_1 und W_2 der Kämpfer gleich groß und um denselben Winkel gegen die Verticale geneigt. Daher schneiden sich diese Kräfte W_1 und W_2 in einem Punkte C der verticalen Mittellinie $M_0 M$ des Pfeilers und die Stützlinie fällt von C aus mit dieser Mittellinie CM zusammen. Für

diesen Fall ist daher weder ein Bestreben, den Pfeiler umzustürzen, noch ihn zu verschieben, vorhanden. Nur wenn die Gewölbe zu beiden Seiten ungleich belastet sind, wird die Stützlinie des Pfeilers aus dessen Mittellinie heraustreten, und zwar um so mehr, je größer die Verschiedenheit der Belastungen beiderseits ist. Der ungünstigste Umstand wird nun dann stattfinden, wenn das eine Gewölbe, etwa $A_2 B_2$, außer durch sein Eigengewicht gar nicht belastet ist, während das andere Gewölbe $A_1 B_1$ über seine ganze Erstreckung der größten zufälligen Belastung unterworfen wird. Für diesen Zustand würde die Stützlinie im Pfeiler etwa durch CF_1 dargestellt sein. Auch diese ungünstigste einseitige Belastung wird jedoch nur eine geringe Stärke des Pfeilers erfordern, insofern die zufällige oder Verkehrsbelastung Q bei steinernen Brücken immer nur gering ist im Vergleiche mit dem Eigengewichte der Gewölbconstruction, und weil bei einem Zwischenpfeiler auf jeder Seite das Gewicht eines halben Tonnengewölbes lastet, wodurch die Stabilität bedeutend erhöht wird. Aus diesen Gründen kann man die Zwischenpfeiler der Brücken beträchtlich schwächer ausführen, als die Endwiderlager. Denkt man sich aber den Druck von einem der beiden Gewölbe, z. B. $A_2 B_2$, beseitigt, sei es, daß dasselbe einstürze oder wegen einer Reparatur abgebrochen werden müsse, so erkennt man sofort, daß die Stützlinie, welche nunmehr etwa durch $B_1 CF_0$ dargestellt sein mag, nicht mehr im Innern des schwachen Pfeilers verbleibt, und daß der letztere dann jedenfalls durch den Schub des rechtseitigen Gewölbes $A_1 B_1$ um die Kante F_0 umgestürzt werden muß. Besteht nun die ganze Brücke aus einer größeren Anzahl von solchen Bögen, wie $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, deren Zwischenpfeiler sämmtlich nur so stark ausgeführt sind, daß sie wie $B_1 B_2 M$ nur unter der Voraussetzung beiderseitigen Druckes stabil sind, so erkennt man aus der obigen Betrachtung, daß der Bruch eines einzigen Bogens den Zusammensturz der Brücke zur Folge haben muß. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, ist es bei langen Thalüberbrückungen, wie

Fig. 90.



sie bei *Viaducten* vorkommen, und wobei eine oft beträchtliche Anzahl von Bögen angeordnet wird, üblich, einzelne Zwischenpfeiler so stark auszuführen, daß sie, ebenso wie die Landpfeiler oder Widerlager einem *einseitigen Gewölbdrucke* zu widerstehen vermögen. Diese stärkeren Pfeiler heißen *Gruppenpfeiler*, da sie die ganze Brücke derart in gewisse Abtheilungen oder Bogengruppen theilen, daß bei einem etwaigen Einsturz eines Bogens das Zusammenbrechen auf die Gruppe beschränkt bleibt, welcher dieser Bogen angehört. Ueber die Anzahl solcher Gruppenpfeiler wird in jedem besonderen Falle die Entscheidung durch lokale Verhältnisse und die Rücksichten auf eine ökonomische Herstellung bedingt werden.

Wenn die Pfeiler einer Brücke sehr bedeutende Höhen (über 30 m etwa) annehmen, wie dies bei den *Wegüberführungen* über tiefe Thäler vorkommt, so pflegt man die Pfeiler unter sich außer in dem eigentlichen Gewölbe der Brückenbahn, noch durch tiefer liegende Zwischengewölbe ein- oder mehrmal zu verspannen. Hierbei werden zuweilen auch diese Zwischengewölbe zur Herstellung der Communication zwischen beiden Ufern verwendet, indem man

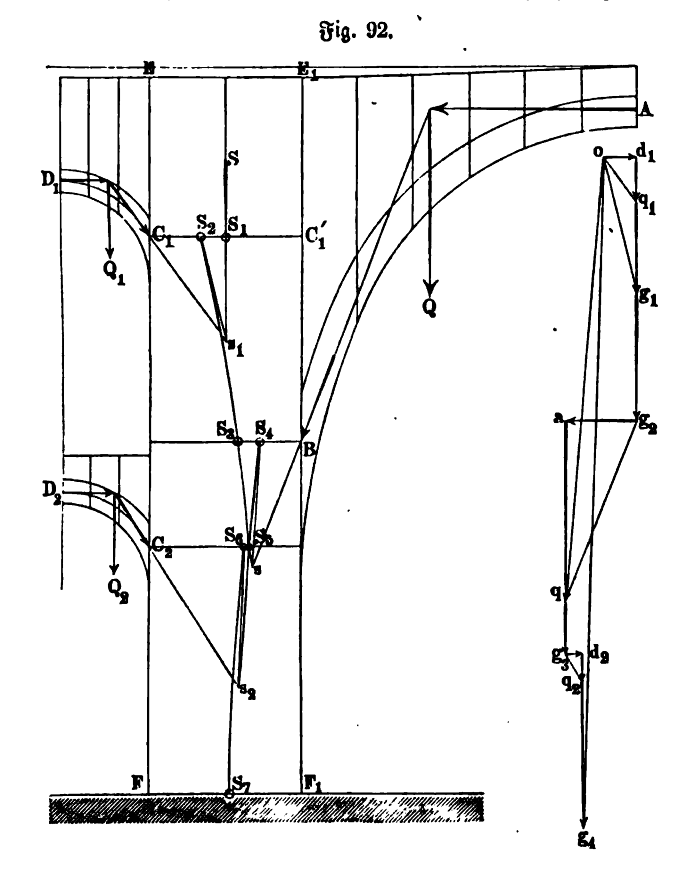
Fig. 91.

in diesem Falle die Pfeiler mit entsprechenden Oeffnungen in der Höhe der Zwischengewölbe versieht. Je nach der Anzahl solcher Zwischengewölbe unterscheidet man derartige Brücken in *ein- zwei- und mehrstöckige*. Von der Wirkung einer solchen Verspannung der Pfeiler unter einander kann man sich nach dem Vorhergehenden leicht Rechenschaft geben. Es seien P, P_1 und P_2, Fig. 91, Zwischenpfeiler eines Viaducts, welche den Bögen

AB der Brückenbahn als Widerlager dienen. Wenn nun in den gleich hoch gelegenen Punkten C_1 und C_2 des Pfeilers P sich die Spanngewölbe $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ anschließen, deren Hälften je das Gewicht Q_1 haben, und deren Horizontalschub H_1 sein möge, so vereinigen sich die in C_1 und C_2 angreifenden Stützkräfte W_1 der Spanngewölbe zu einer in der Pfeilermitte wirkenden Verticalkraft $2\,Q_1$, indem die beiden Horizontalschübe H_1 sich aufheben. Es ist also für die Stabilität des Pfeilers P durch die Spanngewölbe dasselbe Resultat erzielt, welches durch eine Beschwerung des Pfeilers in seiner Axe mit dem Gewichte zweier Hälften der Spanngewölbe CD erreicht werden würde.

In welcher Weise die Pfeiler in Anspruch genommen werden, welche in dieser oder ähnlicher Art mehreren Gewölben zum Widerlager dienen, wird man immer am schnellsten und sichersten durch die Verzeichnung der Stütz-

Fig. 92.

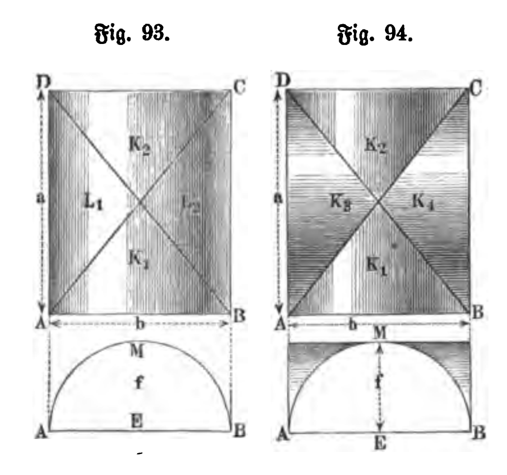


linie erkennen, deren Construction mit Hülfe des zugehörigen Kräfteplanes nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeiten bieten dürfte. Als Beispiel hierzu ist noch in Fig. 92 die Stützlinie für den oberen Theil eines mittleren Zwischenpfeilers entworfen, wie derselbe bei dem Göltzschthalviaducte (s. §. 16) zur Ausführung gekommen ist. Hier ist AB die Hälfte des mittleren Gewölbes von 30,87 m Spannweite und mehr als 70 m Höhe des Scheitels über der Thalsohle. An den Pfeiler, von welchem hier nur der Theil FE zwischen der zweiten und vierten Etage gezeichnet wurde, schließen sich bei C_1 und C_2 die halbkreisförmigen Bogen $D_1 C_1$ und $D_2 C_2$ an. Zeichnet man in bekannter Weise die Stützlinien mit Hülfe der Kräftepläne $o d_1 q_1$ für $D_1 C_1$, $g_2 a q$ für den Hauptbogen AB und $g_3 d_2 q_2$ für $D_2 C_2$, und stellt man das Gewicht des Pfeilerstückes $E E_1 C'_1 C_1$ durch $q_1 g_1$, dasjenige von $C_1 B$ durch $g_1 g_2$, ferner das von $B C_2$ durch $q g_3$ und des unteren Stückes $C_2 F_1$ durch $q_2 g_4$ dar, so erhält man in $o d_1 q_1 g_1 g_2 a q g_3 d_2 q_2 g_4$ das Kräftepolygon, welches in der mehrbesprochenen Art die Stützlinie des Pfeilers $S S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7$ liefert. Daß diese Stützlinie in jeder Lagerfuge durch einen der Kämpfer C_1, B und C_2 eine Stetigkeitsunterbrechung zeigen muß, wurde schon im Vorhergehenden gelegentlich der Fig. 89 besprochen. So ist z. B. auch hier der Punkt S_4 der Angriffspunkt für die Mittelkraft aus der in B wirkenden Gewölbreaction $g_2 q$ und der in S_3 angreifenden Resultirenden $o g_2$, und man erhält diesen Punkt S_4, wenn man durch den Schnittpunkt s jener in B und S_3 wirkenden Kräfte eine Parallele zur resultirenden Strecke $o q$ im Kräftepolygon zieht, u. s. w.

Anmerkung. Zuweilen ist man durch lokale oder andere Rücksichten gehindert, den Widerlagern eines Gewölbes die zur Stabilität erforderliche Dicke zu geben und hilft sich dann wohl durch Einlegung eines eisernen Ankers, wodurch man die beiderseitigen Widerlager verbindet. Dieser horizontale Anker wird durch den Gewölbeschub auf Zug in Anspruch genommen, und man hat, um die Stabilitätsverhältnisse der Construction zu untersuchen, ganz in der vorstehenden Art zu verfahren, nur daß man außer den bisher in Betracht gezogenen Kräften Q, G und H noch die dem Gewölbeschube H entgegengesetzt gerichtete Zugkraft Z des Ankers in die Rechnung, bezw. in die Construction einführt. Ist nun die Dicke, welche man dem Widerlager geben kann, bekannt, so findet man für einen gleichfalls anzunehmenden Stabilitätscoefficienten σ die Größe der von dem Anker auszuübenden Zugkraft Z und hieraus nach den aus dem folgenden Capitel sich ergebenden Regeln den Querschnitt des eisernen Ankers.

Kreuz- und Klostergewölbe. Denkt man sich einen im Grundrisse rechteckigen Raum $ABCD$, Fig. 93 (a. f. S.), dessen Seiten a und b sein mögen, durch ein Tonnengewölbe von der Spannweite $AB = b$ und der Pfeilhöhe $ME = f$ überspannt, und schneidet dieses Gewölbe durch zwei Verticalebenen nach den Diagonalen AC und BD, so erhält man vier cylindrische §. 29.

Stücke K und L, von denen je zwei gegenüberliegende wie K_1 und K_2 oder L_1 und L_2 zu einander symmetrisch sind. Man denke sich ferner von diesen zwei Paaren K und L das eine, etwa L, entfernt und nach Fig. 94 ersetzt durch zwei andere cylindrische Stücke K_3 und K_4, welche dadurch entstanden gedacht werden können, daß man eine horizontale, mit AB parallele Erzeugungsgerade so bewegt, daß sie mit jeder der beiden elliptischen Schnittlinien AC und BD einen Punkt gemein hat und dabei stets mit AB parallel bleibt. Auf diese Weise entsteht über dem Raume AC eine Decke, die durch zwei sich rechtwinkelig durchschneidende horizontale Tonnengewölbe gebildet wird, welche gleiche Pfeilhöhe f und gleich hoch gelegene Kämpferfugen haben, und deren Spannweiten bezw. a und b sind.

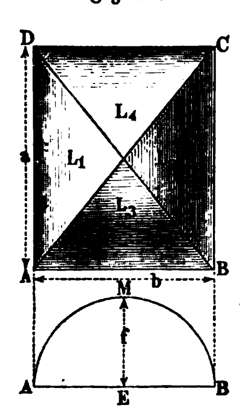


Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn das eine Gewölbe $K_1 K_2$ nach einem Kreisbogen, etwa nach einem Halbkreise AMB gebildet ist, das andere Gewölbe $K_3 K_4$ in dem Falle durch denselben Kreisbogen begrenzt sein wird, in welchem $a = b$, d. h. wenn der überdeckte Raum quadratisch ist. Ist dagegen b von anderer Größe als a, so muß der Querschnitt des Gewölbes $K_3 K_4$ durch einen Ellipsenbogen von der Sehne b und Pfeilhöhe f dargestellt werden, welcher in eine Halbellipse übergeht, sobald AMB ein Halbkreis ist. Ein solches Gewölbe nennt man ein **Kreuzgewölbe**, die vier einzelnen Stücke K heißen **Kappen** und die diagonalen Vereinigungslinien AC und BD nennt man die **Grate**, man spricht daher von **Gratbögen**, wenn nach der Richtung dieser Schnittlinien besondere Bögen ausgeführt worden sind, gegen welche sich die Kappen lehnen. Oft läßt man die Gratbögen aber auch fort, indem alsdann die Kappen sich direct gegen einander stemmen. Es ist aus dem Vorstehenden sogleich zu erkennen, daß, während das Tonnengewölbe, Fig. 93, sich gegen zwei Seitenmauern AD und BC als Widerlager stützt, bei dem Kreuzgewölbe, Fig. 94, die Stützkräfte lediglich durch die vier Ecken ABC und D ausgeübt werden müssen, in welchen Ecken daher entsprechend starke Pfeiler aufzuführen sind. Man hat sich diese Pfeiler als die Widerlager der beiden Gratbögen vorzustellen,

auf welchen letzteren die Kappen gewissermaßen lasten. Aus diesem Grunde wendet man Kreuzgewölbe hauptsächlich da an, wo es sich darum handelt, die Last der Decke auf einzelne Säulen oder Pfeiler zu übertragen, z. B. in Kirchen, Kellern ꝛc.

Anstatt in dem Tonnengewölbe Fig. 93, die beiden Stücke L_1 und L_2, welche die Kämpferfugen in sich aufnehmen, durch andere zu ersetzen, kann man aber auch die Stücke K_1 und K_2, welche die Gewölbstirnen enthalten, beseitigen, und durch solche cylindrische Stücke L_3 und L_4, Fig. 95, ersetzt denken, welche in derselben schon angegebenen Weise durch Bewegung einer mit AB parallel bleibenden erzeugenden Geraden entstehen, die auf den beiden Gratlinien AC und BD entlang geführt wird. Auf diese Weise erhält man über dem Raume eine Decke, welche gleichfalls aus zwei sich rechtwinklig kreuzenden Tonnengewölben von der gemeinsamen Pfeilhöhe f und den Spannweiten a bezw. b sich zusammensetzt. Man ersieht aus der Figur, daß bei diesem Gewölbe, welches den Namen **Klostergewölbe** führt, sämmtliche vier Umfassungsmauern als Widerlager auftreten, weshalb derartige Gewölbe hauptsächlich zum Ueberdecken einzelner von allen Seiten abgeschlossener Räume sich eignen.

Fig. 95.



Aus dem Vorstehenden ist auch ersichtlich, daß die Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse der Kreuz- und Klostergewölbe sich ebenfalls auf diejenige der Tonnengewölbe zurückführen läßt, aus welchem sie bestehen. Es sei $ABCD$, Fig. 96 (a. f. S.), ein der Einfachheit wegen quadratisch vorausgesetzter Grundriß eines Kreuzgewölbes, für welches besondere Gratbögen AC und BD ausgeführt sein sollen. Ebenso werde vorausgesetzt, daß zwischen die Pfeiler in den umfassenden Verticalebenen die Gurtbögen AB, BC, CD und DA von der Breite d gespannt seien.

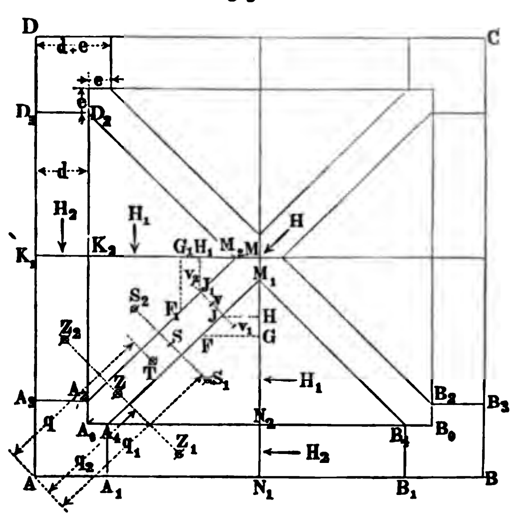
Bezeichnet zunächst Q das Gewicht eines halben Gratbogens AM sammt der **direct** auf dem Gratbogen ruhenden Belastung, und ist a der Abstand dieses Gewichtes, welches im Schwerpunkte T wirken möge, von der Innenkante A_0 des Pfeilers, so hat man den Horizontalschub H jedes Gratbogens gegen einen Pfeiler wie bei einem Tonnengewölbe zu

$$H = \frac{Qa}{f},$$

wenn f die Höhe bedeutet, um welche der Scheitel der Stützlinie in M über

deren Kämpfer in A_0 gelegen ist. Dieser Horizontalschub H wirkt in der Diagonalebene AM, und zwar in einer Höhe $h + f$ über dem Fuße des Pfeilers A, wenn der letztere unter dem Kämpferpunkte die Höhe h hat.

Fig. 96.



Außer durch sein Eigengewicht ist nun jeder halbe Gratbogen wie AM noch durch zwei halbe Kappengewölbe $A_4 M_1 N_2$ und $A_2 M_2 K_2$ belastet. Diese Belastung kann man folgenderart bestimmen.

Denkt man sich eine halbe Kappe z. B. $A_4 M_1 N_2$ durch verticale Ebenen parallel AB in einzelne Gewölbstreifen wie z. B. $FGHJ$ zerlegt, so entsprechen diese Streifen ebenso vielen halben Tonnengewölben, deren Spannweite um so geringer ist, je näher die Schnittebenen der Mitte M gelegen sind. Die Spannweite dieser Gewölbstreifen hat ihren größten Werth in $A_4 B_4$, und man hat dem Kappengewölbe die dieser Spannweite und der entsprechenden Belastung zukommende Gewölbstärke zu geben. Irgend ein solcher Streifen der halben Kappe habe ein Eigengewicht $\varDelta Q$, und es sei mit $\varDelta H$ der Horizontalschub desselben verstanden. Zu jedem solchen Streifen wie $FGHJ$ der halben Kappe $A_4 M_1 N_2$ giebt es einen symmetrisch zum Grat AM gelegenen Streifen wie $F_1 G_1 H_1 J_1$ der Kappe $A_2 M_2 K_2$, und es ist deutlich, daß je zwei solcher Streifen wie FH und $F_1 H_1$ in ihrer vereinigten Wirkung auf den Gratbogen AM eine Verticalkraft gleich $2 \varDelta Q$ und einen Horizontalschub in der Ebene der Diagonale AM von der Größe $\varDelta H \sqrt{2}$ ausüben. Dieser letztere Horizontalschub ist in der Höhe des Scheitels M, also in der Höhe $h + f$ über dem Fuße des Pfeilers angreifend zu denken,

während die Richtungslinie der verticalen Kraft $2 \varDelta Q$ durch die Durchschnittslinie v gegeben ist, in welcher die Diagonalebene AM von der gemeinschaftlichen Schwerebene $v_1 v_2$ der beiden Streifengewichte $\varDelta Q$ geschnitten wird. Bezeichnet man nun mit Q_1 das Gewicht jeder der beiden halben Kappen $A_4 M_1 N_2$ und $A_2 M_2 K_2$, und mit H_1 den Horizontaldruck derselben, so erkennt man, daß der halbe Gratbogen AM durch die besagten beiden halben Kappen einem weiteren Horizontaldrucke im Scheitel von der Größe $H_1 \sqrt{2}$ in der Diagonalebene AM und einer ferneren Belastung durch das Gewicht $2 Q_1$ ausgesetzt ist. Diese verticale Belastung $2 Q_1$ hat man sich ebenfalls in der Diagonalebene AM und zwar so vertheilt vorzustellen, wie oben angegeben wurde, so nämlich, daß der Schwerpunkt dieser Belastung in S erhalten wird, wenn man die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden halben Kappen $A_4 M_1 N_2$ und $A_2 M_2 K_2$ durch eine Gerade $S_1 S_2$ verbindet. Aus dieser Belastung hat man nun nach dem Vorhergehenden die Stärke des Gratbogens AM zu bestimmen.

Um auch die Stabilität der Pfeiler zu untersuchen, hat man noch zu berücksichtigen, daß jeder Pfeiler, wie A, noch durch zwei Gurtbögen wie $A_1 B_1$ und $A_3 D_3$ gedrückt wird. Bezeichnet man mit H_2 den Horizontalschub jedes dieser Bögen und mit Q_2 das Gewicht einer Bogenhälfte wie $A_1 A_4 N_2 N_1$, so vereinigt sich die Wirkung der beiden Gurte auf den Pfeiler A zu einer resultirenden ebenfalls in der Scheitelhöhe $h + f$ und in der Diagonalebene AM wirkenden Horizontalkraft $H_2 \sqrt{2}$ und zu einer resultirenden verticalen Belastung $2 Q_2$, deren Angriffspunkt in Z erhalten wird, wenn man die Schwerpunkte Z_1 und Z_2 der beiden Gurtbogenhälften durch eine Gerade verbindet. Unter Berücksichtigung dieser Kräfte läßt sich nun in der mehrfach besprochenen Art die Gleichung für die Widerstandsfähigkeit des Pfeilers A angeben. Derselbe wird durch die in der Diagonalebene AM in der Höhe $h + f$ über dem Fuße angreifenden Kräfte

$$H + (H_1 + H_2) \sqrt{2}$$

auf Umkippen um die Kante A angegriffen, und widersteht dem Umkanten außer durch sein Eigengewicht G noch durch das Moment der Belastungen Q des halben Gratbogens, $2 Q_1$ der beiden Kappenhälften und $2 Q_2$ der beiden halben Gurtbögen. Bezeichnet man mit

$$F = (d + e)^2 - e^2 = d^2 + 2de$$

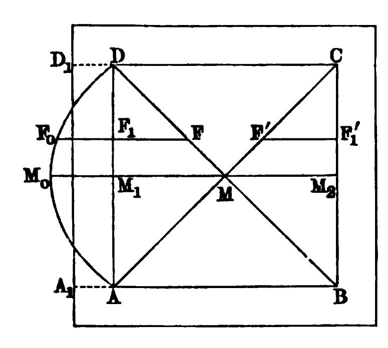
den Querschnitt des Pfeilers, dessen Schwerpunkt von der Kante A den leicht zu ermittelnden Abstand s haben möge, und sind unter q, q_1 und q_2 die Abstände der Verticalkräfte Q, $2 Q_1$ und $2 Q_2$ ebenfalls von der Kante A verstanden, so findet man für einen geforderten Stabilitätscoefficienten σ die Gleichung

$$\sigma \left[H + (H_1 + H_2) \sqrt{2}\right] (h + f) = F h \gamma s + Q q + 2 Q_1 q_1 + 2 Q_2 q_2,$$

woraus man nach Feststellung der Verhältnisse der Bogen und Kappen die Größe des Querschnitts F d. h. die Stärken d und e ermitteln kann. Eine weitere Ausführung der betreffenden Rechnung soll hier unterbleiben, dieselbe dürfte in jedem speciellen Falle ohne besondere Schwierigkeiten durchführbar sein.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Untersuchung des Klostergewölbes über dem rechteckigen Raume $ABCD$, Fig. 97, auf diejenige der Tonnengewölbe zurückführen. Denkt man sich auch hier die einzelnen Kappen in Streifen durch verticale Ebenen wie $M_1 MM_2$, und $F_1 F$ zerlegt, so erkennt man, daß der mittlere Gewölbstreifen $M_1 MM_2$ mit einem Tonnengewölbe von der Spannweite AB und der Pfeilhöhe f übereinstimmt, daher auch für diesen Streifen die Gewölbestärke nach den oben für Tonnengewölbe angegebenen Regeln zu bestimmen ist. Diese Gewölbstärke pflegt man meistens für die Kappen in allen übrigen Punkten beizubehalten. Irgend ein Streifen einer Kappe wie $F_1 F$ stützt sich in F_1 mit seiner Stützkraft

Fig. 97.



$$W = \sqrt{Q^2 + H^2}$$

auf die Widerlagsmauer, der Grat MD dagegen erhält in F keine Belastung durch den Streifen $F_1 F$, da dessen Wirkung sich durch die Kappe DMC auf den gegenüberliegenden Streifen $F' F_1'$ der Kappe CMB fortsetzt, und daher die Horizontalschübe von FF_1 und $F' F_1'$ sich aufheben. Daher pflegt man bei den Klostergewölben auch in der Regel das Einwölben besonderer Gratbögen zu unterlassen.

Als Widerlager treten, wie schon oben angeführt wurde, bei den Klostergewölben alle vier Umfassungsmauern auf. Um deren Stärke zu bestimmen, denke man sich für jeden Gewölbstreifen wie z. B. FF_1 entsprechend dessen Spannweite und Belastung die erforderliche Dicke $F_1 F_0$ des Widerlagers ermittelt. Offenbar erhält man alsdann in der Mitte M, wo die Spannweite $M_1 M_1'$ den größten Werth hat, auch die größte Stärke $M_1 M_0$ der Widerlagsmauer, während diese Stärke aus der Rechnung für die Ecken A und D gleich Null hervorgeht. Die Theorie würde daher eine Widerlagsmauer von der segmentförmigen Grundrißgestalt $AM_0 D$ ergeben. In der Ausführung wählt man hierfür meistens eine Mauer von dem rechteckigen

Querschnitte ADD_1A_1 und solcher Dicke, daß das Stabilitätsmoment für beide Mauern in Bezug auf AD als Drehkante gleich groß ist. Auch kann man, wenn man sich mit dieser Annäherung nicht begnügen will, das resultirende Umsturzmoment aller einzelnen Streifen wie FF_1 von A bis D bilden und danach die Querdimensionen der Mauer bestimmen.

§. 30.

Kuppelgewölbe. Die zur Ueberdeckung von Räumen kreisförmigen Grundrisses dienenden Kuppelgewölbe sind dadurch gekennzeichnet, daß die beiden Leibungen durch zwei Rotationsflächen dargestellt sind, deren gemeinsame Axe im Mittelpunkte des kreisförmigen Grundrisses senkrecht steht. Die Erzeugungs- oder Meridianlinien dieser Rotationsflächen sind häufig Kreisbögen, so daß die Wölbflächen kugelförmig ausfallen, doch kommen auch anders gestaltete Meridianlinien vor. Ein solches Kuppelgewölbe ist entweder ein geschlossenes, d. h. bis zum Scheitelpunkte fortgesetztes, oder ein offenes im Scheitel durch eine kreisförmige Oeffnung unterbrochenes. Die letztere Anordnung findet sich häufig aus dem Grunde, um die centrale Oeffnung behufs der Beleuchtung als Oberlicht (Laterne) wirken zu lassen.

Fig. 98.

Die Belastung der Kuppeln besteht fast immer nur in ihrem Eigengewichte, bezw. ihrer Bekleidung, und zwar ist diese Belastung in allen Fällen als ganz gleichförmig um die Axe herum vertheilt anzunehmen, wenigstens soll auf eine einseitige Belastung, wie sie z. B. durch Schneedruck herbeigeführt werden kann, im Folgenden nicht Rücksicht genommen werden. Um die Stabilitätsverhältnisse dieser Gewölbe zu prüfen, denke man sich durch Fig. 98 ein halbes Kuppelgewölbe dargestellt, für welches AO die Axe und ACB die Mittellinie der Meridianfläche sein mag. Denkt man sich aus diesem Gewölbe durch zwei verticale Axenebenen OE und OF, welche unter einem kleinen Winkel $EOF = \omega$ gegen einander geneigt sind, ein streifenförmiges Element herausgeschnitten, dessen Mittelebene durch $A_1A_2B_2B_1$ dargestellt ist, so kann man in Bezug auf dieses Element ganz ähnliche Be-

trachtungen anstellen, wie bei den Tonnengewölben. Zieht man nämlich in dem Meridianschnitte AB durch einen beliebigen Punkt C der Mittellinie ACB eine auf der letzteren senkrechte Gerade $D_1 D_2$, so kann man den Kegelmantel, dessen Axe AO ist, und dessen Seite durch diese Gerade $D_1 D_2$ gebildet wird, als die Lagerfuge für alle die unendlich vielen elementaren Streifen ansehen, in welche sich der oberhalb $D_1 D_2$ befindliche Theil der Kuppel zerlegen läßt. Für jedes derartige Element, wie $A_1 A_2 D_2 D_1$, gilt nun wieder die allgemeine Bedingung, daß das Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die Resultirende aller auf das Element wirkenden äußeren Kräfte die Lagerfuge innerhalb des Gewölbmaterials $D_1 D_2$ trifft und von der Normalen zu $D_1 D_2$ um weniger als den betreffenden Reibungswinkel abweicht. Als äußere, auf das Element wirkende Kraft hat man zunächst das Gewicht Q des Elementes und seiner etwaigen Belastung anzusehen, welches in dem bezüglichen Schwerpunkte S wirksam zu denken ist. Außerdem wirken noch auf die beiden verticalen Seitenflächen des Elementes, welche in den Meridianebenen OE und OF enthalten sind, gewisse Reactionen oder Pressungen P, die von den benachbarten Elementen ausgeübt werden. Aus der vorausgesetzten in Bezug auf die Axe AO gleichförmigen Gestalt und Belastung ergiebt sich sogleich, daß diese Pressungen nur normal zu den verticalen Meridianebenen OE und OF gerichtet sein können, denn würde die Pressung einer solchen Ebene eine in diese Ebene hineinfallende tangentiale Componente haben, welche etwa nach auswärts von O nach E gerichtet wäre, so würde von den beiden in der betreffenden Meridianebene zusammenstoßenden Gewölbelementen das eine durch diese Componente nach außen und das andere durch die gleich große und entgegengesetzte Reaction nach innen gedrückt werden, was mit der Annahme der vollkommenen Gleichmäßigkeit aller Verhältnisse rings um die Axe AO nicht zu vereinigen wäre. Aus dieser Gleichförmigkeit folgt ebenso auch die Gleichheit der beiden auf die Seitenebenen OE und OF des Elementes wirkenden Pressungen, welche jede mit P bezeichnet werde. Diese unter dem kleinen Winkel ω gegen einander wirkenden horizontalen Pressungen P setzen sich nun nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft $J_1 J_2$ zusammen, deren Größe wegen der Kleinheit von ω durch

$$J_1 J_2 = 2 P \sin \frac{\omega}{2} = P \omega = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben ist, und welche in der mittleren Meridianebene des Elementes horizontal von innen nach außen wirkt. Setzt man diese horizontale Kraft H, welcher das betrachtete Element durch die Pressungen seiner beiden benachbarten Elemente ausgesetzt ist, mit dem Gewichte Q zu einer Mittelkraft W zusammen, so muß diese Resultirende den oben angegebenen Bedingungen

entsprechen, gerade so wie die Stützkraft W bei den bisher betrachteten Tonnengewölben. Die Analogie mit den letzteren fällt überhaupt ins Auge, und der wesentliche Unterschied besteht nur darin, daß, während bei den Tonnengewölben der Horizontalschub H in der Scheitelfuge durch die Reaction der benachbarten Gewölbhälfte ausgeübt wird, bei dem Kuppelgewölbe dieser Horizontalschub H unterhalb des Scheitels gelegen ist. Dies geht daraus hervor, daß hier der Horizontalschub als die Resultirende aus den Wirkungen angesehen werden muß, welche die beiderseits benachbarten Gewölbtheile auf die Meridianflächen ausüben, in denen sie mit dem betrachteten Elemente in Berührung sind. Wenn nun die durch Zusammensetzung von Q und H sich ergebende Stützkraft W durch irgend einen Punkt etwa C der Lagerfuge $D_1 D_2$ geht, so hat man für diesen Punkt C als Mittelpunkt der Momente die Gleichung

$$Qa = Hb \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

unter a und b die Abstände des Stützpunktes C von dem Gewichte Q, bezw. von der Horizontalkraft H verstanden. Ebenso ist die Stützkraft in C wie bei den Tonnengewölben durch

$$W = \sqrt{Q^2 + H^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

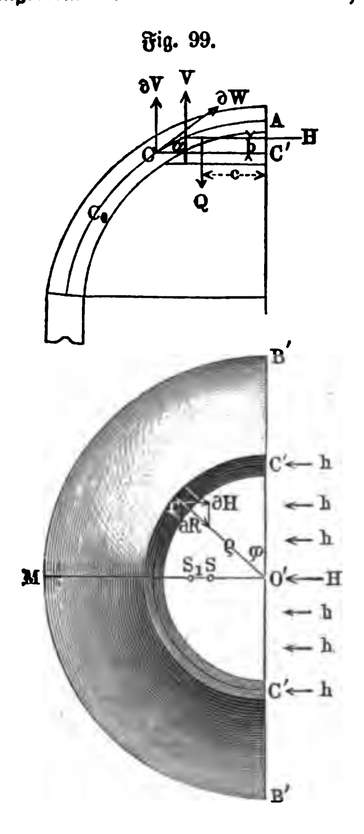
gegeben.

Denkt man sich diese hier für die beliebige Lagerfuge $D_1 D_2$ angestellte Betrachtung für alle möglichen Fugen zwischen dem Scheitel A und der Basis oder dem Kämpfer B angestellt, so gelangt man auch hier, wie bei dem Tonnengewölbe, zum Begriffe der Stützlinie oder Mittellinie des Druckes, wenn man alle diejenigen Punkte mit einander durch eine stetige Linie verbunden denkt, in welcher die einzelnen Fugen von den zugehörigen Mittelkräften getroffen werden, und es lassen sich offenbar hinsichtlich der allgemeinen Eigenschaften dieser Stützlinien, und hinsichtlich der Anzahl der möglichen und der Unbestimmtheit der wirklichen Stützlinien die für Tonnengewölbe gemachten Bemerkungen leicht auf Kuppelgewölbe übertragen. Die Horizontalkraft H ist hier nicht wie bei den Tonnengewölben für alle Fugen constant, sondern dieselbe nimmt, da sie aus den Reactionen auf die Seitenflächen des Streifens entsteht, allmälig nach unten hin zu. Um für die Größe dieses Horizontaldruckes H einen allgemeinen Ausdruck zu erhalten, sei der von Föppl*) eingeschlagene Weg befolgt, indem zunächst die Kuppel durch eine Meridianebene $B' O' B'$, Fig. 99 (a. f. S.), in zwei gleiche Theile zerlegt wird. Betrachtet man von einer solchen Hälfte diejenige halbe Calotte, welche zwischen dem Scheitel A und der kegelförmigen Fuge $C' C C'$ enthalten ist, so wirkt auf dieses Stück außer dessen Eigengewicht Q die Summe

*) A. Föppl, Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.

aller in dem Halbkreise $C' C C'$ gleichmäßig vertheilten Stützkräfte w und außerdem die Summe aller der nach dem Vorstehenden horizontalen Reactionen h, mit welchen die weggeschnitten gedachte Hälfte gegen den Meridianschnitt $C' O' C'$ wirkt. Diese letzteren Reactionen liefern eine horizontale Mittelkraft H, welche in der $C' C'$ senkrechten Symmetrieebene $O' M$ des Kuppelstückes wirkt, und zwar in einer noch unbekannten Höhe b über dem mittleren Kreise $C C'$ der Lagerfuge.

Fig. 99.



Wegen der symmetrischen Form und Belastung der Kuppel wird die Stützreaction w der Lagerfuge in derselben nach allen Meridianebenen gleichförmig vertheilt sein, und es ist aus demselben Grunde auch klar, daß diese Reaction für irgend welchen Punkt der Lagerfuge in der Meridianebene desselben liegen, und für alle Punkte unter demselben Winkel α gegen den Horizont geneigt sein muß. Wenn also diese Reaction w in irgend einem Meridianschnitte in dem Punkte C vom Halbmesser $O' C = \varrho$ angreift, so kann man sich den gesammten Widerstand der Lagerfuge in der Kreislinie $C' C C'$ vom Halbmesser $O' C = \varrho$ wirksam denken. Bezeichnet man daher mit w den mittleren Stützdruck auf die Längeneinheit dieser Kreislinie, so erhält man für irgend ein Element ∂L derselben den Stützdruck

$$\partial W = w \partial L.$$

Zerlegt man den elementaren Stützdruck ∂W in irgend welchem Punkte C in seine verticale Componente ∂V und die horizontale, also radial gerichtete Componente ∂R, so hat man

$$\partial V = \partial W \sin \alpha = w \sin \alpha \, \partial L \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Offenbar ist die Summe aller verticalen Componenten gleich dem Gewichte Q des betrachteten Kuppelstückes, so daß man hat

$$V = Q = w \sin \alpha \, L = w \sin \alpha \, \pi \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Die radiale Componente dagegen findet man zu

$$\partial R = \partial W \cos\alpha = w \cos\alpha\, \partial L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wenn man dieselbe wiederum zerlegt in eine Componente senkrecht und eine parallel zur Begrenzungsebene $C' O' C'$ des betrachteten Kuppelstückes, so erhält man die erstere zu

$$\partial H = \partial R \sin\varphi = w \cos\alpha\, \partial L \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn φ den Winkel $C O' C'$ bedeutet, welchen die Meridianebene von C mit der Grenzebene $C' O' C'$ bildet. Summirt man auch diese Componenten für alle Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, so erhält man, da $\partial L \sin\varphi$ gleich der Projection des Kreisbogenelementes ∂L auf den Durchmesser $C' C'$ ist, die gesammte Horizontalkraft

$$H = w \cos\alpha\, 2\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und durch Division in (5):

$$tang\, \alpha = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die andere Componente von ∂R, welche parallel mit der Begrenzungsebene $C' C'$ und durch

$$\partial R \cos\varphi$$

gegeben ist, liefert bei der Summirung ein Resultat gleich Null, da diese Componenten für je zwei zu $O' M$ symmetrisch gelegene Elemente gleich und entgegengesetzt sind.

Die verticale Resultirende V hat man sich in dem Schwerpunkte S_1 der als materiell gedachten halben Kreislinie $C' C C'$ angreifend zu denken, welcher Schwerpunkt von der Ebene $C' C'$ bekanntlich den Abstand $O S_1 = \frac{2}{\pi} \varrho$ hat, während die Schwerkraft Q der halben Kuppelschale in dem Schwerpunkte S wirkt, dessen Abstand von $C' O' C'$ durch c ausgedrückt sein mag. Bezeichnet man noch den verticalen Abstand der Horizontalkraft H von dem Kreise $C' C$ mit b, so hat man zur Bestimmung von b die Momentengleichung

$$Q \,.\, S S_1 = Q \left(\frac{2}{\pi} \varrho - c\right) = H b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche, wenn man darin aus (9)

$$H = \frac{2\, Q}{\pi\, tang\, \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

einführt,

$$b = \left(\varrho - \frac{\pi}{2} c\right) tang\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

liefert.

Aus der Gleichung (11):

$$H = \frac{2}{\pi} Q \operatorname{cotg} \alpha$$

erkennt man leicht, daß der Horizontalschub H des Kuppelgewölbes für einen gewissen Winkel α, d. h. für eine gewisse Stelle der Kuppel einen größten Werth annimmt. Man findet hierfür die Bedingung durch

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0,$$

welche, mit Rücksicht darauf, daß das Gewicht Q von α abhängt, die Gleichung liefert:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{cotg} \alpha \frac{\partial Q}{\partial \alpha} - \frac{Q}{\sin^2 \alpha}\right) = 0,$$

oder

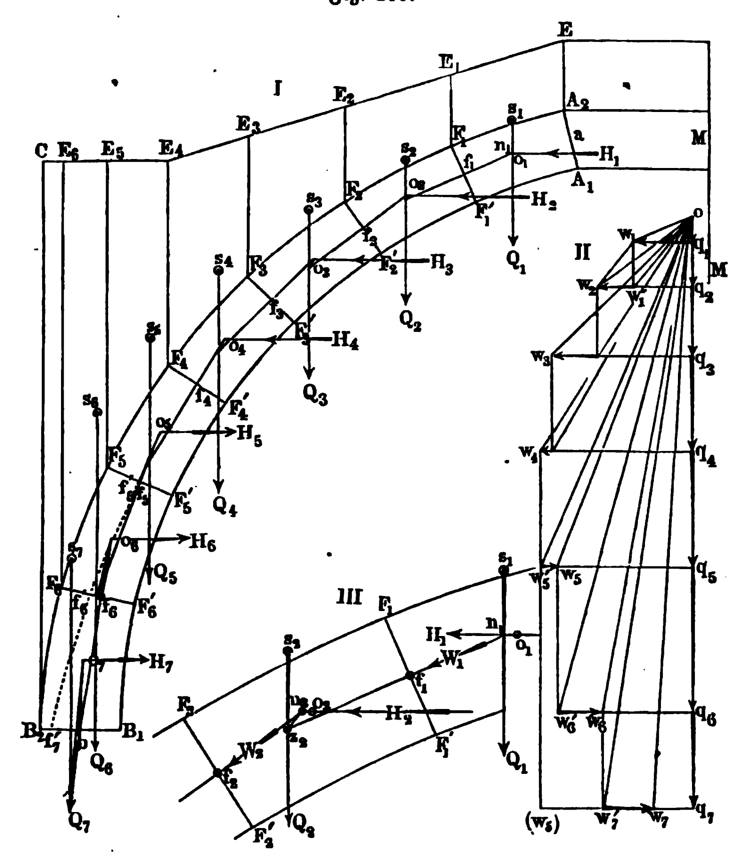
$$\frac{\partial Q}{Q} = 2 \frac{\partial \alpha}{\sin 2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Sei etwa C_0 der Punkt des Meridianschnittes, für welchen diese Bedingung (13) erfüllt ist, für welchen also der Horizontalschub H den größten Werth annimmt, so wird für alle tiefer liegenden Punkte der Kuppel der Horizontalschub H, d. h. also die Pressung in dem Meridianschnitte $B'O'B'$ kleiner. Dies könnte nur dadurch möglich werden, daß in dem Meridianschnitte unterhalb dieses Punktes C_0 nicht mehr rückwirkende Pressungen, sondern absolute Spannungen stattfänden. Da man aber annehmen muß, daß der Mörtel in den Fugen Zugspannungen nicht zu übertragen vermag, so wird unterhalb des gedachten Punktes C_0 in den Meridianschnitten überhaupt keine Reactionswirkung ausgeübt werden, indem man sich zu denken hat, daß sämmtliche verticale Stoßfugen von dem durch C_0 gelegten Horizontalschnitte aus nach unten hin sich öffnen. Der Horizontalschub hat daher für alle Punkte des Kuppelgewölbes unterhalb C_0 einen constanten Werth gleich dem dem Punkte C_0 zukommenden Maximum von H. Es ist daraus auch ersichtlich, daß unterhalb dieses Punktes C_0 die Stützlinie zufolge des Horizontaldruckes H_{max} mehr nach außen gedrängt wird, als es der Fall sein würde, wenn der Mörtel in den einzelnen Steinkränzen Zugspannungen auszuüben vermöchte, weil in Folge einer solchen Eigenschaft der Horizontalschub um so mehr sich verringern müßte, je mehr das betreffende Kuppelstück unterhalb des durch C_0 gedachten Ringes herabreicht.

In der That hat man vielfach bei Kuppeln den einzelnen Steinkränzen im unteren Theile die Fähigkeit, Zugspannungen aufzunehmen, dadurch ertheilt, daß man die Kuppeln direct über dem Auflager mit eisernen Ringen umgürtete, wie dies z. B. bei der berühmten Kuppel der St. Peterskirche

in Rom nachträglich geschehen ist. In welcher Weise die Anordnung eines solchen Ringes, der durch seine Zugspannung den Horizontalschub für den unteren Theil der Kuppel von dem größten Werthe H_{max} wieder herabzieht, und dadurch die Stützlinie entsprechend nach innen drängt, zu treffen, und wie der Einfluß desselben auf die Stabilität des Kuppelgewölbes und ins-

Fig. 100.



besondere der Widerlagsmauer zu beurtheilen ist, dürfte nach dem Vorhergegangenen deutlich sein.

Auch bei den Kuppelgewölben wird man sich am bequemsten einer graphischen Methode zur Ermittelung des Horizontaldruckes und der Pressung in jedem Querschnitte bedienen, um danach die erforderliche Stärke des Gewölbes und Widerlagers zu bestimmen. Dies kann in folgender Weise geschehen. Es sei $A_1 A_2 B_2 B_1$, Fig. 100, der Meridianschnitt eines Kuppel-

gewölbes, welches in der Mitte mit einer Lichtöffnung MA_1A_2 versehen sein mag, und dessen Belastung in bekannter Weise durch die Belastungslinie CE dargestellt sein soll. Man theile dann den Gewölbequerschnitt durch Ebenen wie F_1F_1', F_2F_2' ... nach der Richtung der Lagerfugen in eine beliebige Anzahl von Theilen, welche als Gewölbsteine aufgefaßt werden können, und ziehe durch die oberen Kanten F_1F_2 ... dieser Fugen die Verticalen FE bis zur Belastungslinie. Betrachtet man jetzt ein streifenförmiges Element, dessen Mittelebene der gezeichnete Meridianschnitt $A_1ECB_2B_1$ ist, und dessen Mittelpunktswinkel etwa den n ten Theil einer ganzen Umdrehung 2π beträgt, so kann man die Gewichte Q_1, Q_2, Q_3 ... der einzelnen Stücke leicht ermitteln, in welche dieser Streifen durch die Flächen FE zerlegt ist. Wird z. B. mit f_3 die Querschnittsfläche eines solchen Theiles wie $F_2'E_2E_3F_3'$ bezeichnet, und hat der Schwerpunkt s_3 dieses Querschnittes den Abstand ϱ_3 von der Axe MM der Kuppel, so würde der Inhalt von dem zugehörigen Stücke des betrachteten Streifens zu $\frac{2\pi\varrho f_3}{n}$ sich bestimmen und daher verhalten sich die Gewichte Q_1, Q_2, Q_3 ... der einzelnen Elemente des Streifens, wie die Producte $f_1\varrho_1, f_2\varrho_2, f_3\varrho_3$ ..., welche Producte nach Annahme einer gewissen Basis für den Kräftemaßstab in der mehrfach angegebenen Art leicht durch Strecken dargestellt werden können. Es mögen diese Strecken auf der Verticallinie oq_7 im Kräfteplane aufgetragen werden, so daß $oq_1 = Q_1$, $q_1q_2 = Q_2$, $q_2q_3 = Q_3$ ... gemacht ist, und es mögen s_1, s_2, s_3 ... die Angriffspunkte der Gewichte Q, d. h. die Schwerpunkte der betrachteten Stücke sein. Man wird in den meisten Fällen bei genügender Kleinheit der Theile für die Schwerpunkte dieser Theile die Schwerpunkte der Querschnittsflächen f_1, f_2, f_3 ... annehmen können, wobei der Fehler um so geringer ausfällt, je größer der Axenabstand ϱ dieses Schwerpunktes im Vergleiche zu der horizontalen Dimension der Querschnittsflächen f_1, f_2, f_3 ... ist, d. h. je größer die Anzahl n der Theile ist, in welche die Kuppel zerlegt wurde. Auf die einzelnen Wölbsteine wirken nun nach dem Vorstehenden gewisse horizontale Kräfte H_1, H_2, H_3 ..., welche als die Resultanten der auf die beiden Seitenflächen eines solchen Steines, d. h. in den Stoßfugen, von den benachbarten Steinen ausgeübten Reactionen angesehen werden müssen. Für den Angriffspunkt dieser Horizontalkräfte nimmt Scheffler entsprechend dem Princip des kleinsten Widerstandes die oberste Kante jedes Wölbsteines an, also A_2 für die Horizontalkraft H_1 des obersten Steines A_2F_1', F_1 für die Horizontalkraft H_2 des folgenden Steines F_1F_2' u. s. w., wogegen Andere*) den Schwerpunkt der Querschnittsfläche eines Wölbsteines als Angriffspunkt

*) S. Föppl, Theorie der Gewölbe.

der Horizontalkraft annehmen. Diese letztere Annahme soll auch hier gemacht und daher vorausgesetzt werden, daß H_1 im Schwerpunkte o_1 von $A_2 F_1'$, H_2 im Schwerpunkte o_2 von $F_1 F_2'$ angreife u. s. f.

Um nun die Horizontalkräfte selbst zu bestimmen, muß in Bezug der zugehörigen Stützlinie eine entsprechende Annahme gemacht werden. Es ist nämlich hier wie bei den Tonnengewölben leicht ersichtlich, daß es in einem stabilen Kuppelgewölbe eine unendlich große Anzahl von möglichen Stützlinien geben wird, welche sich von einander durch die Größe des Horizontalschubes unterscheiden. Welche von diesen möglichen Stützlinien die wirkliche ist, wird, wie schon bei den Tonnengewölben angeführt wurde, sich nur angeben lassen, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe genügend untersucht sein werden. Man wird daher auch hier die Untersuchung derartig führen können, daß man prüft, ob innerhalb des Kerns eine Stützlinie möglich ist, und wird ebenso, wie bei den Tonnengewölben gezeigt wurde, die möglich größte Sicherheit erlangen, wenn das Gewölbe so geformt und belastet ist, daß die Mittellinie des Gewölbes eine mögliche Stützlinie wird, womit auch hier wiederum von vornherein noch nicht gesagt ist, daß diese mögliche Stützlinie auch unter allen Umständen die wirkliche sei. Mit Rücksicht hierauf soll denn untersucht werden, unter welchen Verhältnissen diejenige Linie $a f_1 f_2 f_3 \ldots b$ zu einer Stützlinie des Gewölbes wird, welche die Mitten der Lagerfugen enthält.

Nunmehr ist die Aufgabe leicht zu lösen, denn da die Stützkraft W_1 für die Fuge $F_1 F_1'$ durch deren Mitte f_1 gehen soll, und die beiden Componenten derselben Q_1 und H_1 sich in n_1 schneiden, so giebt $n_1 f_1$ die Richtung von W_1 an, und man erhält im Kräftepolygone, wenn man durch o eine Parallele $o w_1$ mit $n_1 f_1$ zieht, in $o w_1$ die Stützkraft W_1 für die erste Fuge F_1 und in $q_1 w_1$ die den obersten Stein $A_1 F_1$ in o_1 ergreifende Horizontalkraft H_1. Die in f_1 angreifende Stützkraft $W_1 = o w_1$ muß nun mit $Q_2 = q_1 q_2$ und der noch unbekannten Horizontalkraft H_2, welche in o_2 angreift, zusammen eine Resultirende ergeben, welche durch den Mittelpunkt f_2 von $F_2 F_2'$ geht. Um aus dieser Bedingung die gesuchte Horizontalkraft H_2 zu finden, setzt man zunächst W_1 mit Q_2 zu einer Mittelkraft zusammen, welche die Richtung $o w_1'$ im Kräfteplane hat, und durch den Punkt z_2 hindurchgeht, in welchem die Kraft Q_2 von der Richtung $n_1 f_1$ der Stützkraft W_1 geschnitten wird (s. auch die in größerem Maßstabe gezeichnete Figur III). Legt man daher durch diesen Schnittpunkt z_2 eine Parallele zu $o w_1'$, so erhält man in deren Schnittpunkte n_2 mit der Richtung von H_2 einen Punkt, durch welchen die Stützkraft W_2 geht, welche die Fuge F_2 in deren Mitte f_2 treffen soll. Man hat daher nur noch $n_2 f_2$ zu ziehen und damit eine Parallele durch o im Kräfteplane zu zeichnen, welche in $o w_2$ die Stützkraft W_2 und in $q_2 w_2$ die Summe $H_1 + H_2$, also in

$w_1' w_2$ die Horizontalkraft H_2 liefert. Fährt man in dieser Weise in der Construction fort, indem man jede gefundene Stützkraft W zunächst mit dem Gewichte Q des folgenden Gewölbsteines zu einer Mittelkraft und diese mit der Horizontalkraft dieses Steines zu einer Resultirenden zusammensetzt, welche die Mitte der nächsten Fuge trifft, so erhält man, der Stützlinie $a f_1 f_2 f_3 \ldots b$ entsprechend, den Kräfteplan $o w_1 w_2 w_3 \ldots w_7 q_7$, in welchem die von o aus nach den Eckpunkten w gezogenen Strahlen die betreffenden Stützkräfte für die Fugen der Richtung und Größe nach darstellen. Desgleichen giebt der horizontale Abstand $w q$ irgend eines Punktes w von der durch o gehenden Verticallinie die gesammte Horizontalkraft H an, welche auf den oberhalb der zugehörigen Fuge gelegenen Theil des Gewölbes wirkt. Man ersieht hieraus, daß die Horizontalkraft für den Punkt w_4 entsprechend der Fuge F_4 ein Maximum ist, und daß daher, wenn die Stützlinie den hier vorausgesetzten Verlauf $f_4 f_5 f_6 b$ wirklich annehmen soll, auf die unterhalb $F_4 F_4'$ gelegenen Gewölbtheile negative, d. h. nach innen gerichtete Horizontalkräfte wirken müssen. Hiernach müßte auf den Gewölbtheil $F_4 F_5'$ eine Kraft $H_5 = w_5' w_5$, auf den Theil $F_5 F_6'$ eine Kraft $H_6 = w_6' w_6$ und auf den untersten Theil $F_6 B_1$ eine Kraft $H_7 = w_7' w_7$ wirksam sein. Dieses Verhalten stimmt mit dem oben durch die Rechnung gefundenen überein, und man erkennt, daß, um die Stützlinie wirklich auch unterhalb f_4 in die Mittellinie zu bringen, die betreffenden negativen Pressungen H_5, H_6, H_7 durch die Zugspannungen eines eisernen Ringes oder mehrerer solcher erzeugt werden müßten. Bezeichnet man diese gesammte negative Horizontalkraft $H_5 + H_6 + H_7 = (w_5) w_7$ mit H_0, so ergiebt sich die absolute Spannung P im Umfange des Ringes nach Gleichung (1) durch

$$P = \frac{H_0}{\omega},$$

wenn $\omega = \frac{2\pi}{n}$ den kleinen Mittelpunktswinkel des der Construction zu Grunde gelegten Gewölbstreifens bedeutet. Aus P würde man den erforderlichen Querschnitt F dieses Ringes einfach durch $F = \frac{P}{s}$ erhalten, wenn s die zulässige Materialspannung des Schmiedeeisens pro Quadrateinheit bedeutet.

Wenn die Anwendung eines eisernen Ringes nicht stattfinden soll, so muß man, da der Mörtel Zugspannungen nicht aufnehmen kann, voraussetzen, daß der Horizontaldruck von der Fuge F_4, in welcher H seinen größten Werth $q_4 w_4$ erreicht, diesen größten Werth auch unterhalb F_4 überall beibehält, indem die Stoßfugen unterhalb F_4 sich öffnen. Man erhält dann mit Hülfe des Kräfteplans $o w_1 w_2 w_3 w_4 (w_5)$ die Stützlinie $a f_1 f_2 f_3 f_4 f_5' f_6' f_7'$,

welche sich bei f_4 von der Mittellinie nach außen entfernt, und man hat zu prüfen, ob dieser Zweig der Stützlinie überall noch innerhalb des Kerns verbleibt. Sollte dies nicht der Fall sein, die Stützlinie vielmehr über B_2 die äußere Kerngrenze des Gewölbes durchsetzen, so könnte man eine neue Stützlinie zeichnen, indem man den Angriffspunkt in der obersten Fuge F_1 so tief senkt, daß daselbst die Stützlinie bis in die innere Kerngrenze hineinrückt. Dieser neuen Stützlinie entspricht, wie aus der dann steileren Richtung von $n_1 f_1$ ersichtlich ist, ein geringerer Horizontalschub, demzufolge der untere Theil der Stützlinie bei B_2 mehr nach innen gerückt wird. Sollte daselbst die Stützlinie trotzdem noch die äußere Kerngrenze schneiden, so gäbe es überhaupt für die Kuppel keine Stabilität und man hätte die Form und Gewölbstärke bezw. die Belastung zu ändern.

Was die Prüfung der Kuppel gegen Gleiten anbetrifft, so hat man nur zu bemerken, daß die Strahlen ow des Kräfteplans die Richtungen der resultirenden Stützkräfte angeben, so daß man sich in einfacher Art überzeugen kann, wie groß die Winkel dieser Strahlen gegen die Normalen der Fugen sind, und man würde nöthigenfalls durch geänderte Fugenrichtung einem zu befürchtenden Gleiten vorbeugen können.

Die Strahlen ow geben durch ihre Längen, welche die Größe der Stützkräfte darstellen, ebenfalls für jede Lagerfuge FF' ein Maß für die Pressung, wenn man die Kraft W durch den Flächeninhalt der bezüglichen Lagerfuge dividirt. Hierbei muß aber noch bemerkt werden, daß, während in den unterhalb F_4 gelegenen Fugen die aus der Stützkraft W hervorgehende Pressung die einzige Anstrengung des Materials ist, in den darüber gelegenen Gewölbtheilen noch die zu den Stoßfugen normale Pressung P hinzukommt. Diese Pressung wird besonders nach dem Scheitel der Kuppel hin groß ausfallen und hat z. B. für den Wölbstein $A_1 A_2 F_1 F_1'$ nach Gleichung (1) für jede Seitenfläche den Werth

$$P_1 = \frac{H_1}{\omega},$$

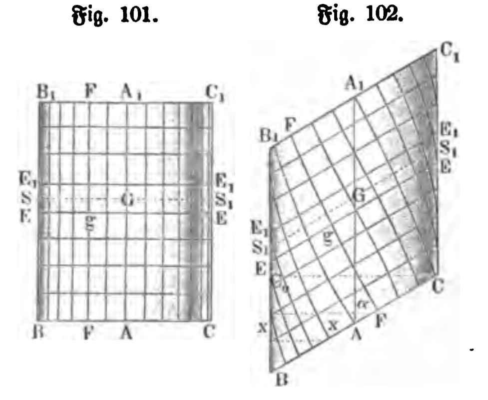
worin $H_1 = q_1 w_1$ den Horizontaldruck dieses Steines und $\omega = \frac{2\pi}{n}$ den Mittelpunktswinkel desselben bedeutet. Bei der Bestimmung der mit Rücksicht auf die Festigkeit erforderlichen Gewölbstärke ist hierauf besondere Rücksicht zu nehmen.

In welcher Weise der weitere Verlauf der Stützlinie unterhalb der Kämpferfuge $B_1 B_2$ im Widerlager bestimmt werden kann, ist aus dem Früheren deutlich und bedarf hier keiner Wiederholung.

Schiefe Gewölbe. Bei den bisher betrachteten cylindrischen oder §. 31. Tonnengewölben war immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die Stirn-

flächen senkrecht zu der Axe und den mit der Axe parallelen Widerlagern des Gewölbes stehen, und daß die Axe selbst eine horizontale Lage habe. Solche Gewölbe heißen gerade oder senkrechte Gewölbe. Es kommen nun in der Ausführung zuweilen Abweichungen hiervon vor, sei es nämlich, daß die Gewölbaxe und die Widerlager gegen den Horizont geneigt sind, wie dies z. B. bei den Unterwölbungen von Treppen und bei den Decken von ansteigenden Rauchcanälen der Fall ist, oder sei es, daß die Axe zwar horizontal aber gegen die Gewölbstirnen schräg gerichtet ist. Der letztere Fall ist von besonderer Wichtigkeit für die Eisenbahnbrücken, bei denen gar häufig die Richtung der Bahn unter schiefen Winkeln die Richtung eines Flußlaufes oder einer anderen darunter befindlichen Bahn oder Straße kreuzen muß. Die hierzu dienenden Gewölbe nennt man schiefe Gewölbe. Es ist zunächst ersichtlich, daß es in Betreff der in einem Gewölbe vorkommenden Kräfte einen Unterschied nicht begründet, ob das Gewölbe ein gerades oder schiefes ist. Insbesondere erkennt man, daß bei jedem Gewölbe die Stützlinie für irgend welche Stelle immer in einer verticalen Ebene liegen muß, welche Ebene bei den bisher betrachteten geraden Gewölben zur Axe senkrecht steht, während sie gegen die Axe schiefer Gewölbe geneigt ist. Für diese Stützlinien schiefer Gewölbe müssen auch genau dieselben Bemerkungen gelten, welche im Vorstehenden hinsichtlich der geraden Tonnengewölbe gemacht werden konnten. Der Unterschied zwischen beiden Gewölbarten beruht vielmehr nur in der Ausführung bezw. in der Form, welche man den einzelnen Wölbsteinen zu geben hat, damit dieselben die auf sie wirkenden Kräfte in geeigneter Art aufnehmen können. Um diesen Unterschied klar zu machen, seien, Fig. 101 und Fig. 102, AA_1 die horizontalen Axen, sowie BB_1 und CC_1 die gleichfalls horizontalen Widerlager zweier Tonnen-

Fig. 101. Fig. 102.



gewölbe, deren Stirnflächen BC und B_1C_1 in Fig. 101 senkrecht zur Axe, dagegen in Fig. 102 unter einem schiefen Winkel $A_1AC = \alpha$ gegen die

Axe geneigt sein sollen. Denkt man sich für jedes der beiden Gewölbe durch irgend einen Punkt G des Scheitels eine Stützlinie gezeichnet, so liegt dieselbe in einer durch G gelegten Verticalebene SS_1, welche mit den Stirnflächen parallel ist, also die Axe AA_1 in Fig. 101 ebenfalls senkrecht, dagegen in Fig. 102 unter dem Winkel α schneidet. Wenn daher das Gewölbe, wie es in der Praxis immer geschieht, aus einzelnen Bögen wie EE_1 gebildet wird, so werden die Trennungsflächen EE und E_1E_1 dieser Bögen oder die sogenannten Stoßfugenflächen ebenfalls den Stirnen parallel sein müssen, denn es ist leicht zu erkennen, daß man in Fig. 102 die einzelnen Bögen nicht senkrecht zu den Widerlagern BB_1 und CC_1 anordnen kann, da alsdann die in BC_0 sich ansetzenden Bögen wie xx auf der anderen Seite C kein Widerlager finden würden.

Die einzelnen Steine eines jeden solchen bogenförmigen Gewölbtheiles wie EE_1 hat man nun mit solchen Flächen, den sogenannten Lagerflächen gegen einander zu stützen, daß sie den Druckkräften in geeigneter Weise widerstehen, und es ist in dem Vorstehenden mehrfach darauf hingewiesen, daß diese Flächen von der Richtung der auf sie wirkenden Mittelkraft an keiner Stelle um den Reibungswinkel abweichen dürfen. Am vortheilhaftesten wäre es für die Uebertragung der Druckkräfte, wenn die Lagerflächen überall senkrecht auf der Richtung der Stützkräfte stehen könnten. Mit Rücksicht auf die bequemere Darstellung der Gewölbe pflegt man aber die Wölbsteine thunlichst mit rechtwinkeligen Kanten zu versehen. Zu dem Ende führt man die Lagerflächen der Steine, d. h. diejenigen Flächen, welche den Stützdruck W aufzunehmen haben, so aus, daß sie überall senkrecht auf denjenigen Linien stehen, in welchen die innere Wölbfläche von den verticalen Ebenen der Stützlinien geschnitten wird. Denkt man sich dementsprechend sämmtliche Stoßfugen EE des Gewölbes, d. h. die Schnittlinien, in welchen die innere Wölbfläche von den Begrenzungsflächen der einzelnen Gewölbringe getroffen wird, und zeichnet zu diesen Stoßfugen ein System von ebenfalls in der inneren Wölbfläche liegenden Transversalen FF, welche die Stoßfugen überall rechtwinkelig schneiden (sogenannte orthogonale Trajectorien), so bilden diese Linien FF die Lagerfugen des Gewölbes, d. h. die Schnittlinien, in welchen die Lagerflächen der einzelnen Wölbsteine die innere Leibung treffen. Um die Lagerflächen selbst und damit die Form der Wölbsteine zu bestimmen, kann man sich etwa vorstellen, jede Lagerfläche werde erzeugt durch solche Bewegung einer geraden Erzeugenden, entlang einer der gedachten Lagerfugen FF, daß sie überall nicht nur auf diesen, sondern auch in jedem Punkte wie g auf der durch g gedachten Stoßfuge E senkrecht steht. Die so gedachten Lagerflächen werden zwar im Allgemeinen nicht genau senkrecht auf den einzelnen Stützlinien des Gewölbes stehen, doch wird die Abweichung von der zu letzteren senkrechten Richtung immer nur

unerheblich sein, da nach dem Vorhergehenden die Stützlinie und auch die mit dieser nahe übereinstimmende Richtung der Stützkraft von der inneren Gewölbbegrenzung nur unwesentlich abweichen wird. Jedenfalls wird die Abweichung der beiden Richtungen immer weit unter dem Reibungswinkel zwischen den Wölbsteinen verbleiben.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß unter dieser vorgedachten Voraussetzung die Lagerfugen F bei einem geraden Gewölbe, Fig. 101, horizontale und zur Axe parallele gerade Linien werden müssen, wenn sie auf allen Stoßfugen EE senkrecht sein sollen, während bei dem schiefen Gewölbe, Fig. 102, die Stoßfugen FF gekrümmte, in der Wölbfläche, also nicht in einer Horizontalebene, liegende Curven sind.

Diese Eigenschaft pflegt man daher auch wohl als das unterscheidende Merkmal zwischen geraden und schiefen Gewölben*) anzuführen, indem man alle diejenigen Gewölbe zu den geraden rechnet, deren Lagerfugen horizontale gerade oder gekrümmte Linien sind, während alle Gewölbe schiefe genannt werden, welche sich mit horizontalen Lagerfugen nicht ausführen lassen. Danach hat man nicht nur alle Tonnengewölbe mit horizontaler Axe und dazu senkrechten Stirnen, sondern auch alle als Umdrehungskörper mit verticaler Axe (Kuppelgewölbe) ausgeführten Gewölbe zu den geraden zu rechnen, da bei den letzteren die zu den Stoßfugen oder Meridianschnitten senkrechten Lagerfugen durch horizontale Kreise gegeben sind. Zu den schiefen Gewölben gehören hiernach insbesondere alle Tonnengewölbe, deren Stirnen nicht senkrecht zu der Gewölbaxe stehen, also nicht nur die in Fig. 102 dargestellten horizontalen, sondern auch alle steigenden Gewölbe, denn auch bei den letzteren ist, wie leicht zu ersehen ist, keine horizontale Lagerfuge denkbar, welche überall auf den Stoßfugen, d. h. den Schnitten des Gewölbes mit verticalen Querebenen senkrecht ist.

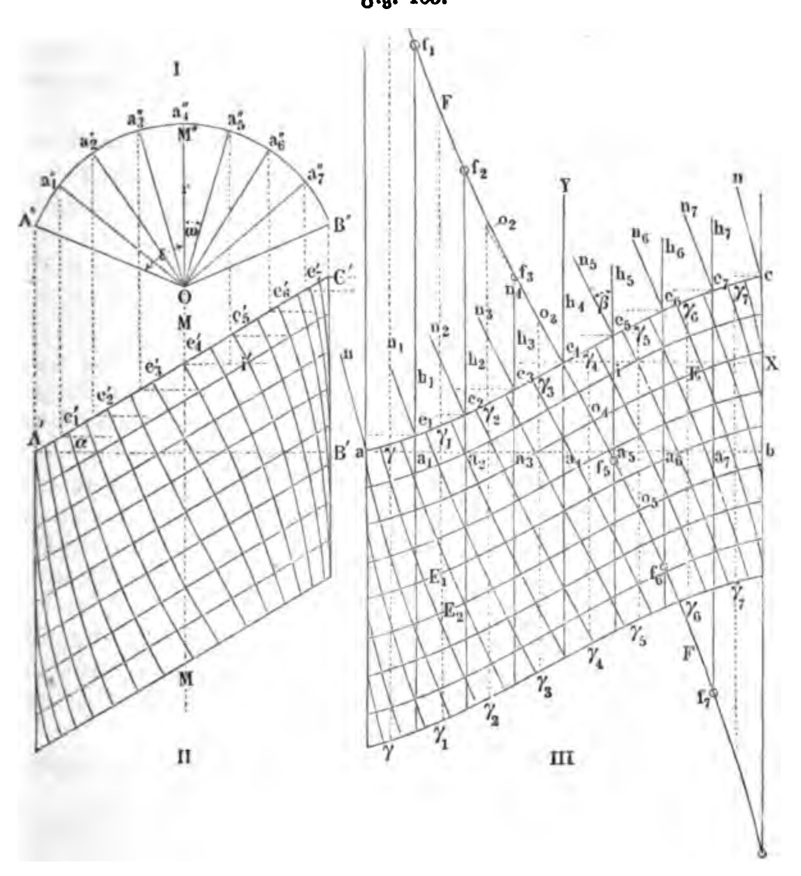
Es kann hier bemerkt werden, daß die Stoßfugen gerader Gewölbe zu den aus der Geometrie bekannten sogenannten Linien des größten Falles gehören, welche sich in der Gewölbfläche angeben lässen, da beide Arten von Linien die Eigenschaft gemein haben, in jedem ihrer Punkte senkrecht auf der durch denselben Punkt gehenden horizontalen Tangente der Wölbfläche zu stehen. Mit Rücksicht hierauf kann man auch den Satz aussprechen, daß nur solche Wölbflächen sich zur Herstellung gerader Gewölbe eignen, für welche die Curven größten Falles in verticalen Ebenen liegen.

Um nun für ein gegebenes schiefes Gewölbe die Lagerflächen festzustellen, hat man auf der abgewickelten inneren Wölbleibung die Lagerfugen zu entwerfen, welche alsdann die Form der Lagerflächen zweifellos feststellen, da

*) S. Heider, Theorie der schiefen Gewölbe. Wien 1846.

letztere nach dem Vorhergehenden durch Bewegung einer zur inneren Wölbfläche senkrechten Geraden auf diesen Lagerfugen entstanden gedacht werden können. Um die Lagerfugen zu zeichnen, sei $A''B''$, Fig. 103, der zur Axe MM senkrechte Durchschnitt der inneren Leibung eines schiefen Tonnen-

Fig. 103.



gewölbes, dessen Stirnfläche $A'C'$ mit dem zur Axe MM senkrechten Querschnitte $A'B'$ den Winkel α bilden möge. Um zunächst die innere cylindrische Wölbfläche abzuwickeln, hat man nur nöthig, die krumme Schnittlinie $A''M''B''$ durch $a_1''a_2''a_3''$ ... in eine nicht zu kleine Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen, deren Bogenlängen man auf ab (in III.) zu bezw. aa_1, a_1a_2, a_2a_3 ... abträgt, so daß ab gleich der gerade gestreckten Profillinie $A''M''B''$ wird. Zieht man nun durch die Theilpunkte $a_1''a_2''a_3''$ ... die Verticalen bis zum Durchschnitte mit der Projection

$A' C'$ der Stirnfläche und durch die so erhaltenen Schnittpunkte $e_1' e_2' e_3' \ldots$ horizontale Gerade, so erhält man in bekannter Art in den Durchschnitten der letzteren mit den Verticalen durch $a_1 a_2 a_3 \ldots$ eine Anzahl von Punkten $a, e_1, e_2 \ldots c$, durch welche die Form der abgewickelten Stoßfugen gegeben ist. Man kann daher leicht mit dieser Linie parallel die einzelnen Stoßfugen E in der Abwickelung zeichnen, indem man den axialen Abstand dieser einzelnen Linien gleich der ebenfalls in der Axenrichtung gemessenen Dimension der einzelnen Bogenringe macht, aus denen das Gewölbe zusammengesetzt ist.

Nunmehr hat man die Lagerfugen so zu zeichnen, daß dieselben überall mit den abgewickelten Stoßfugen E sich rechtwinkelig kreuzen. Um dies zu thun, zeichne man zunächst in möglichst vielen Punkten der abgewickelten Stoßfuge $a e_1 e_2 e_3 \ldots c$ die Normalen $a n, e_1 n_1, e_2 n_2 \ldots c n$. Mit Hülfe dieser Richtungen ist es dann leicht, irgend eine Lagerfuge, z. B. die durch e_4 gehende F zu zeichnen. Halbirt man zu dem Zwecke nämlich die verticalen Streifen $a a_1, a_1 a_2, a_2 a_3 \ldots$ durch die punktirten Geraden $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$, zieht dann durch den Durchschnitt o_4 der Normale $e_4 n_4$ mit γ_4 eine Parallele zu $e_5 n_5$ bis zum Durchschnitte o_5 mit der Halbirungslinie γ_5, so erhält man in dem Durchschnitte dieser Parallelen mit der Verticalen $e_5 a_5$ einen Punkt f_5 der gesuchten Lagerfuge. Ebenso liefert die durch den Schnitt o_3 der Normalen $e_4 n_4$ und der Halbirungslinie γ_3 mit $e_3 n_3$ gezogene Parallele $o_3 o_2$ in dem Durchschnitte f_3 mit $e_3 a_3$ einen Punkt der Lagerfuge F auf der anderen Seite von E. In gleicher Art verfährt man weiter, indem man durch o_5 und o_2 Parallellinien mit $e_6 n_6$ und bezw. $e_2 n_2$ legt, um in $e_6 a_6$ den Punkt f_6 und in $e_2 a_2$ denjenigen f_2 für die Lagerfuge F zu erhalten. Die Richtigkeit der Construction folgt leicht aus der Bemerkung, daß eine durch $f_1 f_2 f_3 \ldots$ gelegte Curve in irgend einem Punkte, z. B. f_5 eine Tangente hat, welche parallel zu $e_5 n_5$, also senkrecht zu der durch f_5 gehenden Stoßfuge gerichtet ist.

Es ist ohne Weiteres klar, daß alle übrigen Lagerfugen mit der gezeichneten $f_1 f_2 f_3 \ldots$ übereinstimmen und für beliebige Punkte wie $e_1 e_2 e_3 \ldots$ gezeichnet werden können, auch ist eine Uebertragung der Lagerfugen in den Grundriß II leicht nach den bekannten Regeln der beschreibenden Geometrie ausführbar. Der abgewickelten Zeichnung in III kann man sich bedienen, um für die einzelnen Wölbsteine die richtige Form festzustellen. Man erkennt aus der Figur, daß die verschiedenen zwischen zwei Stoßfugen wie $E_1 E_2$ gelegenen Wölbsteine sämmtlich in ihrer Form von einander abweichen, während alle in gleicher Höhe liegenden Wölbsteine mit einander übereinstimmen.

Wie sich aus der Figur III ergiebt, bilden die in den einzelnen Punkten $e_1 e_2 e_3 \ldots$ auf der Stoßfuge E senkrechten Richtungen $e n$ mit den Hori-

zontalen eh durch diese Punkte verschieden große Winkel β. Während im Scheitel e_4 die Lagerfuge denselben Winkel $n_4 e_4 h_4 = \alpha$ mit der Horizontalen $e_4 h_4$ bildet, unter welchem die Stirnfläche $A' C'$ des Gewölbes gegen dessen senkrechten Querschnitt $A' B'$ gerichtet ist, so wird der Winkel der Lagerfugen gegen die horizontale Axenrichtung um so kleiner, je näher der Punkt e nach den Widerlagern a und c hin gelegen ist. Dieser Winkel fällt für die Kämpfer gleich Null, die Richtung der Lagerfugen also axial aus, wenn der zur Axe senkrechte Querschnitt $A'' B''$ des Gewölbes bei A'' und B'' verticale Tangenten hat, wenn also etwa dieser Querschnitt ein Halbkreis oder eine halbe Ellipse mit den Scheiteln in A'' und B'' ist. Bezeichnet man allgemein mit β den Winkel, um welchen die Lagerfuge in irgend einem Punkte in der abgewickelten Figur III von der Axenrichtung abweicht, also z. B. für den Punkt e_5 den Winkel $n_5 e_5 h_5$, so läßt sich dieser Winkel durch Rechnung wie folgt bestimmen. Offenbar ist dieser Winkel β für jeden Punkt der Stoßfuge $a e_1 e_2 \ldots c$ gleich dem Winkel, welchen die Tangente der letzteren mit der zur Axenrichtung Senkrechten ab bildet. Bezieht man nun die abgewickelte Stoßfuge auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Y-Axe die Gewölbaxe $e_4 h_4$ ist, und dessen Anfangspunkt e_4 sein soll, so läßt sich die Gleichung der Linie $a e_4 c$ bestimmen, sobald die Gestalt des normalen Gewölbquerschnittes $A'' M'' B''$ bekannt ist. Es möge der Einfachheit halber hier der in der Praxis sehr häufige Fall vorausgesetzt werden, daß $A'' M'' B''$ ein Kreisbogen vom Halbmesser r und dem halben Centriwinkel $M'' O B'' = \varepsilon$ sei, dann hat man nach der Construction in III für irgend einen Punkt wie e_5 der Stoßfuge

$$x = a_4 a_5 = arc\ a_4'' a_5'' = r\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unter ω den Bogenabstand des Punktes a_5'' von dem Scheitel M'' verstanden. Ferner hat man für denselben Punkt e_5 nach der Construction:

$$y = e_5 i = e_5' i_1' = r \sin\omega \tan\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Differentiation

$$\partial x = r \partial \omega$$

und

$$\partial y = r \tan\alpha \cos\omega \, \partial \omega,$$

und daher durch Division

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\alpha \cos\omega.$$

Da nun aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Tangente des Neigungswinkels der Curve in e_5 gegen die X-Axe ist, und dieser Neigungswinkel nach dem oben Gesagten gleich dem Winkel β sein muß, so hat man auch

$$\tan\beta = \tan\alpha \cos\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung kann dazu dienen, die Richtung der Curvennormale für jeden Punkt der abgewickelten Stoßfuge $a e_1 e_2 e_3 \ldots c$ zu berechnen, wenn die graphische Ermittelung aus der Zeichnung nicht genügende Schärfe ergeben sollte. Die Gleichung (3) zeigt übrigens entsprechend dem oben Angeführten, daß für den Scheitel, also für $\omega = 0$, $\beta = \alpha$ wird, während für die Kämpfer halbkreisförmig geformter Gewölbe oder für $\omega = 90^0$, $\beta = 0$ wird, d. h. die Lagerfugen laufen daselbst horizontal.

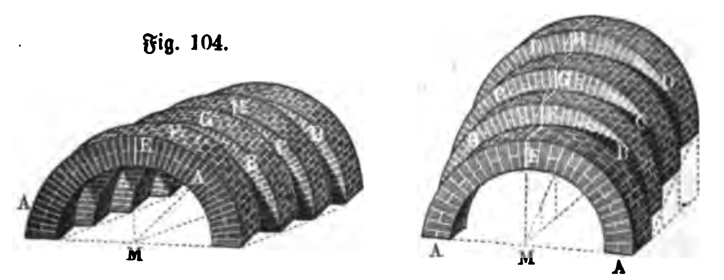
Wenn der normale Querschnitt $A''M''B''$ des Gewölbes nicht nach einem Kreisbogen, sondern nach dem Bogen einer Ellipse von der horizontalen Halbaxe a und der verticalen Halbaxe b gebildet wäre, so würde die Rechnung in ganz ähnlicher Weise wie oben zu der Gleichung führen

$$tang\,\beta = tang\,\alpha \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 tang^2\,\omega}} \quad \ldots \ldots \quad (3^a)$$

Wegen der praktischen Schwierigkeiten, welche die Bearbeitung der einzelnen Wölbsteine genau nach der hier ermittelten Form darbietet, pflegt man oft in der Ausführung sich mit einer Annäherung zu begnügen, derart nämlich, daß man die Lagerfugen nicht unter variabelen Neigungswinkeln, sondern sämmtlich unter einem constanten Neigungswinkel β_0 gegen die Axe annimmt. Für diesen Winkel β_0 pflegt man dann einen mittleren Werth zwischen der Abweichung $\beta = \alpha$ im Scheitel und der Abweichung in den Kämpfern zu wählen. Hierbei ist indessen darauf zu achten, daß die hiermit verbundene Abweichung der Stützkraft von der Normalen zur Lagerfläche in keinem Punkte einen mit der Stabilität gegen Gleiten unverträglich hohen Werth annehme. Nach Heider soll man diese Abweichung nicht größer als 5^0 nach jeder Seite annehmen, und erforderlichenfalls bei sehr großer Veränderlichkeit von β, d. h. bei einem großen Centriwinkel $2\,\varepsilon$ des Gewölbes,

Fig. 105.

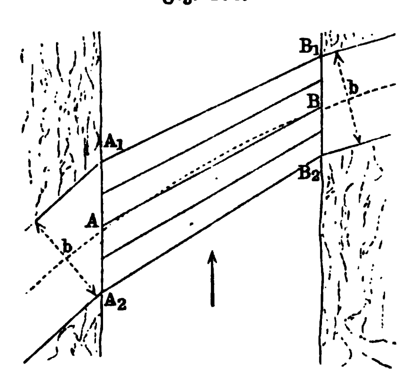
Fig. 104.



jede Gewölbehälfte zwischen dem Scheitel und einem Kämpfer in zwei oder mehrere Sectionen zerlegen, von denen jede einzelne mit ihrem besonderen mittleren Abweichungswinkel β für die in diesem Theile constante Fugenrichtung ausgeführt wird.

In Fällen, wo es nicht wesentlich darauf ankommt, daß die Wölbleibungen stetig fortlaufende Flächen seien, kann man schiefe Gewölbe auch aus einer größeren Anzahl von geraden Bögen zusammensetzen, welche derartig gegen einander horizontal, Fig. 104, oder vertical, Fig. 105, versetzt sind, daß die ganze Construction ein horizontales schräges (Fig. 104) oder ein ansteigendes (Fig. 105) Gewölbe ersetzt. Die Ausführung ist dann von derjenigen der gewöhnlichen geraden Gewölbe nicht verschieden. Wenn man ferner zuweilen ansteigende, z. B. die sogenannten Kellerhalsgewölbe oder die unter Treppen befindlichen, so ausführt, daß die einzelnen das Gewölbe zusammensetzenden Ringe senkrecht zur geneigten Axe, also nicht durch verticale Stoßfugenflächen begrenzt sind, so muß man, wie leicht ersichtlich ist, den unter solchen Umständen auftretenden Schub nach der Richtung der Axe durch kräftige Gurt- oder Stirnbögen aufnehmen.

Fig. 106.



Wenn, wie dies zuweilen bei Eisenbahnüberführungen wohl vorkommt, eine schiefe Brücke $A_1B_1B_2A_2$, Fig. 106, in einer Curve der Bahnlinie AB angeordnet werden muß, so werden die parallelen Widerlager A_1A_2 und B_1B_2 bei constanter Normalbreite b der Bahn verschiedene Länge erhalten, und daher die einzelnen Verticalebenen für die Stützlinien oder Stoßfugen A_1B_1, A_2B_2, AB ... nicht mehr parallel bleiben. Ein weiteres Eingehen auf diese und ähnliche Fälle würde hier zu weit führen und muß dieserhalb auf die Lehrbücher über Brückenbau und Bauconstructionslehre verwiesen werden.

Gewölbte Brücken. Die Gewölbe finden ihre vornehmste Anwendung zur Herstellung der Brücken, d. h. zur Ueberführung von Straßen, Eisenbahnen oder Canälen über Flüsse oder andere Straßen. Alle diese Brücken werden in der Regel aus Bögen von der Form der Tonnengewölbe gebildet. Die Spannweite der Bögen ist selbstverständlich je nach den Verhältnissen sehr verschieden. Während die sogenannten Durchlässe unter Eisenbahnen, ihrem Zwecke der Abführung von atmosphärischen Niederschlägen entsprechend, oft nur Spannweiten unter 1 m erhalten, richtet sich die Spannweite der Gewölbe bei den Unter- und Ueberführungen von §. 32.

Wegen beim Eisenbahnbau nach der Breite der zu überbrückenden Straße oder Eisenbahn. Bei den Brücken über Flüsse und Ströme sind außer der zu überbrückenden Länge besonders noch die dem Wasserlaufe eigenthümlichen Verhältnisse zu berücksichtigen. Hat das Wasser eine große Geschwindigkeit und ist es starken Anschwellungen unterworfen, so wendet man Bögen mit großer Spannweite an, um das Wasserbett möglichst wenig zu verengen und dadurch das Austreten des Hochwassers aus dem Bette einzuschränken, sowie die zerstörenden Wirkungen des Hochwassers und der von demselben zugeführten Körper, z. B. Eisschollen, auf die Brückenpfeiler zu schwächen. Fließt hingegen der Fluß langsam und hat derselbe keine bedeutenden Hochwasser, so kann man die Brücke über demselben aus einer größeren Anzahl engerer Bögen zusammensetzen. Die Spannweite der gewöhnlichen Brückenbögen beträgt 15 bis 50 m; am größten ist sie bei der Cabin-John-Brücke bei Washington, wo sie 69,5 m und bei der Grosvenor-Brücke über den Dee bei Chester, wo sie 61 m mißt. Die Brückenhöhe richtet sich ebenfalls nach dem Hochwasser; jedenfalls müssen selbst bei dem höchsten Wasserstande die Scheitel der Brückenbögen noch um eine ansehnliche Höhe über, und die Seiten derselben nicht oder nur wenig unter der Oberfläche des Wassers stehen, damit fremde Körper, welche auf dem Wasser schwimmen, wie z. B. Eisschollen, ungehindert durch die Brücke hindurch gelangen können, und auch die Stauung des Wassers nicht zu groß ausfällt. In vielen Fällen, namentlich bei Eisenbahnen und Canälen, liegen die Punkte, welche durch eine Brücke (Viaduct, Aquaduct) zu verbinden sind, so hoch über der Thalsohle, daß die Brückenbögen schon ohnedies viel über das Hochwasser zu stehen kommen. Die gewöhnlichen Fahrbrücken über Flüsse haben eine Höhe von 10 bis 30 m; die Eisenbahnbrücken und Aquaducte erreichen aber Höhen von 50 m und mehr. So hat z. B. die Gölzschthalbrücke bei der sächsisch-bayerischen Eisenbahn in vier über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 80,4 m, und der römische Aquaduct zu Nismes in Frankreich (Pont du Gard) hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 48,8 m. Die Bogenhöhe der Brücke richtet sich natürlich nach der Spannweite und Höhe der Brücke überhaupt; bei den gewöhnlichen Fahrbrücken beträgt diese Höhe $1/9$ bis $1/3$ der Spannweite; bei hohen Eisenbahnbrücken und Wasserleitungen nimmt man diese Höhe $1/2$ oder gar $5/8$ der Spannweite. Was die Breite der Brücken anlangt, so beträgt dieselbe bei gewöhnlichen Fahrbrücken 6 bis 12 m; die neue Brücke über die Elbe bei Dresden, welche für Fuhrwerke, Fußgänger und eine Eisenbahn zugleich dient, besitzt sogar eine Breite von nahezu 18 m.

Die Pfeiler und die Widerlager der Brücken müssen nicht nur auf einem ganz festen Grunde stehen, sondern auch eine hinreichende Dicke haben, um dem Drucke der darauf ruhenden Bögen sammt ihrer Belastung wider-

stehen zu können. Der Grund besteht entweder aus festem Felsen, oder aus unzusammendrückbarem Sand, oder aus zusammendrückbarer Erde. Um auf Felsen zu gründen, ist nicht allein die Herstellung ebener Flächen zur Aufnahme des Druckes, sondern auch die Entfernung alles verwitterten und losen Gesteines nöthig. Die Gründung auf Sand, Thon und Erde erfordert hingegen die Herstellung eines Rostes oder eines Bettes aus Beton. Der aus einer Reihe Längenschwellen und einer Reihe aufgekämmter Querschwellen zusammengesetzte Rost ruht entweder unmittelbar auf dem Stein- oder Sandbette, oder er wird von eingerammten Pfählen getragen, und heißt im ersten Falle ein Schwellen-, im letzteren aber ein Pfahlrost. Bei der Gründung im Wasser ist es nöthig, die Baustelle der Pfeiler durch einen Fangdamm vor dem Eindringen des Wassers zu sichern. Ist die Tiefe des Wassers über 1,2 m, so sind sogenannte Kastendämme nöthig, welche aus zwei Reihen Bohlen oder Spundwänden und zwischengestampftem Letten zusammengesetzt werden.

Die Fundamente der Pfeiler werden aus gehauenen Steinen treppenförmig aufgemauert, so daß die untere Breite derselben dem sechsten bis neunten Theile der Spannweite gleichkommt. Um die Brückenpfeiler gegen den Stoß des Eises und anderer schwimmenden Körper zu schützen, und um die auf das Flußbett nachtheilig wirkende wirbelnde Bewegung des Wassers möglichst zu verhindern, werden die Pfeiler stromauf- und stromabwärts mit prismatischen Ansätzen, den sogenannten Pfeilerköpfen versehen, welchen eine halbkreisförmige oder halbelliptische Basis und eine kegelförmige oder sphäroidische Haube zu geben ist. Die Landfesten oder Widerlagspfeiler sind in der Regel noch mit Flügelmauern versehen, welche zur Unterstützung der Auffahrt dienen. Die Stärke der Pfeiler und Widerlager ist nach der vorausgeschickten Theorie unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß diese Stützmauern nicht allein den constanten Gewölbschub, sondern auch die zufällige und bewegliche Belastung aufzunehmen haben.

Diese zufällige Belastung ist gegen das Eigengewicht der gewölbten Brücken bei einer nicht zu geringen Spannweite nur klein. Man kann dafür etwa folgende Angaben hier anführen. Nach Winkler kann man für dichte Ansammlung von Menschen 5 bis 6 Personen à 70 kg Gewicht, also 350 bis 420 kg auf jeden Quadratmeter Grundfläche rechnen. Ferner ist für Straßenbrücken das Gewicht der größten stark beladenen Frachtwagen von 2,5 m Breite und 3,5 m Axenabstand zu 12 Tonnen, also der Druck eines Rades zu 3 Tonnen anzunehmen, doch kann unter Umständen für sehr schwere Gegenstände (wie z. B. Dampfkessel, Maschinen 2c.) der Druck eines Rades auf 5 Tonnen steigen. Für Eisenbahnbrücken kann man den Druck eines Rades für

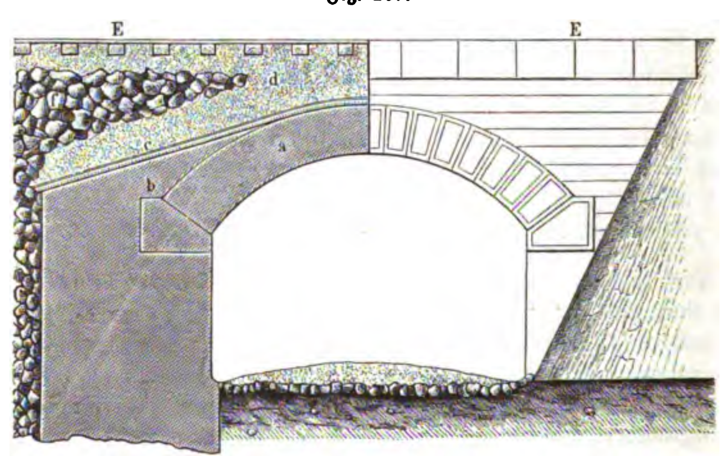
Locomotiven zu 6,5 Tonnen
Tender „ 4,5 „
Güterwagen „ 4 „

in Rechnung bringen, und als ungünstigste Belastung einen Zug von lauter Locomotiven voraussetzen.

Bei Canalbrücken besteht die ganze Belastung immer aus dem Eigengewichte der Construction und des in dem Canale befindlichen Wassers, und es kann an dieser gleichförmigen Vertheilung der Belastung nichts durch die Ueberführung eines Schiffsgefäßes geändert werden, da dasselbe überall ein seinem Gewichte genau gleiches Gewicht Wasser verdrängt. Eine Belastung durch Schnee wird bei gewölbten Brücken gegen die sonstigen Belastungen verschwinden. Die Erschütterungen und Stöße, denen eine Brücke durch passirendes Fuhrwerk ausgesetzt ist, lassen sich nicht gut durch Rechnung feststellen; bei den Ausführungen pflegt man diesen Erschütterungen dadurch Rechnung zu tragen, daß man die zulässige Pressung für das Material des Bauwerkes den jeweiligen Verhältnissen entsprechend geringer annimmt.

In Fig. 107 ist, zur Hälfte im Querschnitt, zur Hälfte in der Ansicht, eine Wegeunterführung von $5^2/_3$ m Spannweite dargestellt, wie sie bei der Bremer Bahn zur Ausführung gekommen ist. Das Kreisbogengewölbe *a* ist hier mit der Hintermauerung *b* versehen, welche mit einer Ziegel- und Asphalt-

Fig. 107.

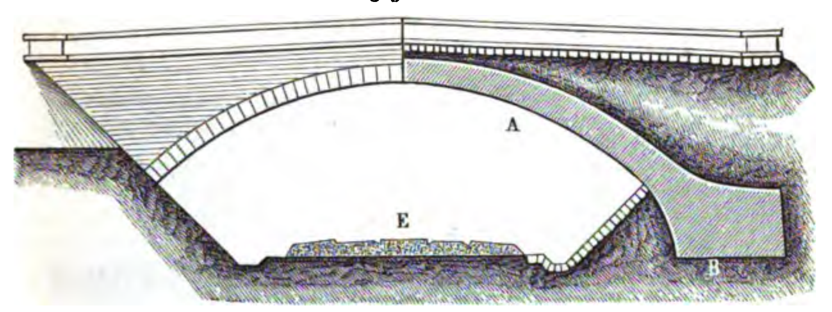


schicht *c* abgedeckt ist. Zum Schutze der letzteren dient zunächst die Kiesschicht *d*, auf welcher die Steinpackung *f* ruht. Die Breite der Brücke beträgt, der zweigeleisigen Eisenbahn *EE* entsprechend, 8,1 m.

Gleichfalls im Querschnitt und in der Ansicht zeigt Fig. 108 eine auf französischen Bahnen zur Ausführung gelangte Wegeüberführung über eine zwei-

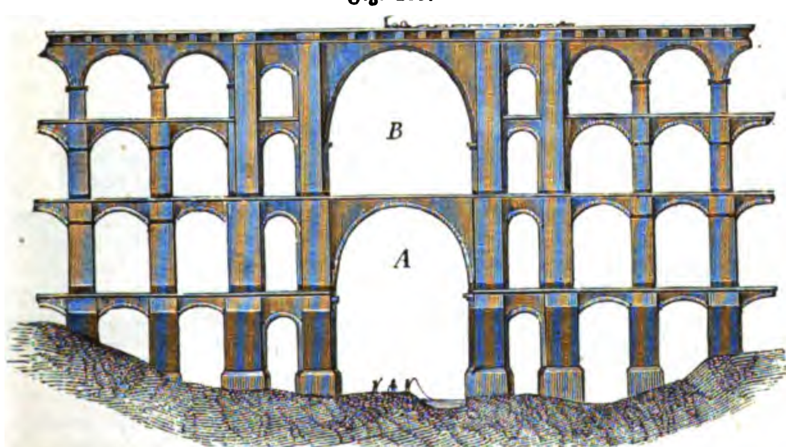
geleisige Eisenbahn E. Eine Eigenthümlichkeit hierbei besteht hauptsächlich in der Fortsetzung des Gewölbes A bis in das Fundament B, welches das Widerlager bildet. Eine besondere Hintermauerung hat das nach den Kämpfern hin verstärkte Gewölbe nicht erhalten.

Fig. 108.



In Fig. 109 ist das Mittelstück der Gölzschthalbrücke abgebildet. Die Länge dieser Brücke beträgt 574 m, die obere Breite 10 m und die untere 22,6 m, die Höhe von der Bachsohle bis zur Schienenoberkante 77,6 m. Von den mittleren großen Bögen hat A eine Spannweite von 28,6 m und eine Höhe von 16,2 m, B aber eine Spannweite von 30,8 m und eine Höhe von 19,8 m.

Fig. 109.



Nimmt man die Höhe eines Ziegelpfeilers $h = 75$ m und das Gewicht eines Cubikmeters Ziegelmauerwerk gleich 1800 kg an, so erhält man den größten Druck dieses Pfeilers pro Quadratcentimeter, abgesehen von der zufälligen Belastung und von der Belastung durch die Gewölbbögen,

$$p = 75 \,.\, 0{,}18 = 13{,}5 \text{ kg}.$$

Wäre der Festigkeitsmodul der Ziegel gleich 170 kg anzunehmen, so hätte man für die Pfeiler einen Sicherheitscoefficienten von

$$\frac{170}{13,5} = 12,6.$$

Als ein Beispiel für eine Strombrücke sei in Fig. 110 ein Theil der berühmten von Perronet erbauten Seinebrücke bei Neuilly dargestellt. Dieselbe besteht aus fünf Bögen von 39 m Weite und 13 m Höhe. Die Curve, wonach die Bögen construirt sind, ist eine Korblinie aus 11 Mittelpunkten. Die Schlußsteine der

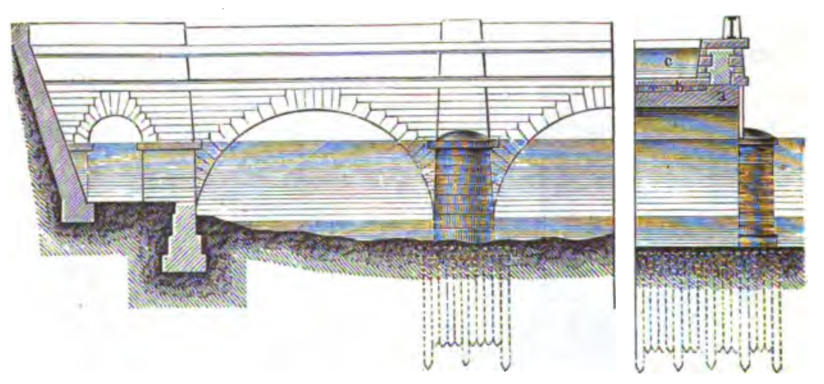
Fig. 110.



Bögen haben hier eine Stärke von 1,62 m erhalten. Die Pfeilerköpfe (*A* und *B*) sind halbkreisförmig abgerundet, und die Kanten zwischen den Stirn- und den inneren Wölbflächen der Bögen sind durch krumme Flächen *C*, *D*, *E*, sogenannte Kuhhörner abgestumpft.

In Fig. 111 ist endlich noch die Canalbrücke, welche den Rhein-Marne-Canal über die Mosel bei Liverdun*) führt, zum Theil in der Ansicht, zum

Fig. 111.



Theil im Querschnitte gezeichnet. Die Länge der Brücke zwischen den Widerlagern beträgt 157,7 m. Von den vorhandenen 12 halbkreisförmig überwölbten Oeffnungen haben die 10 mittleren je 13 m und die beiden äußeren je 3 m. Das aus Quadern 1 m stark ausgeführte Gewölbe *a* trägt auf einer mit Asphalt überzogenen Betonschicht *b* das Canalbett *c* von 2 m Tiefe, 6,5 m oberer und 6 m unterer lichter Weite.

*) S. Heinzerling, Brücken der Gegenw. Abth. II, Heft 2, Thl. 5.

Anmerkung. Ueber die Gewölbe ist die Literatur sehr ausgedehnt, jedoch sind die in verschiedenen Schriften abgehandelten Theorien nicht immer richtig, oder wenigstens nicht immer praktisch genug, weil ihnen nicht die der Praxis entsprechenden Voraussetzungen zu Grunde gelegt sind. Es mögen daher hier nur die vorzüglichsten Schriften angeführt werden. Coulomb legte zuerst den Grund zur Theorie, wie sie im Wesentlichen hier vorgetragen wurde. Man sehe: Théorie de machines simples, par Coulomb. Die Theorie weiter ausgebildet findet man in Navier: Résumé des Leçons sur l'application de la mécanique, T. I. Eine deutsche Bearbeitung ist hiervon erschienen, unter dem Titel: Die Mechanik der Baukunst, von Westphal. Ebenso: Cours de Stabilité des Constructions etc. par Persy. Abhandlungen von Audoy, Garidel, Poncelet und Petit finden sich im Mémorial de l'officier du génie. Die Petit'sche Abhandlung ist deutsch bearbeitet und unter dem Titel „Theorie der Kreisgewölbe" besonders im Buchhandel sowie in Crelle's Journal der Baukunst erschienen, von W. Lahmeyer. Tabellen zur Berechnung des Gewölbschubes giebt die Schrift: Tables des poussées des voûtes en plein ceintre, par Garidel, Paris 1837 u. 1842. Uebrigens findet man die Gewölbe abgehandelt in den Werken über Mechanik von Bossut, Prony, Robinson (Mechanical Philosophy), Whewell, Moseley, Eytelwein, Gerstner u. s. w. Besondere Abhandlungen über Gewölbe sind von Maillard (Mechanik der Gewölbe, Pesth 1817), von Knochenhauer (Statik der Gewölbe, Berlin 1842), Hagen (über Form und Stärke gewölbter Bogen, Berlin 1844), u. s. w. erschienen. Hieran schließt sich die Schrift Ligowski's: „Die Bestimmung der Form und Stärke gewölbter Bögen mit Hülfe der hyperbol. Functionen, aus der Zeitschrift für Bauwesen, 1854". Ferner über schiefe Gewölbe: Heider, Theorie der schiefen Gewölbe, Wien 1846. Hart, Construction schiefer Gewölbe, in Romberg's Zeitschrift 1847. Sowie Francis Bashforth, Praktische Anweisung zur Construction schiefer Gewölbe, deutsch von Härtel. Ueber steinerne Brücken ist noch zu lesen: Gauthey, Traité de la construction des ponts, und Perronet's Werke, die Beschreibung der Entwürfe und der Bauarten der Brücken bei Neuilly, Mantes u. s. w., aus dem Französischen von Dietlein, Halle 1820. Von neueren Werken sind zu empfehlen: Scheffler, „Zur Theorie der Gewölbe", in Crelle's Journal für die Baukunst, Band 29 und 30, sowie dessen mehrerwähntes Werk: Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken, Braunschweig 1857, I. Tellkampf, „Beiträge zur Gewölbtheorie, frei bearbeitet nach Carvallo, Hannover 1855". Yvon Villarceau, „Sur l'établissement des Arches de Pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité. Paris 1853". Siehe auch „Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes, par Poncelet, Paris 1852". Ferner ist zum Studium zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie dessen Manual of Civil-Engineering. Holzhey, Vorträge über Baumechanik. Heinzerling, Die Brücken der Gegenwart, 2. Abth. Der Arbeiten von Schwedler und des Werkes von Föppl ist bereits im Texte gedacht worden.

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen.

---

§. 33. **Holz- und Eisenconstructionen.** Von den in den vorhergehenden Capiteln besprochenen Bauconstructionen aus Stein unterscheiden sich diejenigen aus Holz und Eisen zunächst wesentlich dadurch, daß diese Materialien ebensowohl Zugkräften wie Druckkräften zu widerstehen vermögen, während bei den Steinconstructionen auf die absolute Festigkeit des Mörtels nicht gerechnet werden kann. Dieser Beanspruchung durch Zugkräfte gemäß sind die einzelnen Bestandtheile der hier zu betrachtenden Bauwerke unter sich in solcher Weise durch Zapfen, Bolzen, Rieten ꝛc. zu vereinigen, daß die Verbindungen ebenfalls Zugspannungen auszuüben vermögen. Die bei weitem häufigste Verwendung finden die Holz- und Eisenconstructionen bei der Ueberdeckung von Räumen oder Oeffnungen, namentlich bei der Ausführung von Decken und Dächern in Gebäuden und bei der Herstellung von Brücken. Diesen Zwecken sowie der Eigenthümlichkeit des Materials entsprechend haben die Hauptbestandtheile der Holz- und Eisenconstructionen meistens die Gestalt stabförmiger oder prismatischer Stücke von größerer Länge, als man sie den Werkstücken aus Stein geben kann. Was ferner die Querschnitte dieser einzelnen Theile anbetrifft, so ist man bei der Verwendung von Holz nicht nur durch die Stärke der zu benutzenden Baumstämme innerhalb gewisser Grenzen beschränkt, sondern auch fast ausschließlich auf die kreisförmige und rechteckige Querschnittsgestalt angewiesen. Bei der Verwendung von Eisen dagegen kann man leicht gerippte oder sonst geeignete Querschnitte von solcher Form zur Anwendung bringen, daß das Material in möglichst vortheilhafter Weise zur Wirkung kommt. Die Anwendung solcher gerippter Querschnitte empfiehlt sich für hölzerne Constructionstheile aus dem einfachen Grunde nicht, weil dieselben

nur durch Ausarbeitung aus vollen Holzstücken herzustellen wären, womit eine beträchtliche Materialvergeudung verbunden sein würde. Die Haupttheile einer Construction haben entweder eine horizontale Lage wie die Schwellen, Balken, Träger rc., oder sie stehen vertical wie die Pfosten, Stiele und Säulen, oder sie haben, wie die Sparren, eine gegen den Horizont geneigte Stellung, in welchem Falle sie Streben oder Bänder heißen, je nachdem sie einer Zusammendrückung oder einer Ausdehnung zu widerstehen haben. Auch bei den verticalen Stielen oder Säulen, welche zur Unterstützung horizontaler Balken dienen, macht man den Unterschied zwischen Standsäulen, die den Balken von unten stützen, und Hängesäulen, d. h. solchen, welche den unterhalb angehängten Balken zu tragen haben, die also auf Zug beansprucht werden, während die Standsäulen durch die Last der auf ihnen ruhenden Balken zusammengedrückt werden.

Um die Stabilität einer Construction zu untersuchen, handelt es sich zunächst um die Ermittelung der äußeren Kräfte, welche darauf wirken. Diese Kräfte bestehen der Hauptsache nach immer aus den Gewichten der Constructionstheile selbst und der von ihnen zu tragenden Lasten; in einzelnen Fällen kommen auch noch besondere horizontale Kräfte in Betracht, z. B. bei Dächern und Brücken der Druck des Windes. Das Eigengewicht der einzelnen Constructionstheile ist in jedem Falle aus den Dimensionen und specifischen Gewichten der betreffenden Theile zu bestimmen, während man die außerdem zu tragenden, sogenannten zufälligen Belastungen nach bestimmten Erfahrungsregeln anzunehmen hat, welche weiter unten für die meist vorkommenden Fälle angegeben sind. Während das Eigengewicht der Construction eine stets vorhandene constante Belastung darstellt, ist die zufällige Belastung, z. B. die eines Speichers durch Waaren, einer Brücke durch einen Eisenbahnzug u. s. w. eine veränderliche, welche bald in größerem bald in geringerem Betrage auftritt. Wenn es nun auch selbstredend erforderlich ist, daß das Bauwerk für denjenigen Fall die genügende Stabilität besitze, für welchen die zufällige Last in ihrem größten Betrage vorhanden ist, so findet doch in vielen Fällen die ungünstigste Beanspruchung einzelner Theile bei einer nur theilweisen Belastung statt, und es muß daher immer durch eine besondere Untersuchung der für jeden Theil ungünstigste Belastungszustand ermittelt werden.

Es ist ebenfalls selbstverständlich, daß ebensowohl die Haupttheile, wie auch sämmtliche Verbindungen den auf sie einwirkenden Kräften vermöge ihrer Elasticitätswirkungen hinreichenden Widerstand entgegensetzen müssen. Damit dies möglich sei, hat man die Materialstärken oder Querdimensionen der einzelnen Bestandtheile den in Thl. I, Abschn. IV entwickelten Regeln der Festigkeitslehre gemäß zu bestimmen. Hierbei kommt es darauf an, diese

Dimensionen so klein als möglich zu wählen, da mit übermäßig großen Stärken nicht nur eine nutzlose Vergeudung des Materials sondern auch eine schädliche Belastung durch die Eigengewichte verbunden ist. Zur Erzielung der möglichsten Ersparniß an Material ist es erforderlich, daß dasselbe bei der ungünstigsten Beanspruchung durch die äußeren Kräfte in allen seinen Theilen mit der höchsten zulässigen Spannung reagire, was nur dann erreichbar ist, wenn, wie bei gezogenen oder gedrückten Stäben, die Spannungen sich gleichmäßig über die ganze Querschnittsfläche vertheilen. Dagegen ist dieser ideale Zustand bei der Biegung der Körper niemals zu erreichen, da die einzelnen Elemente eines auf relative Elasticität beanspruchten Körpers bekanntlich Spannungen ausgesetzt sind, deren absolute Größen mit den Abständen von der neutralen Axe des Querschnitts proportional sind. Wenn daher, wie dies von jeder soliden Construction gefordert werden muß, die von der neutralen Axe entferntesten Fibern höchstens mit der für das Material zulässigen Spannung beansprucht werden, so sind alle der Axe näher liegenden Elemente mit geringeren Spannungen wirksam, als sie es zu sein vermöchten, ja die in der neutralen Axe selbst liegenden Elemente tragen gar nichts zum Widerstande bei. Es geht hieraus hervor, daß bei den auf Biegung beanspruchten Constructionstheilen die Wirksamkeit des Materials niemals so vollkommen ausgenutzt werden kann, wie bei den auf Zug oder Druck beanspruchten, und zwar wird die Ausnutzung um so unvollkommener sein, je mehr das Material in der Nähe der neutralen Faserschicht angehäuft ist. Daraus folgt, daß z. B. bei den hölzernen Balken, deren Querschnitt fast immer ein rechteckiger ist, von vornherein nur eine viel weniger vortheilhafte Verwendung des Materials stattfinden kann, als bei eisernen Trägern, bei denen man, etwa durch I förmige Querschnitte, dafür sorgen kann, daß die Hauptmasse des Materials in thunlichst großem Abstande von der neutralen Axe sich befindet. Wenn man nun auch, vermöge geeigneter Querschnittsformen, sich dem idealen Zustande einer gleichmäßigen Anstrengung aller Fasern nähern kann, so ist doch leicht zu erkennen, daß man diesen Zustand selbst bei gebogenen Körpern niemals in so vollkommener Weise wird erreichen können, wie dies bei den einfach gedrückten oder gezogenen der Fall ist. Es ergiebt sich daher aus dieser Betrachtung ohne Weiteres das bei allen neueren Ausführungen zur Geltung kommende Princip, wonach die Constructionen so anzuordnen sind, daß die einzelnen Theile möglichst nur durch Zug- oder durch Druckkräfte in Anspruch genommen werden, und daß die einer Biegung ausgesetzten Theile auf das unumgänglich nöthige Maß eingeschränkt werden. Den sogenannten Fachwerkssystemen, nach welchen in neuerer Zeit alle größeren Brücken- und Dachconstructionen ausgeführt werden, liegt durchweg dieses Princip zu Grunde.

Bei den folgenden Untersuchungen der Holz- und Eisenconstructionen können die in Thl. I, Abschn. IV entwickelten Gesetze und Regeln der Elasticitätslehre als bekannt vorausgesetzt werden, und es sollen nur diejenigen Verhältnisse einer besonderen Untersuchung unterworfen werden, welche speciell bei den einschlägigen Constructionen in Frage kommen. Bevor die Stabilitätsverhältnisse selbst untersucht werden, möge eine kurze Zusammenstellung der Belastungen angeführt werden, welche erfahrungsmäßig bei den zu betrachtenden Bauwerken in Rechnung zu stellen sind.

Belastungen. Wie schon bemerkt worden, besteht die Belastung der Bauconstructionen aus ihrem Eigengewichte oder der permanenten und aus der zufälligen Last, welche letztere bei Brücken auch wohl Verkehrslast heißt. Wenn auch das Eigengewicht bei einer vorliegenden Construction immer leicht aus dem Volumen und dem specifischen Gewichte der Bestandtheile ermittelt werden kann, so ist es doch für den Entwurf eines Bauwerkes, dessen Dimensionen erst zu bestimmen sind, bequem, zuvörderst gewisse erfahrungsmäßig ermittelte Durchschnittswerthe für das Gewicht der Construction der Rechnung zu Grunde zu legen, durch welche die Dimensionen der einzelnen Theile festgesetzt werden. Ist letzteres geschehen, so kann das Eigengewicht aus den gefundenen Dimensionen genauer berechnet und, wenn es sich als nöthig herausstellen sollte, auf Grund dieser genauer bestimmten Eigenlast eine Correction der Dimensionen vorgenommen werden. Die Angaben über die Belastung, sowohl durch das Eigengewicht wie auch durch die zufällige oder Nutzlast, werden in der Regel auf eine Quadrateinheit (Quadratmeter) der horizontalen Grundfläche bezogen, welche überdeckt ist. Für Dächer pflegt man die Belastung durch das Eigengewicht, Schnee- und Winddruck auch häufig auf die Quadrateinheit der geneigten Dachfläche zu bestimmen, während man für Brücken von bestimmter Breite, z. B. pro Geleis, auch wohl die Belastung für den laufenden Meter angiebt. Wenn Mauern auf einzelnen Constructionstheilen ruhen, so ist die dadurch hervorgerufene Belastung bei einer gegebenen Mauerstärke mit der Größe der verticalen Ansichtsfläche der Mauer, also pro laufenden Meter mit der Höhe der Mauer proportional. Die in solcher Weise im Folgenden angegebenen Werthe gelten für ruhende Lasten, und man kann den etwa stattfindenden Erschütterungen, wie sie z. B. bei Brücken durch die Bewegung der Wagen und in Fabriken durch den Betrieb von Maschinen auftreten, dadurch Rechnung tragen, daß man in jedem solchen Falle entweder eine entsprechend größere Belastung, oder eine geringere zulässige Anstrengung des Materials voraussetzt, da der Einfluß solcher Erschütterungen sich wohl nur in den seltensten Fällen durch die Rechnung feststellen läßt.

§. 34.

Die folgenden Tabellen über die Belastung von Zwischendecken und

Belastungen pro 1 qm Fläche in Kilogrammen für Zwischendecken.

a) in Wohngebäuden oder in Fabriken mit leichten Maschinen (Spinnereien ꝛc.)

Art der Construction	Eigen-last	Nutz-last	Total-last
Gewölbte Decke, 1/4 Stein stark, zwischen eisernen Trägern für 1 bis 1,5 m Spannweite, incl. Putz und Fußboden	300	200	500
Gewölbte Decke wie oben, 1/2 Stein stark	400	200	600
Gewölbte Decke wie oben, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite	500	200	700
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 13 cm dicker Betonschicht zwischen Trägern	250	200	450
Holzbalkendecke mit einfachem Fußboden	80	200	280
Holzbalkendecke mit doppeltem Fußboden oder mit einfachem Fußboden und Deckenputz	100	200	300
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, Fußboden und Deckenputz	300	200	500
Holzbalkendecke mit ganzem Windelboden, Fußboden und Deckenputz	400	200	600
b) in Fabriken mit schweren Maschinen, in Speichern und Tanzlocalen			
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, für Tanzlocale, Heu- und Fruchtböden	350	350	700
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Salzspeichern	200	600	800
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Kaufmannsspeichern	250	750	1000
Gewölbte Decke, 1/2 Stein stark, zwischen eisernen Trägern, 1 bis 1,5 m Spannweite, in Fabriken oder Lagerräumen	450	500	950
Gewölbte Decke, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite, sonst wie vor	650	500	1150
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 20 cm dicker Betonschicht, sonst wie vor	350	500	850

Das Gewicht von Mauern beträgt pro 1 qm Ansichtsfläche und 1 Stein (0,25 m) Stärke für Mauern aus:

Ziegelsteinen	Porösen oder Hohlziegeln	Kalkstein oder Granit	Sandstein
220 kg	135 kg	330—350 kg	280—300 kg

Belastungen incl. Schnee und Winddruck für 1 qm Grundrißfläche in Kilogrammen für Dächer.

Art der Construction	Neigungsverhältniß $\frac{h}{2w}$						
	$\frac{1}{48}$ — $\frac{1}{32}$	$\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$ — $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Einfaches Ziegeldach	—	—	—	—	220	230	260
Doppel- und Kronziegeldach	—	—	—	—	240	260	290
Gewöhnliches Schieferdach .	—	—	—	180	190	210	240
Dorn'sches Dach	—	175	175	180	190	210	240
Asphaltdach mit Lehmunterlage (mit Fliesenunterlage 10 Proc. mehr)	—	175	175	180	190	210	240
Stroh- und Rohrdach . . .	—	—	—	—	—	200	230
Dach aus Zink- oder Eisenblech	—	135	140	150	160	170	200
Theerpappdach	—	135	140	150	160	170	200
Holzcementdach auf Holzbalkenlage	350	—	—	—	—	—	—
Holzcementdach auf leichten Kappen oder Wellblech ꝛc. zwischen eisernen Trägern	450	—	—	—	—	—	—

Dächern sind einem Werke von O. Intze*) entnommen und bedürfen keiner näheren Erläuterung.

Hinsichtlich des Schneedruckes kann bemerkt werden, daß die größte Höhe der Schneeschicht in Deutschland zu etwa 0,6 m angenommen werden kann, so daß man, unter Annahme einer Dichte des Schnees von $1/8 = 0{,}125$ von der des Wassers, den Schneedruck für jeden Quadratmeter der Horizontalprojection einer Fläche zu $0{,}125 \,.\, 0{,}6 \,.\, 1000 = 75$ kg veranschlagen kann.

Die Belastung der Dachflächen durch den Winddruck läßt sich nach den in Thl. I, Abschn. VII über den Stoß der Flüssigkeiten angegebenen Regeln bestimmen. Danach wird der Druck W, den eine mit der Geschwindigkeit c bewegte Flüssigkeit von der Dichte γ normal zu einer Fläche f ausübt,

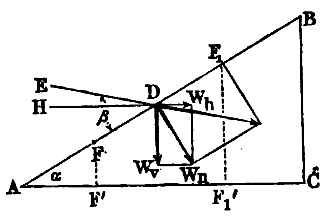
*) Tabellen und Beispiele für die rationelle Verwendung des Eisens von O. Intze, 1878; s. auch Müller, Festigkeitslehre.

welche unter dem Winkel β gegen die Richtung des Luftstroms geneigt ist, ausgedrückt durch

$$W = Q\gamma \frac{c}{g} \sin\beta = f\gamma \frac{c^2}{g} \sin^2\beta,$$

worin $Q = fc \sin\beta$ das in jeder Secunde gegen die Fläche f treffende Luftvolumen ist. Der herrschende Wind hat nun meistens gegen den Horizont eine Neigung von $EDH = 10^0$, Fig. 112, und daher bestimmt sich der Neigungswinkel β, unter welchem die unter α geneigte Dachfläche BAC getroffen wird, zu

Fig. 112.



$$\beta = EDA = \alpha + 10^0.$$

Mit diesem Werthe erhält man daher den auf eine beliebig große Fläche $FF_1 = f$ normalen Winddruck zu

$$W_n = f\gamma \frac{c^2}{g} \sin^2(\alpha + 10^0),$$

also folgt für die Flächeneinheit (1 qm) der specifische Winddruck senkrecht zur Dachfläche zu

$$w_n = \frac{W_n}{f} = \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2(\alpha + 10^0).$$

Ebenso groß ist auch der verticale Druck für jede Flächeneinheit der Horizontalprojection, sowie auch der horizontale specifische Druck für die Verticalprojection, denn eine Zerlegung des normal zur Fläche FF_1 wirkenden Winddrucks W_n giebt die verticale Componente

$$W_v = W_n \cos\alpha,$$

und da dieselbe auf eine Fläche $F'F_1' = f\cos\alpha$ sich vertheilt, so wird der lothrechte Winddruck für jede Einheit der horizontalen Projection ebenfalls durch

$$w_v = \frac{W\cos\alpha}{f\cos\alpha} = \frac{W}{f} = \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2(\alpha + 10^0) = w_n$$

ausgedrückt. Dasselbe gilt für den Druck des Windes gegen die Verticalprojection BC der Dachfläche.

Setzt man zur Bestimmung des Winddruckes das specifische Gewicht der Luft $\gamma = 1{,}25$ kg und die größte vorkommende Geschwindigkeit des Windes $c = 25$ m, so erhält man den normalen Windstoß pro 1 qm Fläche zu

$$w = 1{,}25 \frac{25^2}{9{,}81} \sin^2(\alpha + 10^0) = 80 \sin^2(\alpha + 10^0).$$

Man würde z. B. für ein Dach, dessen Höhe gleich der halben Weite ist, also mit $\alpha = 45^0$, den Winddruck zu

$$w = 80 . \sin^2 (45^0 + 10^0) = 53{,}6 \text{ kg};$$

dagegen für eine Neigung von $^1/_3$, oder $\alpha = 18^0\, 30'$ einen Werth

$$w = 80 . \sin^2 (28^0\, 30') = 18{,}2 \text{ kg}$$

erhalten.

Nun wird zwar der hier vorausgesetzte ungünstigste Winddruck immer nur auf die eine, der Windrichtung zugekehrte Dachfläche wirken, während die dem Winde abgewendete gar nicht oder doch viel weniger gedrückt wird, indessen pflegt man der Sicherheit wegen bei der Construction in der Regel anzunehmen, daß die ganze Dachfläche einem gleichmäßig vertheilten verticalen Winddrucke ausgesetzt sei, und zwar soll man nach Brandt für jeden Quadratmeter der Horizontalfläche eine durch Schnee und Wind erzeugte Verticalbelastung zwischen 100 und 125 kg annehmen, eine Angabe, welche mit den oben gefundenen Werthen ($75 + 53{,}6 = 128{,}6$ und $75 + 18{,}2 = 93{,}2$) annähernd übereinstimmt.

Dem horizontalen Winddrucke, welcher eine Verschiebung bezw. ein Umkippen des Daches anstrebt, wird man durch entsprechende Befestigung des Daches, sowie durch einen geeigneten Quer- und Längsverband begegnen müssen. Die oben für den Winddruck angegebenen Formeln gelten auch für die verticalen Flächen von Mauern, Brückenträgern 2c., wenn man $\alpha = 90^0$ darin einführt.

Die Belastung der Brücken durch ihr Eigengewicht setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Fahrbahn mit Einschluß der dieselbe unterstützenden Querträger, Schwellen 2c., und dem Gewichte der Hauptträger. Das Gewicht der Fahrbahn für Straßenbrücken kann man pro 1 qm zu

250 kg bei einer Schotterschicht von 0,1 bis 0,15 m Dicke,
360 kg für Steinpflaster von 0,15 m Dicke,
100 kg für die zugehörige Sandunterlage von 0,06 m Dicke

annehmen *).

In Betreff der eisernen Straßenbrücken von der Spannweite l und einer Breite der Fahrbahn von 7,5 m incl. der beiden je 1 m breiten Banketts, kann man pro 1 qm Grundrißfläche für vorläufige Ueberschlagsrechnungen das Eigengewicht zu

$$p = (42\, l + 3600) \text{ kg}$$

bei Anwendung einer 0,2 m dicken Beschotterung, und zu

$$p = (28\, l + 1300) \text{ kg}$$

*) Siehe E. Holzhey, Vorträge über Baumechanik.

bei doppelter eichener Bedielung annehmen. Nach Winkler berechnet sich ferner für eiserne Straßenbrücken, deren Spannweite l und Breite b Meter beträgt, für jeden laufenden Meter der Länge l das gesammte Brückengewicht, einschließlich der Hauptträger, zu

$$p = \frac{120 + 300\, b + 3{,}3\, b\, l}{1 - 0{,}0038\, l} \text{ kg.}$$

Für Eisenbahnbrücken (eingeleisige) beträgt nach Schwedler das totale Gewicht für den laufenden Meter der Spannweite l in Kilogrammen

$$p = 30\, l + 800$$

für Brücken schwerster Construction von 10 bis 100 m Spannweite. Das Gewicht der Fahrbahn kann durchschnittlich zu 750 kg pro laufenden Meter veranschlagt werden.

Für das Gewicht der Hauptträger hölzerner Brücken giebt Winkler die folgende Tabelle an:

Gewicht (kg) der Hauptträger hölzerner Brücken von l Meter Spannweite.

Unterstützung durch:	Straßenbrücken	Eisenbahnbrücken (ein Geleise)	
	pro 1 qm Fahrbahn	a) provisorische pro laufenden Meter	b) definitive pro laufenden Meter
Einfache Balken	$11\, l$	$67\, l$	$84\, l$
Einfache durch Sattelhölzer verstärkte Balken	$10\, l$	$62\, l$	$79\, l$
Verdübelte Balken	$10\, l$	$55\, l$	$70\, l$
Gitterbalken	$8{,}3\, l$	$45\, l$	$51\, l$

Wie schon oben bemerkt, können die vorstehend angeführten Zahlen nur als ungefähre Ueberschlagswerthe bei der Projectirung gelten, und man hat in jedem Falle nachträglich das genaue Eigengewicht der Construction aus den für die Bestandtheile festgesetzten Dimensionen zu ermitteln.

Für die zufällige oder Verkehrsbelastung der Brücken sind nach dem Deutschen Bauhandbuche die folgenden Angaben zu Grunde zu legen:

Zufällige Belastung von Straßenbrücken, Fußsteigen und Aquäducten.

Art der Brücken	Art der Belastung	Belastung in Kilogrammen pro 1 qm Fahrbahn	kg
Straßen- und Pferdeeisenbahn brücken	Menschen-gedränge	1) Annahme in Amerika	150
		2) Annahme in Frankreich	200
		3) Annahme in Deutschland	280
		4) Genügende Annahme	400
Fußsteige und Ziehwege	Menschen, Thiere und Fuhrwerke	1) Stege für öffentlichen Verkehr . .	400
		2) Stege für Privatverkehr	200
		3) Ziehwege in Städten	400
		4) Ziehwege für leichtes Fuhrwerk .	150
Aquäducte und Canalbrücken	Wasser und Schiffe	Für jeden Meter Wasserstandshöhe beim Passiren der Schiffe	1000

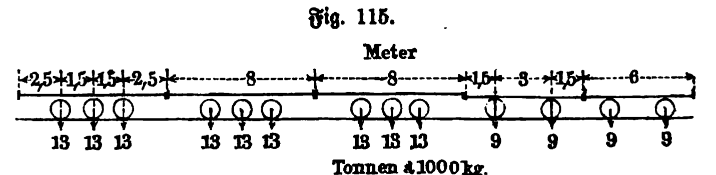
In Betreff der Größe und Vertheilung der Belastung von Straßenbrücken durch Fuhrwerke und Zugthiere können die folgenden Skizzen einen Anhalt geben:

Gewichte und Gewichtsvertheilung für Fuhrwerke in Kilogrammen und Metern.

1) Schwerstes Fuhrwerk . . .	18 000	Fig. 113.
Bespannung 6 Pferde . . .	1 800	
2) Schweres Landfuhrwerk . .	10 000	Fig. 114.
Bespannung 4 Pferde . . .	1 200	

Für Eisenbahnbrücken pflegt man als die der Rechnung zu Grunde zu legende Belastung einen Zug aus mehreren der schwersten, die Bahn befahrenden Locomotiven vorauszusetzen, in welcher Hinsicht beispielsweise Mohr einen durch Fig. 115 dargestellten Eisenbahnzug von drei hinter

Fig. 115.



einander stehenden dreiaxigen Tenderlocomotiven von je 39 Tonnen mit darauf folgenden zweiaxigen Güterwagen von je 18 Tonnen annimmt. Um die Rechnung hierbei zu erleichtern, ist es gebräuchlich, statt der durch einen solchen Zug in einzelnen Punkten ausgeübten concentrirten Lasten eine über die ganze Brücke gleichmäßig vertheilte Belastung einzuführen. Man hat diese Belastung so zu bemessen, daß durch dieselbe eine ebenso große Anstrengung der Constructionstheile hervorgerufen wird, wie dies durch die Reihe concentrirter Lasten geschieht, wenn die letzteren in derjenigen Stellung sich befinden, in welcher sie die größte Anstrengung in den Constructionsgliedern hervorrufen. Dieser ungünstigste Belastungszustand ist nun aber verschieden für die verschiedenen Constructionsglieder des Trägers. Während nämlich die äußeren, den Träger oben und unten einfassenden Längsbänder oder Gurtungen (s. unten) in irgend welchem Querschnitte proportional mit der Größe des biegenden Momentes M der äußeren Kräfte angestrengt werden, stehen die Spannungen der zwischen den Gurtungen befindlichen Füllungsglieder im directen Verhältnisse mit der verticalen Scheerkraft V des betreffenden Querschnittes. Um daher diejenige gleichförmige Belastung des Trägers zu finden, welche die wirkliche, in einzelnen Punkten concentrirte Belastung durch den Eisenbahnzug ersetzen kann, hat man die Untersuchung ebensowohl für die Gurtungen wie für die Füllungsglieder gesondert vorzunehmen. Zu dem Behufe denkt man sich den betreffenden Lastenzug über die Brücke bewegt und diejenige Stellung bestimmt, für welche das Biegungsmoment M_{max} an der ungünstigsten Stelle den größten Werth annimmt, und ermittelt diejenige gleichförmige Belastung k_g pro Längeneinheit, welche denselben Werth von M_{max} hervorruft. Diese gleichförmige Belastung k_g legt man dann der Berechnung der Gurtungen zu Grunde. Eine ähnliche Untersuchung hinsichtlich der verticalen Schubkraft V_{max} giebt in gleicher Weise die für die Berechnung der Füllungstheile zu Grunde zu legende gleichförmige Belastung k_f pro Längeneinheit. Die Untersuchung führt dazu, daß diese beiden Werthe k_g und k_f verschieden

groß ausfallen und außer von der Größe und Vertheilung der concentrirten Lasten des Eisenbahnzuges wesentlich noch von der Spannweite l der Träger abhängig sind. Hinsichtlich der weiteren Ausführung dieser Untersuchungen muß auf die speciellen Werke über Brückenbau verwiesen werden, hier mögen nur die Näherungsformeln angeführt werden, welche von Winkler*) in Bezug auf einen Eisenbahnzug aufgestellt sind, welcher sich zusammensetzt aus drei hinter einander folgenden Locomotiven von je 39 Tonnen Gewicht, deren Tender je 27 Tonnen wiegen, und auf welche Lastwaggons von je 16 Tonnen folgen:

Tabelle der gleichförmig vertheilten Belastungen in Tonnen für 1 laufenden Meter eines Geleises.

für l = 10 bis 50 m	für l = 50 bis 100 m	für l = 100 bis 150 m
$k_g = 3{,}98 + \frac{22}{l}$ Tonn.	$k_g = 3{,}07 + \frac{67}{l}$ Tonn.	$k_g = 2{,}67 + \frac{107}{l}$ Tonn.
$k_f = 4{,}30 + \frac{31}{l}$ Tonn.	$k_f = 3{,}47 + \frac{72}{l}$ Tonn.	$k_f = 3{,}27 + \frac{92}{l}$ Tonn.

Der Balken. Zu den in der Bautechnik am häufigsten angewendeten Constructionstheilen gehört der an zwei Stellen unterstützte oder befestigte horizontale Balken, welcher zum Tragen auf ihm ruhender Lasten bestimmt ist. Durch die letzteren sowie durch sein Eigengewicht wird der Balken auf Biegung in Anspruch genommen, und außerdem werden in allen Punkten im Innern desselben gewisse horizontale und verticale scheerende Kräfte hervorgerufen, denen das Material mit entsprechenden Schubspannungen entgegenwirken muß. Die Größe und Richtung dieser Anstrengungen an verschiedenen Stellen ist außer von der Größe und Vertheilung der Lasten wesentlich von der Art der Unterstützung abhängig, da in jedem Falle von den Festpunkten Reactionen ausgeübt werden müssen, die mit den belastenden Einwirkungen im Gleichgewichte stehen. In Thl. I sind diese Einwirkungen auf den Balken näher untersucht worden, und es genügt daher hier, die verschiedenen in der Praxis vorkommenden Fälle der Uebersichtlichkeit wegen zusammenzustellen. In Bezug auf die Biegungsverhältnisse wurde in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gefunden, daß in irgend §. 35.

*) Winkler, Theorie der Brücken, Heft I, Wien 1873.

einem Querschnitte des Balkens, für welchen das Moment der äußeren Kräfte durch M ausgedrückt ist, Biegungsspannungen eintreten, welche durch die Beziehung

$$M = s\,\frac{T}{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I}$$

gegeben sind, wenn unter T das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe desselben und unter s die Spannung verstanden wird, welcher die äußerste in der Entfernung e von der neutralen Axe befindliche Faserschicht pro Flächeneinheit ausgesetzt ist. Diese für jeden gebogenen Balken ganz allgemein geltende Gleichung soll auch im Folgenden zu Grunde gelegt werden, und zwar derart, daß unter der größten Spannung s der für das Material des Balkens höchstens zulässige Betrag der specifischen Faserspannung verstanden wird. Dabei wird zunächst, der Eigenschaft des Holzes und Schmiedeeisens entsprechend, dieser Betrag s für Druck- und Zugwirkungen als gleich groß vorausgesetzt, indem das hiervon abweichende Verhalten des Gußeisens, welches gegen Druckkräfte größeren Widerstand auszuüben vermag als gegen Zug, besonders besprochen werden soll.

Jede Biegung eines Balkens ist gleichbedeutend mit einer Formänderung der ursprünglichen, zunächst als gerade Linie vorausgesetzten geometrischen Axe des Balkens, welche letztere bei der Biegung in die sogenannte elastische Linie übergeht. In Bezug auf diese Linie wurde in Thl. I, §. 220 das ebenfalls ganz allgemein gültige Gesetz aufgestellt, welches durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{TE}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II}$$

ausgedrückt ist, worin E den Elasticitätsmodul des Materials und ϱ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an der Stelle bedeutet, für welche das Moment der äußeren Kräfte gleich M ist. Diese Gleichung läßt sich auch für rechtwinkelige Coordinaten x, y der elastischen Linie, wenn annähernd $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ gesetzt wird, durch

$$M = TE\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II}^a$$

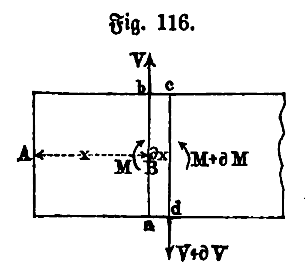
wiedergeben.

Was die verticale Schubkraft V für irgend eine Stelle des Balkens betrifft, so ist dieselbe immer gleich der algebraischen Summe aller der Verticalkräfte, die Stützreactionen inbegriffen, welche auf den Balken von einem Ende bis zu der betrachteten Stelle einwirken, und es wurde früher ebenfalls gefunden, daß diese Kraft für jede Stelle durch die Beziehung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}$$

gegeben ist, vorausgesetzt, daß die horizontale Mittellinie des Balkens als X-Axe angenommen wird. Man überzeugt sich hiervon auch leicht durch Fig. 116, wenn man im Abstande $AB = x$ von dem Coordinatenanfange ein Balkenelement $abcd$ herausgeschnitten denkt, dessen Länge $ad = bc = \partial x$ ist. Auf dieses Element wirken in den beiden Schnittflächen ab und cd die Drehungsmomente M und $M + \partial M$, sowie die Schubkräfte V und bezw. $V + \partial V$, und man hat für das Gleichgewicht dieses Elementes daher die Gleichung:

Fig. 116.



$$M + V\partial x = M + \partial M, \text{ oder } V = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

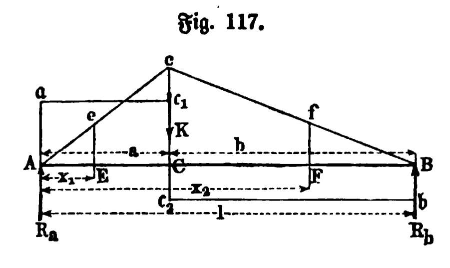
Daraus geht hervor, daß in denjenigen Querschnitten, für welche die Schubkraft V gleich Null wird, das Moment M ein Maximum ist, eine Beziehung, welche häufig zur schnellen Ermittelung derjenigen Stelle benutzt werden kann, für welche das Biegungsmoment seinen größten Werth annimmt.

Die vorstehenden Gleichungen I bis III bilden die Grundlage der folgenden Ermittelungen, welche die Bestimmung der Festigkeit von Balken ꝛc., d. h. die Feststellung der denselben zu gebenden Dimensionen, zum Zwecke haben. Kennt man nämlich für einen Balken aus bestimmtem Materiale, für welches die Größen E und s erfahrungsgemäß feststehen, für irgend welche Stelle das Moment M und die Schubkraft V, so lassen sich hieraus, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Balkens an der betrachteten Stelle ermitteln.

Es ist daher für die folgenden Entwickelungen zunächst von Wichtigkeit, für jeden Punkt eines Balkens, der unter der Einwirkung bekannter Kräfte steht, das Biegungsmoment M sowie die verticale Scheerkraft V zu kennen. Hierzu eignet sich der Anschaulichkeit wegen insbesondere die graphische Darstellung dieser Größen durch Diagramme, welche in folgender Weise entworfen werden können. Ueber der ursprünglich geraden Balkenaxe als X-Axe sollen die Momente M sowie die Verticalkräfte V als Ordinaten y aufgetragen werden, derart, daß die Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, von der Größe und Veränderlichkeit der Momente bezw. Verticalkräfte ein Bild giebt. Als positive Richtung der X- und Y-Axe

sollen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, die Richtungen von links nach rechts und von unten nach oben vorausgesetzt werden, und es sollen die aufwärts wirkenden Schubkräfte positive heißen, also von der X-Axe nach oben angetragen werden. Ebenso sollen Momente als positive betrachtet werden und ihre Ordinaten nach oben hin angetragen werden, wenn sie dem Balken eine positive Krümmung, d. h. eine solche zu ertheilen bestrebt sind, zufolge deren der Krümmungsmittelpunkt in der Richtung der positiven Y-Axe gelegen ist, der Balken also nach oben hin concav gebogen wird. Einer nach oben convexen Krümmung des Balkens entspricht daher ein negatives Moment, welches durch eine abwärts von der Horizontalen anzutragende Ordinate dargestellt wird.

Fig. 117.



Die Verzeichnung dieser Diagramme verursacht in dem einfachen Falle eines Balkens auf zwei Stützen A und B, Fig. 117, keine Schwierigkeit.

Ist der Balken von der Länge $AB = l$ in C, im Abstande a von A und b von B durch eine Kraft K belastet, so sind die Auflagerreactionen in A und B bezw. durch

$$R_a = K \frac{b}{l} \text{ und } R_b = K \frac{a}{l}$$

gegeben, und man hat für das Moment in C den Werth

$$M_c = R_a a = R_b b = K \frac{ab}{l},$$

während in irgend einem Punkte E oder F im Abstande x_1 bezw. x_2 von A das Moment durch

$$M_e = R_a x_1 = K \frac{b}{l} x_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und

$$M_f = R_a x_2 - K(x_2 - a) = K \frac{a}{l}(l - x_2) \quad \ldots \quad (2)$$

ausgedrückt ist. Ueberall ist das Moment positiv, und wenn man daher nach einem beliebig zu wählenden Maßstabe für die Momente (1 Millimeter $= \mu$ Meterkilogramm) $Cc = M_c = K \frac{ab}{l}$ macht, so geben die geraden Linien Ac und Bc für jeden Punkt wie E und F in den Ordinaten Ee und Ff das Moment M_e bezw. M_f an.

Die Schubkraft in A ist gleich $R_a = K \frac{b}{l}$ und bleibt constant für die Strecke AC, wie auch aus (1) folgt, woraus

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = K \frac{b}{l}$$

sich ergiebt. In C dagegen verändert sich V plötzlich um die abwärts gerichtete Kraft $-K$, folglich ist unmittelbar rechts neben C die Schubkraft

$$V = R_a - K = K\left(\frac{b}{l} - 1\right) = -K\frac{a}{l},$$

und sie behält diese Größe für die Strecke CB bei. Macht man daher nach einem gleichfalls beliebigen Maßstabe für die Schubkräfte (1 Millimeter $= \nu$ Kilogramm) $A\mathfrak{a} = R_a = K\frac{b}{l}$, zieht $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ horizontal, macht ferner $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 = K$ und zieht $\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}$ horizontal, so erhält man in $A\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}$ das Diagramm für die Schubkräfte.

Denkt man sich den Balkentheil links der Kraft K fest eingemauert, und das Ende B, Fig. 118, durch die Kraft K belastet, so ergiebt sich ohne Weiteres das Moment in A zu $M_a = Kl$, während es für den Punkt E im Abstande x von A durch $M_e = K(l - x)$ gegeben ist. Da hier der Balken convex nach oben gebogen wird, sind die Momente negativ, und man hat daher die Größe $Aa = M_a$ nach abwärts anzutragen, um in aB die Begrenzung der Momente zu erhalten. Die Schubkraft ist hier offenbar für jeden Querschnitt gleich K und nach oben gerichtet, daher die im Abstande $A\mathfrak{a} = K$ von der Axe gezogene Horizontale $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Diagramm für die Schubkräfte ergiebt.

Fig. 118.

Wenn dagegen der Balken AB, von der Länge l, Fig. 119, eine gleichmäßig über seine Länge verbreitete Last $Q = ql$ zu tragen hat, so sind die Reactionen der beiden Stützpunkte

$$R_a = R_b = q\frac{l}{2}$$

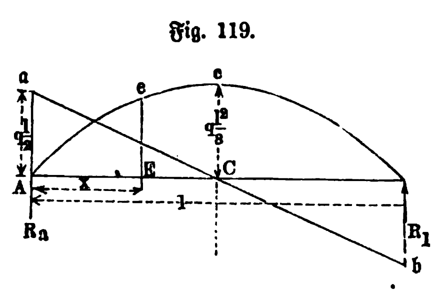


Fig. 119.

und für irgend einen Punkt E im Abstande x von A ist das Moment

$$M_x = q\,\frac{l}{2}\,x - q\,\frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}\,(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Man erhält daher die Darstellung der Momente durch die Parabel AcB, deren Scheitelhöhe in der Mitte C

$$M_c = Cc = q\,\frac{l^2}{8} \text{ ist.}$$

Die Schubkraft ist in A gleich $q\,\frac{l}{2}$ und in B gleich $-\,q\,\frac{l}{2}$, in der Mitte gleich Null, und die Gerade $a\,C\,b$ giebt das Diagramm der Schubkräfte, denn aus (3) erhält man

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{q}{2}\,(l - 2\,x)$$

die Gleichung einer geraden Linie vom Neigungscoefficienten q.

Ebenso erhält man für ein Consol AB, Fig. 120, welches durch die gleichmäßig vertheilte Last $Q = q\,l$ angegriffen wird, in E das Moment

$$M_x = q\,\frac{(l - x)^2}{2},$$

so daß man zu der Parabel $a\,e\,B$, mit dem Scheitel in B und der Ordinate $A\,a = q\,\frac{l^2}{2}$ in A als Diagramm der negativen Momente gelangt. Die Schubkräfte sind wieder durch die Gerade $a\,B$ dargestellt.

Fig. 120.

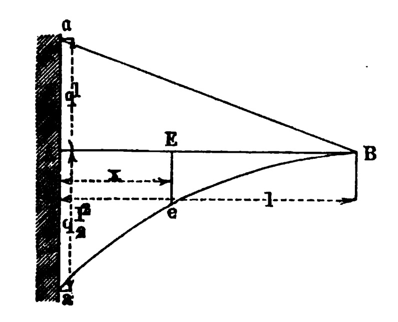
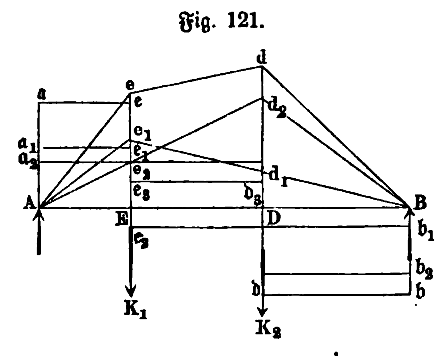


Fig. 121.



Wenn ein Balken durch mehrere Belastungen beansprucht wird, so erhält man das Diagramm, wenn man in jedem Punkte die Ordinaten der Diagramme algebraisch addirt, welche den Einzelbelastungen zukommen. So erhält man z. B. für den Balken AB, Fig. 121, welcher in E und D durch die Kräfte K_1 und K_2 angegriffen wird, die Begrenzung für die Momente in $A\,e\,d\,B$, wenn man

$Ee = Ee_1 + Ee_2$ und $Dd = Dd_1 + Dd_2$ macht, während die gebrochene Linie $A a e e_3 b_3 b b$ das Diagramm für die Schubkräfte ergiebt, sobald man $Aa = Aa_1 + Aa_2$, $Ee_3 = Aa_2 - Ee_2$ und $Bb = Bb_1 + Bb_2$ macht, und ae, $e_3 b_3$ sowie bb horizontal zieht.

Ebenso erhält man für den Consolträger AB, Fig. 122, welcher der gleichmäßig vertheilten Belastung $Q = ql$ und der Kraft K in B unterworfen ist, in adB die resultirende Momentencurve, wenn man für jeden Punkt wie D die Ordinate Dd gleich der Summe der Ordinaten Dd_1 der Parabel und Dd_2 der geraden Linie a_2B macht, durch welche bezw. die Momente der Last Q und der Kraft K allein dargestellt sind. Ferner hat man durch b_2 eine Parallele ab_2 mit a_1B zu ziehen, um die Größe der Schubkraft für jeden Punkt, z. B. D in Db, zu erhalten.

Fig. 122.

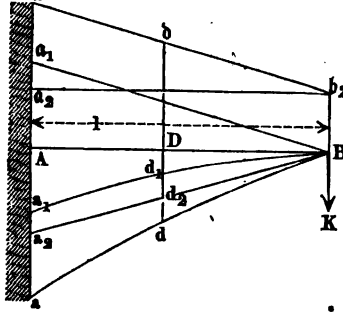
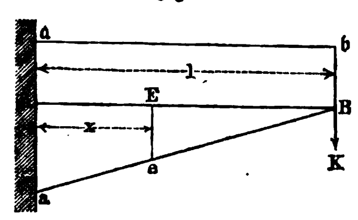
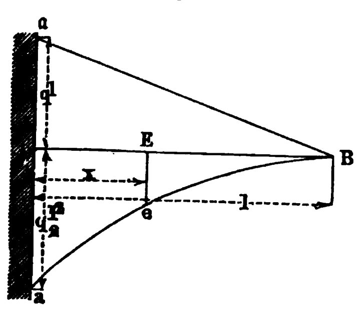


Fig. 123.



Der Uebersichtlichkeit wegen sollen im Folgenden die hauptsächlichen in der Praxis vorkommenden Belastungsarten des einfachen Balkens, wie solche in Thl. I näher besprochen sind, hier zusammengestellt, und die Größen der maximalen Biegungsmomente M_{max}, sowie der größten Durchbiegungen f dafür angegeben werden.

Fig. 124.



1. Der Balken ist an einem Ende A, Fig. 123, horizontal und unwandelbar befestigt, am anderen Ende B durch das Gewicht K belastet. Man hat für den Bruchquerschnitt bei A

$$M_{max} = Kl,$$

und für die Durchbiegung am freien Ende bei B:

$$f = \frac{K}{3TE} l^3.$$

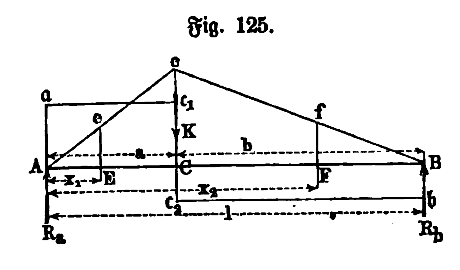
2. Derselbe Balken ist durch die gleichmäßig vertheilte Belastung $Q = q\,l$, Fig. 124 (a. v. S.), angegriffen. Der Bruchquerschnitt liegt auch hier an der Befestigungsstelle A, und hierfür ist

$$M_{max} = \frac{Q\,l}{2} = \frac{q\,l^2}{2},$$

während die größte Durchbiegung bei B sich bestimmt durch

$$f = \frac{Q}{8\,TE}\,l^3 = \frac{q\,l^4}{8\,TE}.$$

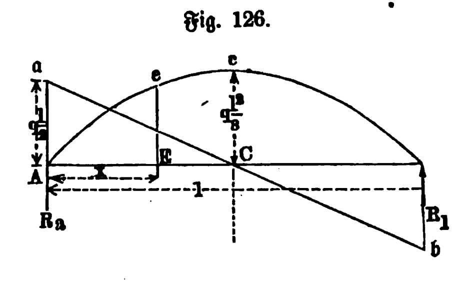
Fig. 125.



3. Der auf zwei Stützen A und B, Fig. 125, frei aufruhende Balken ist in C in den Abständen a und b von den Enden durch K belastet, man hat dann in C das größte Moment:

$$M_{max} = K\,\frac{a\,b}{l}.$$

Fig. 126.



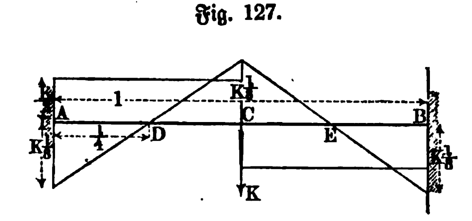
Greift die Kraft K in der Mitte an, ist also $a = b$, so erhält man daselbst

$$M_{max} = \frac{K\,l}{4},$$

und die Durchbiegung:

$$f = \frac{K}{48\,TE}\,l^3.$$

Fig. 127.



4. Derselbe Balken ist gleichmäßig durch $Q = q\,l$ belastet, Fig. 126. Man hat in der Mitte das größte Moment:

$$M_{max} = \frac{Q\,l}{8} = \frac{q\,l^2}{8},$$

und die größte Durchbiegung, ebenfalls in der Mitte:

$$f = \frac{5}{8}\,\frac{Q}{48\,TE}\,l^3 = \frac{5}{384}\,\frac{q\,l^4}{TE}.$$

5. Der Balken ist an beiden Enden A und B horizontal eingemauert, Fig. 127, und in der Mitte C durch ein Gewicht K belastet. Hier werden

durch die Einmauerung an den Enden A und B negative Momente von gleicher Größe mit dem positiven Maximalmomente in der Mitte C hervorgerufen, und man hat für jeden der drei Punkte A, B und C die absolute Größe des Biegungsmomentes:

$$M_{max} = \frac{Kl}{8}.$$

Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte im Betrage ein:

$$f = \frac{1}{4} \frac{K}{48\,TE} l^3 = \frac{1}{192} \frac{K}{TE} l^3.$$

Die Schubkraft ist überall constant gleich $\pm \frac{K}{2}$. In D und E, in den Abständen $\frac{l}{4}$ von den Enden ist das Moment gleich Null, also nach Gleichung II der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie unendlich groß, d. h. diese Linie ändert in diesen Punkten (Wendepunkten) ihre Krümmung aus der positiven in die negative.

Wenn hierbei die Kraft K nicht in der Mitte des Balkens, sondern in den Abständen a von A und b von B angreift, so sind die Reactionen in A und B

$$R_a = K b^2 \frac{b + 3a}{l^3}$$

und

$$R_b = K a^2 \frac{a + 3b}{l^3};$$

und die negativen Momente daselbst:

$$M_a = K \frac{a b^2}{l^2}$$

und

$$M_b = K \frac{b a^2}{l^2},$$

während im Angriffspunkte c der Kraft ein positives Moment von der Größe

$$M_c = K \frac{2 a^2 b^2}{l^3}$$

auftritt. Das absolut größte Biegungsmoment gehört demjenigen Stützpunkte an, welchem die Kraft K am nächsten liegt.

6. Der an beiden Enden horizontal befestigte Balken wird durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung $Q = q\,l$ angegriffen, Fig. 128 (a. f. S.). Für die Mitte C hat man das Biegungsmoment:

$$M_c = \frac{Q\,l}{24} = \frac{q\,l^2}{24},$$

während an den Enden negative Momente von der doppelten Größe

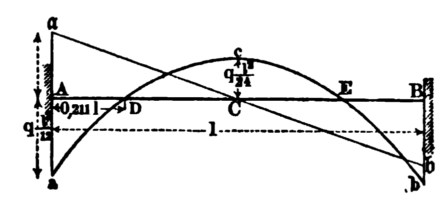
$$M_a = M_b = \frac{Q\,l}{12} = \frac{q\,l^2}{12}$$

auftreten. Die größte Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{1}{8}\,\frac{Q}{48\,TE}\,l^3 = \frac{1}{384}\,\frac{q\,l^4}{TE}.$$

Die Wendepunkte D und E stehen von den Endpunkten A und B um $AD = BE = 0{,}2113\ l$ ab.

Fig. 128.

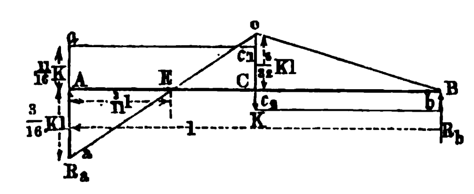


7. Der Balken AB, Fig. 129, ist einerseits in A horizontal eingeklemmt, andererseits in B frei unterstützt, und in der Mitte C durch K belastet. Hier sind die Reactionen in A und B:

$$R_a = \frac{11}{16}\,K;$$

$$R_b = \frac{5}{16}\,K.$$

Fig. 129.



Das größte (negative) Moment findet sich in A zu

$$M_a = M_{max} = \frac{3}{16}\,K\,l,$$

während das Moment in der Mitte nur

$$M_c = \frac{5}{32}\,K\,l$$

beträgt.

Der Inflexionspunkt E hat von A und B die bezw. Abstände

$$AE = \frac{3}{11}\,l \text{ und } BE = \frac{8}{11}\,l,$$

und die Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{5}{8}\,\frac{K}{48\,TE}\,l^3 = \frac{5}{384}\,\frac{K}{TE}\,l^3.$$

Sollen die Momente in A und C ihrer absoluten Größe nach gleich

werden, so hat man den Stützpunkt A um die Größe $\frac{1}{144}\frac{K}{TE}l^3$ unter die Horizontale durch B zu legen, in welchem Falle

$$M_a = M_c = \frac{1}{6}Kl$$

wird.

Wenn die Last K nicht in der Mitte, sondern im Abstande a von A und b von B wirkt, so hat man die Stützreaction in B:

$$R_b = K\frac{3l - a}{2l^3}a^2$$

und das Biegungsmoment in der Verticalebene der Kraft:

$$M_c = K\frac{3l - a}{2l^3}a^2 b,$$

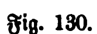
während in A ein negatives Moment

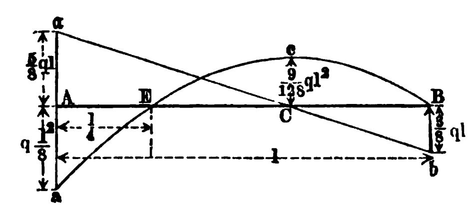
$$M_a = K\frac{2l^2 - 3al + a^2}{2l^2}a$$

zur Wirkung kommt.

8. Derselbe Balken wird durch das gleichmäßig vertheilte Gewicht $Q = ql$ belastet, Fig. 130. Hier ist die Reaction auf die Stütze B durch

$$R_b = \frac{3}{8}Q = \frac{3}{8}ql$$


Fig. 130.



und das negative Moment an der Befestigungsstelle durch

$$M_a = \frac{1}{8}Ql = \frac{1}{8}ql^2$$

dargestellt. Der Wendepunkt E hat von A einen Abstand $AE = \frac{l}{4}$ und in der Mitte C von BE findet sich das größte positive Moment

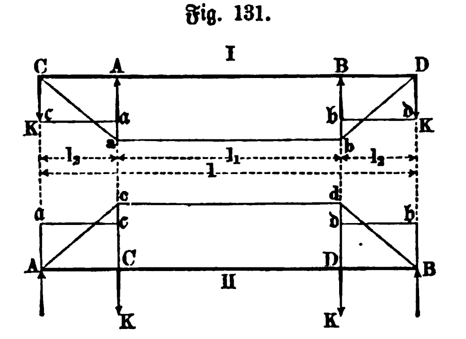
$$M_c = \frac{9}{128}Ql = \frac{9}{128}ql^2.$$

9. Der auf zwei Stützen A und B frei aufruhende Balken wird durch zwei gleiche Kräfte K in gleichen Abständen $AC = BD = l_1$ von den Stützen angegriffen, Fig. 131, I und II, a. f. S. Die Reaction jeder Stütze ist hier

$$R_a = R_b = K,$$

das Moment ist zwischen den Stützen, Fig. I, und zwischen den Kraftangriffen, Fig. II, also für das mittlere Stück von der Länge $l_1 = l - 2l_2$ von der constanten Größe $K l_2$, während für jedes Ende AC und BD die unter (1.) angegebenen Formeln gelten. Für das mittlere Stück ist wegen des constanten Momentes der Krümmungshalbmesser ϱ überall von gleicher Größe

Fig. 131.



$$\varrho = \frac{TE}{K l_2},$$

d. h. die elastische Linie dieses Stückes ist ein Kreisbogen, dessen Bogenhöhe in der Mitte durch

$$f = \frac{l_1^2}{8\varrho} = \frac{K l_2 l_1^2}{8TE}$$

ausgedrückt ist.

Um diese Größe f erhebt sich in Fig. I die Mitte des Balkens über die Horizontale AB, während in Fig. II eine Senkung der Mitte um

$$f = \frac{K l_2}{TE}\left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3}\right)$$

eintritt.

Schubkräfte treten nur in den Schenkeln AC und BD von der Größe K auf, für das mittlere Stück ist die Schubkraft gleich Null.

10. Derselbe Balken ist einer gleichmäßig über seine Länge verbreiteten Last $Q = q\,(l_1 + 2l_2) = ql$ ausgesetzt, Fig. 132.

In diesem Falle ist die Reaction jeder Stütze

$$R_a = R_b = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2},$$

und das Moment über einer Stütze

$$M_a = M_b = \frac{q\,l_2^2}{2},$$

während in der Mitte E das Moment

$$M_e = q\,\frac{l_1^2 - 4l_2^2}{8} \text{ ist.}$$

Das Moment M_a über den Stützen wird gleich demjenigen M_e für die Mitte, wenn

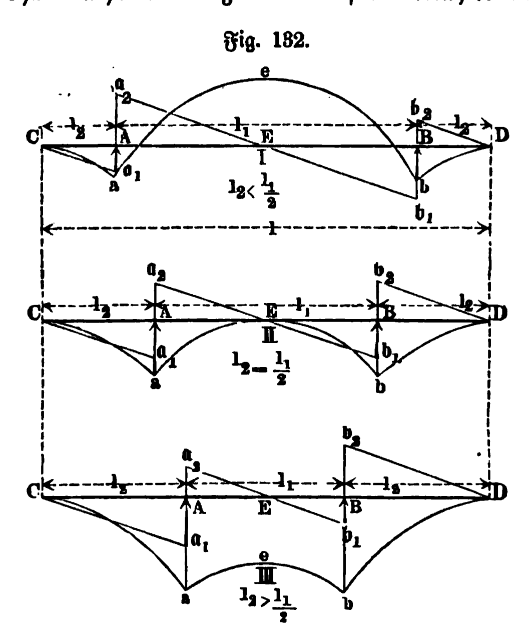
$$l_2 = l_1 \sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}3536\ l_1$$

ist. Die Diagramme I, II und III der Figur 132 entsprechen bezw. den Verhältnissen

$$l_2 \lesseqgtr \frac{l_1}{2}.$$

In Betreff des Elasticitätsmoduls der verschiedenen Baumaterialien muß auf die in Thl. I enthaltenen Angaben verwiesen werden; es möge hier nur

Fig. 132.



bemerkt werden, daß man als höchste zulässige **Zugspannung** s_z und **Druckspannung** s_d für die verschiedenen hauptsächlich verwendeten Materialien etwa die folgenden Werthe*) annehmen kann:

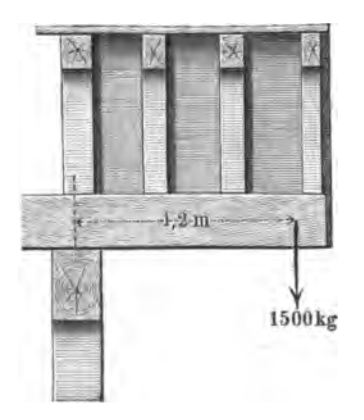
*) Vergl. Deutsches Bauhandbuch. Berlin 1874, S. 235.

Höchstens zulässige Spannung pro Quadratmillimeter in Kilogrammen.

Baumaterial	Elasticitäts-modul E	Construction mit wenig Erschütterungen (Dächer)		Constructionen mit bedeutenden Erschütterungen (Brücken)	
		Zugspannung s_z	Druckspannung s_d	Zugspannung s_z	Druckspannung s_d
Schmiedeeisen . . .	20 000	13,4	13,4	6,7	5
Eisenblech	18 000	12,0	—	6,0	—
Eisendraht	22 000	21,5	—	10,7	—
Gußeisen	10 000	4,0	7	2,7	4,8
Eichenholz . . .	1 200	1,6	1,4	0,8	0,8
Nadelholz	1 300	2,0	1,5	1,0	0,75

Beispiele: Für eine Speicherwinde ist ein hölzerner Auslegerarm anzuordnen, welcher aus der Aufwindeluke, Fig. 133, um 1,2 m herausragt und am freien Ende einer Belastung von $K = 1500$ kg unterworfen ist. Wie hoch hat man die Höhe h des rechteckigen Querschnitts dieses Armes zu machen, wenn die Breite b gleich 180 mm gewählt wird, und die specifische Faserspannung den Werth 0,8 kg nicht überschreiten soll?

Fig. 133.



Hier hat man, dem Fall (1) entsprechend:

$M_{max} = Kl = 1500 \,.\, 1200$ mmkg,

und da für den rechteckigen Querschnitt das Trägheitsmoment

$$T = \frac{b\,h^3}{12} \text{ und } \frac{T}{e} = \frac{b\,h^2}{6}$$

ist, so folgt mit $s = 0,8$ nach der Gleichung I

$$1500 \,.\, 1200 = 0,8\,\frac{180\,h^2}{6},$$

woraus

$$h = \sqrt{\frac{60\,000}{0{,}8}} = \sqrt{75\,000} = 274,$$

wofür rund 280 mm genommen werden kann. Nimmt man den Elasticitätsmodul des verwendeten Eichenholzes zu $E = 1200$, so erhält man die elastische Durchbiegung des Armes an seinem Ende zu

$$f = \frac{K}{3\,TE}\,l^3 = \frac{1500}{3\,\frac{1}{12}\,180\,.\,280^3\,.\,1200}\,1200^3 = \frac{6000\,.\,144}{18\,.\,28^3} = 2{,}2\,\text{mm}.$$

2. Wie stark sind die hölzernen Etagenbalken für den Boden eines Speichers zu machen, dessen Nutzlast zu 600 kg und dessen Eigengewicht zu 250 kg pro Quadratmeter anzunehmen ist, wenn die einzelnen Balken 0,8 m von Mitte zu Mitte entfernt sind, und eine freie Länge von 5 m haben?

Die Belastung beträgt hier pro laufenden Meter $q = 0{,}8\,(250 + 600) = 680$ kg, daher hat man das größte Biegungsmoment in der Mitte, wenn die Balken an den Enden frei aufruhend angenommen werden:

$$M_{max} = \frac{680\,.\,5}{8}\,5\,\text{mkg}.$$

Nimmt man eine Breite der Balken $b = 0{,}18$ m und eine zulässige Spannung $s = 1$ kg an, so folgt die erforderliche Balkenhöhe h in Millimetern aus

$$s\,\frac{b\,h^2}{6} = 1\,\frac{180}{6}\,h^2 = \frac{680\,.\,5}{8}\,5000 \text{ zu } h\ 265\,\text{mm}.$$

Die Durchsenkung in der Mitte erhält man unter Zugrundelegung eines Elasticitätsmoduls für Tannenholz von $E = 1300$ zu

$$f = \frac{5}{8}\,\frac{Q}{48\,TE}\,l^3 = \frac{5}{8}\,\frac{680\,.\,5}{48\,\frac{1}{12}\,180\,.\,265^3\,.\,1300}\,5000^3 = 15{,}3\,\text{mm}.$$

3. Die 3 m weite Einfahrt eines Wohnhauses soll durch einen schmiedeeisernen I-Träger überdeckt werden, dessen Dimensionen festzustellen sind. Die auf den Träger pro laufenden Meter entfallende Belastung setzt sich zusammen aus:

1) dem darauf ruhenden Mauerwerke von 10 m Höhe und durchschnittlich 2 Stein Stärke gleich $2\,.\,10\,.\,220 = 4400$ kg;
2) dem Gewichte von zwei Zwischenböden von je 2,5 m Länge à 300 kg pro Quadratmeter gleich $2\,.\,2{,}5\,.\,300 = 1500$ kg;
3) dem Gewichte der auf den Träger entfallenden Dachfläche mit $2{,}5\,.\,250 = 625$ kg.

Die gesammte Belastung pro Meter beträgt $q = 6525$ kg oder für den Träger von 3 m Länge

$$Q = 3\,.\,6525 = 19\,575 = rot\ 20\,000\,\text{kg}.$$

Wenn der Balken an seinen Enden wegen der Einmauerung als unwandelbar befestigt angesehen wird, so erhält man, entsprechend der unter (6) angeführten Belastungsart, das größte Moment an den Einmauerungsstellen:

$$M_{max} = \frac{Ql}{12} = \frac{20\,000\,.\,3}{12} = 5000\,\text{mkg}.$$

Soll nun der gewalzte Träger eine Höhe $h = 300$ mm erhalten, und sieht man von der Tragfähigkeit der Mittelrippe ab, so kann man, unter b die Breite und unter d die Dicke jedes der beiden Flanschen verstanden, $\frac{T}{e} = h\,b\,d$ setzen (s. weiter unten §. 45), und man erhält mit $s = 8$ kg aus

$$8 \cdot 300 \cdot b\,d = 5000 \cdot 1000$$

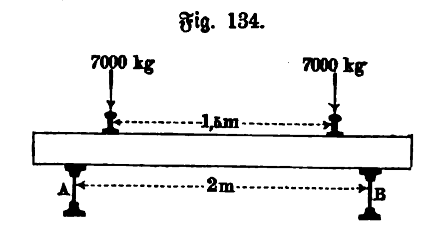
den Flanschenquerschnitt $b\,d = 2083$ qmm. Setzt man eine Dicke der Flanschen $d = 16$ mm voraus, so erhält man daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{2083}{16} = 130 \text{ mm}$$

(s. über gewalzte I-Träger auch §. 45).

4. Wenn auf einer Brücke die Eisenbahnschwellen auf sogenannten Schwellenträgern A, B, Fig. 134, aufruhen, deren Abstand 2 m beträgt, wie stark wird man die 0,25 m breiten eichenen Schwellen zu machen haben, wenn die größte Belastung einer Schwelle durch darüber stehende Triebräder einer Locomotive von je 7000 kg Gewicht ausgeübt wird, und die Entfernung der Schienen von Mitte zu Mitte 1,5 m beträgt? Hier hat man, entsprechend der unter (9) angegebenen Belastungsart $l_1 = 1{,}5$ und $l_2 = 0{,}25$ m, daher

Fig. 134.



$$M_{max} = K\,l_2 = 7000 \cdot 0{,}25 = 1750 \text{ mkg},$$

somit folgt bei einer zulässigen Spannung $s = 0{,}8$ kg die gesuchte Höhe h aus $0{,}8\,\frac{1}{6}\,250\,h^2 = 1750 \cdot 1000$ zu

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 1750\,000}{0{,}8 \cdot 250}} = \sqrt{52\,500} = 229 \text{ mm} = rot\ 230 \text{ mm}.$$

Mit einem Elasticitätsmodul $E = 1200$ erhält man die Durchbiegung in der Mitte der Schwelle

$$f = \frac{K\,l_2}{T\,E}\left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1\,l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3}\right) = \frac{7000 \cdot 250}{\frac{1}{12}\,250 \cdot 230^3 \cdot 1200}\left(\frac{1500^2}{8} + \frac{1500 \cdot 250}{2} + \frac{250^2}{3}\right)$$

$$= \frac{0{,}07}{23^3}\,489\,580 = 2{,}8 \text{ mm}.$$

§. 36. Bewegliche Belastung. Die vorstehend gemachten Angaben über die Größe der Momente und Schubkräfte von Balken beruhen auf der Annahme einer *ruhenden* Belastung. Bei sehr vielen Ausführungen, so insbesondere bei allen Brückenträgern, kommt indessen der Fall vor, daß gewisse Belastungen über den Balken in seiner Längsrichtung *verschoben* werden, und es ist leicht ersichtlich, daß mit einer solchen Verschiebung der Belastung die Größe der Biegungsmomente sowie der Scheerkräfte für jeden Punkt des

Balkens einer Veränderung unterworfen sein muß. Es ist daher, behufs der Herstellung einer stabilen Construction erforderlich, für jeden Querschnitt des Balkens diejenige Laststellung zu kennen, welche für diesen Querschnitt die ungünstigste Beanspruchung, d. h. den größtmöglichen Werth des Momentes M und der Schubkraft V hervorruft.

Fig. 135.

Es sei zu dem Ende wieder AB, Fig. 135, ein auf zwei Stützen A und B frei aufruhender Balken, auf welchen in C, im Abstande x von A, die concentrirte Last K einwirkt. Dieselbe erzeugt in C das Biegungsmoment

$$M_c = K \frac{AC.BC}{AB}$$

$$= K \frac{x(l-x)}{l}, \quad (1)$$

und man erhält, wenn man diese Größe gleich Cc aufträgt, in dem Dreiecke AcB die Momentenfläche des Balkens für diese Belastung. Es ist klar, daß für diese Belastung das größte Moment in der Verticalebene durch C auftritt, in welcher die Kraft wirkt, und da die getroffene Wahl des Kraftangriffes C beliebig ist, so wird die obige Bemerkung für jede Lage der Kraft K gelten, d. h. es wird bei einer Verschiebung der Belastung K das größte zugehörige Biegungsmoment immer in demjenigen Querschnitte auftreten, in welchem die Kraft angreift. Selbstredend ist der Werth dieses größten Momentes

$$M = K \frac{x\,(l-x)}{l}$$

mit der Verschiebung der Last veränderlich, und man erkennt aus der vorstehenden Gleichung

$$M = y = Kx - \frac{K}{l}\,x^2,$$

daß bei der Verschiebung der Last von A nach B der Endpunkt c der das Moment darstellenden Ordinate Cc eine Parabel AcB beschreibt, deren Scheitel in der Mitte N zwischen A und B, also für $x = \frac{l}{2}$ die Ordinate

$$M_n = K\,\frac{l}{4} \text{ hat.}$$

Zeichnet man diese Parabel AnB, so erhält man für jeden beliebigen Punkt C mit der Abscisse x in der Ordinate y das Maß für das größtmögliche durch K in C hervorgerufene Moment, welches mit $max\ M_x$ bezeichnet sein mag. Es folgt auch, daß in der Mitte N das absolut größte Moment $max\ M$ eintritt, welches die Last K überhaupt in dem Balken erzeugt, und zwar bei ihrer mittleren Stellung, bei welcher Stellung jedoch das Biegungsmoment für jeden anderen Querschnitt kleiner ausfällt, als das diesem Querschnitte eigenthümliche Maximalmoment $max\ M_x$. Letzteres erkennt man sofort, wenn man das der mittleren Laststellung zugehörige Momentendreieck AnB zeichnet, welches ganz innerhalb der Parabel gelegen ist.

Wirkt die Last K in dem Punkte C, so sind die Auflagerreactionen in A und B und daher auch die Verticalkräfte in den Strecken AC und BC, bezw. durch

$$R_a = A\mathfrak{a}_1 = K\frac{l-x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$R_b = B\mathfrak{b}_2 = K\frac{x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben. Trägt man daher in A und B die Strecken $A\mathfrak{a}$ und $B\mathfrak{b}$ nach dem Kräftemaßstabe gleich K auf, und vervollständigt das Parallelogramm $A\mathfrak{a}B\mathfrak{b}$, so erhält man für irgend eine Stellung der Kraft K in C durch die beiden Abschnitte $C\mathfrak{c}_1$ und $C\mathfrak{c}_2$ der Kraftrichtung zwischen der Axe AB und den beiden geneigten Parallelogrammseiten die Größen der Schubkräfte für die Balkenstrecken beiderseits von K, denn es ist alsdann:

$$C\mathfrak{c}_1 = K\frac{l-x}{l} = R_a$$

und

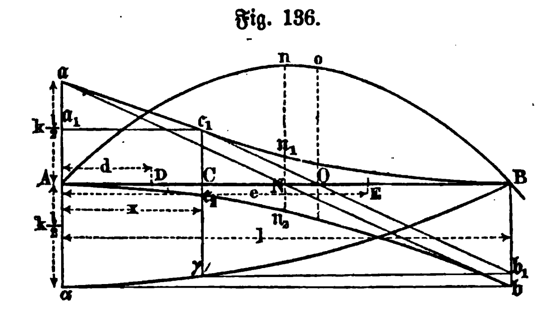
$$-C\mathfrak{c}_2 = K\frac{x}{l} = R_b.$$

Die beiden Geraden $A\mathfrak{b}$ und $B\mathfrak{a}$ geben daher über die Schubkraft im Balken für jede beliebige Stellung der Last Aufschluß.

Setzt man ferner voraus, daß die bewegliche Last nicht in einem Punkte concentrirt, sondern der Länge nach gleichmäßig vertheilt und pro Längeneinheit gleich k sei, wie dies etwa für einen Eisenbahnzug angenommen werden kann, welcher über eine Brücke fährt, so ist leicht zu ersehen, daß das größte Biegungsmoment für irgend welchen Querschnitt C, Fig. 136, sich dann einstellt, wenn der Träger seiner ganzen Länge l nach mit der gleichmäßigen Last bedeckt ist. Denn wo man sich auch ein Belastungselement $k\partial x$ denken mag, in D oder E, immer wird dasselbe, wie jede isolirte Belastung, in dem Querschnitte C ein positives

Biegungsmoment hervorrufen, und daher wird das größte Moment in C sowie in jedem anderen Querschnitte erzeugt werden, sobald sämmtliche Balkenelemente belastet sind. Daher ergiebt die Parabel AnB mit der Scheitelordinate $Nn = k\frac{l^2}{8}$ in der Mitte, welche als Momentenfläche für eine ruhende gleichmäßig vertheilte Last kl gilt, in allen ihren Ordi-

Fig. 136.



naten auch das Maximum der Momente, die in den zugehörigen Querschnitten durch die bewegliche Belastung k erzeugt werden können.

Anders verhält es sich mit den größten Werthen der Scheerkraft. Man erkennt nämlich, daß in Betreff irgend eines Punktes, wie C, jede Belastung eines Elementes zwischen C und B, z. B. in E, einen Zuwachs der Reaction R_a und somit der Scheerkraft in C hervorbringt, während die Belastung eines Elementes, wie D, zwischen C und A die Schubkraft in C vermindert. Durch eine derartige elementare Belastung $k\partial x$ in E wird nämlich die Reaction R_a, also auch die Scheerkraft in C um

$$k\partial x\frac{l-e}{l},$$

also um eine positive Größe vermehrt, während diese Belastung in D einen Beitrag zur Scheerkraft in C von

$$k\partial x\frac{l-d}{l} - k\partial x = -k\partial x\frac{d}{l},$$

also eine negative Größe liefert. Daraus geht hervor, daß man in C die größte positive Schubkraft $max\,V_c$ erhält, wenn die Strecke $l-x$ von C bis B mit der Last bedeckt ist. Die Größe dieses Maximums ergiebt sich dann zu

$$R_a = k(l-x)\frac{l-x}{2l} = \frac{k}{2l}(l-x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Denkt man sich diese Werthe für alle Querschnitte berechnet und nach

dem Kräftemaßstabe als Ordinaten, wie $C c_1$, in C aufgetragen, so erhält man für die Maxima der positiven Scheerkräfte als Begrenzungslinie die Parabel $a c_1 B$ mit verticaler Axe, deren Scheitel in B liegt, und deren Ordinate in A für $x = 0$ zu

$$V_a = \frac{k\,l}{2}$$

sich bestimmt. Die Schubkraft in der Mitte ist

$$N n_1 = \frac{k\,l}{8}.$$

Wenn in C die maximale Scheerkraft

$$max\, V_c = C c_1 = k\,\frac{(l-x)^2}{2\,l}$$

auftritt, d. h. wenn die Strecke CB mit der Last gleichförmig bedeckt ist, so hat man die Schubkraft in B:

$$R_b = R_a - k\,(l-x) = \frac{k}{2l}\,(l-x)^2 - k\,(l-x) = \frac{k}{2l}\,x^2 - \frac{kl}{2} \cdot (5)$$

Wenn man daher diese (negative) Größe in B abwärts gleich $B b_1$ anträgt, b_1 mit c_1 durch eine Gerade verbindet, und durch c_1 die Horizontale $c_1 a_1$ zieht, so erhält man, wie leicht ersichtlich ist, in der Fläche $A a_1 c_1 O b_1 B$ das Diagramm für die Scheerkräfte des Balkens in dem betrachteten Zustande einer Belastung der Strecke $B C$. Der Schnittpunkt O, in welchem hierbei die Schubkraft gleich Null ist, legt dann den Querschnitt fest, in welchem, gleichfalls bei der gedachten Belastung, das größte Biegungsmoment auftritt, welches letztere jedoch nach dem Vorstehenden denjenigen Werth $O o$ noch nicht erreicht hat, den das Biegungsmoment in O im ungünstigsten Falle, d. h. bei voller Belastung des Balkens erreichen kann.

Es mag bemerkt werden, daß, wenn man die Größe der Schubkraft in B

$$B b_1 = \frac{k}{2l}\,x^2 - \frac{kl}{2}$$

in C abwärts gleich $C\gamma$ anträgt, und diese Construction für alle Querschnitte ausgeführt denkt, die so erhaltenen Punkte γ eine Parabel $\alpha\gamma B$ mit verticaler Axe festlegen, deren Scheitel α um $\frac{kl}{2}$ unter A gelegen ist, und welche Parabel dazu dienen kann, das Schubkraftdiagramm für irgend welche Belastung des Balkens zu zeichnen.

Eine ganz analoge Betrachtung, wie sie vorstehend zur Ermittelung der größten positiven, d. h. aufwärts gerichteten Scheerkraft angestellt worden ist, gilt auch hinsichtlich der größten negativen (abwärts wirkenden) Schubkraft, und man erhält dieselbe offenbar für irgend einen Querschnitt C in

demjenigen Belastungszustande, in welchem die Strecke zwischen C und A mit der Belastung kx bedeckt ist. Es bedarf keines näheren Beweises, daß man durch eine derartige Betrachtung zu einer Parabel An_2b gelangt, welche für jeden Punkt C in ihrer Ordinate Cc_2 das Maximum der negativen Schubkraft des Querschnittes C ergiebt. Diese Parabel, deren Axe ebenfalls vertical ist, hat in A ihren Scheitel und ihre Ordinate in B ist gleich $Bb = k\frac{l}{2}$. Für diese Linie, sowie für die Verzeichnung der Schubkraftdiagramme gelten die nämlichen Bemerkungen, welche für die Maxima der positiven Scheerkräfte hinsichtlich der Parabel an_1B gemacht wurden. Es ist auch klar, daß, wenn man für irgend welchen Querschnitt C einmal die der größten positiven Schubkraft zukommende Belastung der Strecke BC und ein anderes Mal die der größten negativen Scheerkraft angehörige Belastung der Strecke AC voraussetzt, und die beiden Diagramme mit einander vereinigt, als Resultat das für die gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte ruhende Belastung kl der Fig. 126 geltende Diagramm erhalten wird.

In Wirklichkeit sind die Brückenträger sowohl einer ruhenden oder permanenten Belastung durch das Eigengewicht der Construction, als auch einer beweglichen oder Verkehrsbelastung ausgesetzt. Es handelt sich daher darum, für jeden Querschnitt die ungünstigste Anstrengung zu ermitteln, welche aus diesen beiden Belastungen resultirt. Hierbei kann man in der Regel die permanente Belastung als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen, und es möge dieselbe im Folgenden gleich p Kilogramm per Längeneinheit (1 m) angenommen werden. Die bewegliche Belastung kann entweder eine in einem Punkte concentrirte Last K sein, wie dies etwa bei einem über eine Brücke fahrenden Frachtwagen angenommen werden darf, dessen Gewicht man in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt, oder die bewegliche Last ist ebenfalls als gleichmäßig vertheilt zu denken. Die letztere Annahme, welche z. B. für die Belastung durch ein Menschengedränge zutrifft, wird meistens auch dann zu Grunde gelegt, wenn die Verkehrslast aus einer Reihe auf einander folgender Einzellasten besteht, wie dies beispielsweise bei einem Eisenbahnzuge der Fall ist, dessen einzelne Axen ebenso vielen concentrirten Kräften entsprechen. Für diesen Fall pflegt man meistens mit Rücksicht auf das in §. 34 hierüber Gesagte die wirkliche Belastung durch den Eisenbahnzug durch eine entsprechende gleichmäßig vertheilte Last zu ersetzen, eine Annahme, die um so mehr zulässig ist, je länger der Träger in Bezug auf die Entfernung der Axen von einander ist.

Es sei AB, Fig. 137 (a. f. S.), ein Träger von der Länge l, welcher durch das Eigengewicht der Construction mit dem Betrage pl belastet ist, so stellt nach dem Vorstehenden die Parabel An_1B die Momente und

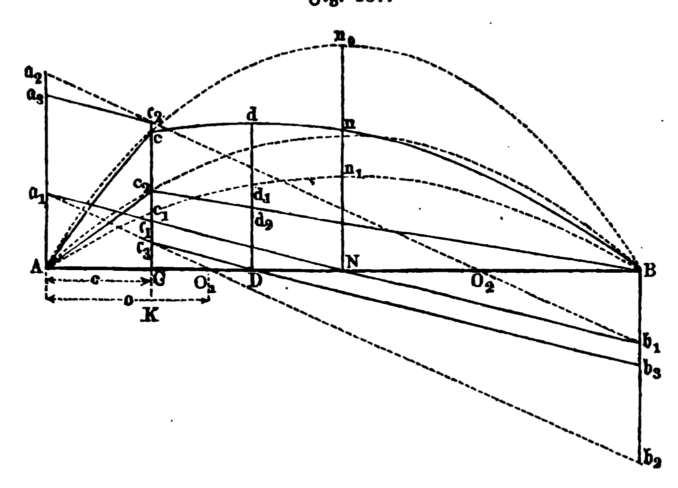
die Gerade $a_1 b_1$ die Schubkräfte für alle Querschnitte des Trägers vor, wenn

$$Nn_1 = p\frac{l^2}{8} \text{ und } Aa_1 = Bb_1 = p\frac{l}{2}$$

ist. Denkt man sich nun die concentrirte Belastung K über A hereintretend, bis C im Abstande $AC = c$ von A bewegt, so erhält man, wenn

$$Cc_2 = K\frac{c\,(l-c)}{l}$$

Fig. 137.



gemacht wird, in dem Dreiecke Ac_2B das Diagramm für die durch K hervorgerufenen Momente in jedem Punkte des Trägers. Wenn man nunmehr die beiden Diagramme An_1B und Ac_2B durch Addition ihrer Ordinaten vereinigt, indem man für jeden Punkt wie C

$$Cc = Cc_1 + Cc_2$$

macht, so liefert die entstehende Curve $AcnB$ das Diagramm für das resultirende Moment, welches in jedem Punkte durch die vorausgesetzte Belastung pl und K in C erzeugt wird. Es ist leicht, nach dem Vorhergegangenen zu erkennen, daß diesem Belastungszustande auch das größte Moment Cc entspricht, welches bei der Ueberführung der Last in dem Querschnitte C jemals erzeugt werden kann. Wenn man daher durch A, c_2 und B die Parabel für die Maximalmomente von K zeichnet, deren Gleichung (1) nach dem Vorstehenden durch

$$y_2 = K\frac{x\,(l-x)}{l} = Kx - \frac{K}{l}x^2$$

gegeben ist, so erhält man durch die Vereinigung der beiden Parabeln An_1B und Ac_2B eine neue Parabel An_0B, welche für jeden Querschnitt das größtmögliche Moment darstellt, das in demjenigen Augenblicke auftritt, in welchem die bewegliche Last K diesen Querschnitt erreicht hat. Diese Parabel muß daher auch den Punkt c in sich aufnehmen. Da die Ordinaten der Parabel An_1B durch

$$y_1 = p\,\frac{l}{2}\,x - p\,\frac{x^2}{2} = \frac{p}{2}\,(lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ausgedrückt sind, so hat man diejenigen der resultirenden Parabel An_0B gleich

$$y = y_1 + y_2 = \left(\frac{p}{2} + \frac{K}{l}\right)(lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Man erkennt hieraus, daß man für die Maximalmomente dieselben Werthe erhält, welche sich für einen Träger ergeben würden, welcher einer gleichmäßig vertheilten Belastung von der Größe

$$q = p + 2\,\frac{K}{l}$$

pro Längeneinheit ausgesetzt wäre.

Ebenso findet sich die Schubkraft in C als die algebraische Summe der beiden Schubkraftcomponenten, welche durch die gleichmäßig vertheilte Belastung $p\,l$ und durch die Einzelkraft K erzeugt werden. Diese Componenten sind bekanntlich durch

$$V_1 = p\left(\frac{l}{2} - c\right) \text{ und } V_2 = K\,\frac{l - c}{l}$$

ausgedrückt. Macht man daher $A\mathfrak{a}_1 = B\mathfrak{b}_1 = p\,\frac{l}{2}$ und zieht $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, so erhält man in $C\mathfrak{c}_1$ das Maß für

$$V_1 = p\left(\frac{l}{2} - c\right).$$

Wenn man ferner $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = K$ anträgt, und $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$ sowie $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$ zieht, so erhält man in $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ die Reaction in A oder die Schubkraft

$$V_2 = K\,\frac{l - c}{l},$$

welche durch K in der Strecke AC erzeugt wird, so daß $C\mathfrak{c}_2 = V$ die ganze Scheerkraft in C bedeutet.

Offenbar wird auch diese Scheerkraft für C zu einem Maximum, wenn die Kraft K in diesem Querschnitte wirkt. Da diese Betrachtung für jeden anderen Querschnitt ebenso gilt, wie für denjenigen durch C, so kann man

das Viereck $A a_2 b_1 B$ als das Diagramm für die Schubkräfte ansehen, welche bei einer Bewegung der Last K über den Träger in der links von der Last befindlichen Strecke auftreten. Es ist ebenso zu erkennen, daß die Gerade $a_1 b_2$ in gleicher Art die Schubkraft in dem rechts von K befindlichen Balkentheile angiebt. Zieht man ferner durch c_2 und c_3 zu $a_1 b_1$ die Parallelen $c_2 a_3$ und $c_3 b_3$, so erhält man durch $A a_3 c_2 c_3 b_3 B$ die graphische Darstellung der Schubkräfte in jedem Querschnitte für den Fall, daß die Last K bis zu dem Punkte C vorgerückt ist. Man erkennt hieraus, daß in dem Durchschnittspunkte D dieses Diagramms mit der Axe AB die Schubkraft gleich Null ist, und daß diesem Querschnitte D daher das Maximalmoment Dd zukommt, welches durch die vorausgesetzte Belastung in dem Balken hervorgerufen wird. Eine Betrachtung der Figur lehrt nun ohne Weiteres Folgendes. Wenn die Last K von links kommend den Stützpunkt A erreicht, findet sich das größte Biegungsmoment Nn_1 in der Mitte N des Balkens. Bei weiterem Vorrücken der Last K nach rechts geht der Punkt, in welchem das größte Moment sich einstellt, der Last K entgegen, und ist z. B. nach D gelangt, sobald K nach C getreten ist, bis dieser Punkt mit der Last in O_1 zusammenfällt. Bei weiterer Bewegung der Last nach rechts fällt der Punkt des Maximalmomentes stets mit dem Angriffspunkte von K zusammen, bis beide durch die Mitte N hindurch nach dem Punkte O_2 gelangt sind. Wird die Last noch weiter bewegt, so kehrt der Punkt des Maximalmomentes seine Bewegung um und erreicht die Mitte N, sobald K den jenseitigen Stützpunkt B erreicht hat. Die Aehnlichkeit dieses Vorganges mit dem in §. 26 bei der unsymmetrischen Belastung der Gewölbe untersuchten fällt in die Augen. Es ist auch aus der Figur leicht die Entfernung $A O_1 = o$ des Punktes O_1 zu bestimmen, bis zu welchem die Verschiebung des Maximalmomentes nach jeder Seite der Mitte stattfindet, wenn man die beiden Schubkräfte einander gleichsetzt, die in diesem Punkte durch die gleichmäßig vertheilte Belastung pl und durch die Einzellast K in O_1 erzeugt werden. Diese Gleichsetzung liefert:

$$p\left(\frac{l}{2} - o\right) = K\frac{o}{l},$$

woraus

$$o = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{K + pl} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

folgt. Dieses Maximalmoment in O ist dann

$$M_0 = \frac{p}{2}(l\,o - o^2) + K o\frac{l - o}{l} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Ebenso findet sich für die Stellung der Kraft K in C der Abstand $AD = d$ für den Querschnitt des Maximalmomentes durch

$$p\left(\frac{l}{2} - d\right) = K\,\frac{c}{l}$$

zu

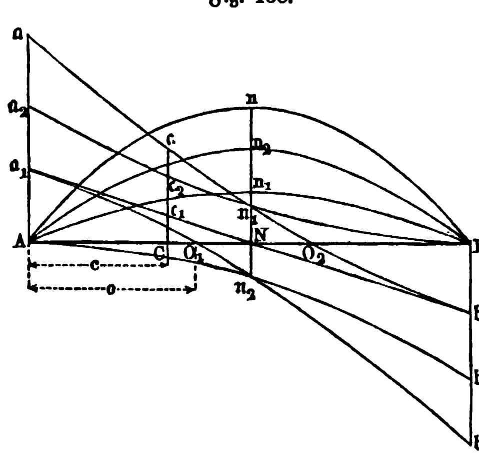
$$d = \frac{l}{2} - \frac{K}{pl}c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche Gleichung nach dem Vorstehenden nur für eine Größe von c gilt, die kleiner als o ist. Das Moment an dieser Stelle, im Abstande d von A, ist dann ausgedrückt durch

$$M_d = \frac{p}{2}(ld - d^2) + Kc\,\frac{l-d}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn die bewegliche Last ebenfalls als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte von der Größe k pro Längeneinheit anzusehen ist, so folgt aus dem Vorstehenden ohne Weiteres, daß in jedem Querschnitte des Balkens das größte Moment eintritt, sobald die bewegliche Last die ganze Trägerlänge bedeckt. Wenn man daher in Fig. 138 die beiden Parabeln An_1B und An_2B, deren Pfeilhöhen bezw. durch

Fig. 138.



$$Nn_1 = \frac{pl^2}{8}$$

und

$$Nn_2 = \frac{kl^2}{8}$$

gegeben sind, vereinigt, so erhält man in der resultirenden Parabel AnB, deren Pfeilhöhe $Nn = (p + k)\,\frac{l^2}{8}$ ist, die Curve für das Maximalmoment in jedem Querschnitte. Die größte Schubkraft in irgend einem Querschnitte C wird dagegen wieder stattfinden, wenn die Strecke BC mit der Last $k\,(l - c)$ bedeckt ist, und zwar erhält man die Curve $a\,n_1\,O_2\,b_1$ für die größten Schubkräfte durch Vereinigung der Geraden $a_1\,b_1$, welche dem Eigengewichte pl entspricht, mit der Parabel $a_2\,n_1\,B$, welche nach dem Vorstehenden die größten durch die bewegliche Last erzeugten Schubkräfte ergiebt, und deren Scheitel in B liegt, während die Ordinate in A zu

$A\,a_2 = k\,\frac{l}{2}$ gefunden wurde. Die Schubkraft in C bestimmt sich nach (4) zu

$$V = C\,c = C\,c_1 + C\,c_2 = p\left(\frac{l}{2} - c\right) + k\,\frac{(l-c)^2}{2\,l} \,.\,.\, (12)$$

In gleicher Weise erhält man für die größten negativen Schubkräfte die Curve $a_1\,O_1\,n_2\,b$ durch Vereinigung der Geraden $a_1\,b_1$ mit der Parabel $A\,n_2\,b_2$.

In Betreff der Lage des Maximalmomentes für eine bestimmte Laststellung und in Bezug auf die Verschiebung desselben aus der Mitte um $N\,O_1 = N\,O_2$, bei einer Ueberführung der Belastung über den Träger gelten ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie zuvor für eine Einzellast angeführt worden sind. Die Größe dieser Verschiebung nach jeder Seite $N\,O_1 = N\,O_2 = \frac{l}{2} - o$ bestimmt sich wieder durch Gleichsetzung der betreffenden entgegengesetzten Schubkräfte aus der Gleichung

$$p\left(\frac{l}{2} - o\right) = k\,\frac{o^2}{2\,l}$$

oder

$$o^2 + 2\,l\,\frac{p}{k}\,o = l^2\,\frac{p}{k}$$

zu

$$o = -\,l\,\frac{p}{k} + \sqrt{l^2\left(\frac{p}{k}\right)^2 + l^2\,\frac{p}{k}} = l\left(-n + \sqrt{n^2 + n}\right) \,.\, (8^a)$$

wenn das Verhältniß $\frac{p}{k}$ mit n bezeichnet wird, und man hat für die Größe des Momentes in diesem Punkte O, wenn die Last bis dahin vorgerückt ist, ähnlich wie oben:

$$M_0 = \frac{p}{2}\,(l\,o - o^2) + k\,\frac{o^2}{2\,l}\,(l - o) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (9^a)$$

Innerhalb der Strecke $O_1\,O_2$, in welcher bei der Bewegung der Last das Maximalmoment in der vorgedachten Art sich verschiebt, fällt die verticale Scheerkraft je nach der Stellung der Last bald positiv bald negativ aus, während in den Querschnitten der Strecke $O_1\,A$ stets nur positive (aufwärts gerichtete) und in denjenigen der Strecke $O_2\,B$ stets nur negative (abwärts wirkende) Schubkräfte auf das rechts von der Querschnittsebene gelegene Balkenstück wirken. In welcher Weise diese Eigenschaft auf die Construction des Balkens innerhalb dieser Strecke $O_1\,O_2$ von Einfluß ist, wird sich später aus der Betrachtung der Fachwerksträger ergeben.

Beispiel. Nimmt man für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke von $l = 32$ m das Eigengewicht der Brücke nach Schwedler (s. §. 34) zu $30\,l + 800 = 1760$ kg, also für jeden Träger 880 oder rund 900 kg pro Meter an, und setzt eine Ver-

kehrslast der Brücke von 5000 kg, also für jeden Träger $k = 2500$ kg voraus, so erhält man nach dem Vorstehenden folgende Resultate:

Das absolut größte Moment, welches sich in der Mitte des Trägers bei dessen voller Belastung einstellt, ist

$$M_{max} = (p + k)\frac{l^2}{8} = (0{,}9 + 2{,}5)\frac{32^2}{8} = 435{,}2 \text{ Metertonnen},$$

und die größte Scheerkraft beträgt in diesem Falle über den Stützen

$$V_{max} = \pm (p + k)\frac{l}{2} = 3{,}4 \,.\, 16 = 54{,}4 \text{ Tonnen}.$$

Die Entfernung o, bis auf welche sich das Maximalmoment beiderseits den Stützen in Folge der Lastbewegung nähert, beträgt nach (8a):

$$o = 32\left[-\frac{0{,}9}{2{,}5} + \sqrt{\left(\frac{0{,}9}{2{,}5}\right)^2 + \frac{0{,}9}{2{,}5}}\right] = 10{,}85 \text{ m}.$$

Die Verschiebung des größten Momentes beträgt daher nach jeder Seite von der Mitte

$$\frac{l}{2} - o = 16 - 10{,}85 = 5{,}15 \text{ m}.$$

Ist die Last um die Länge $o = 10{,}85$ m über ein Auflager vorgerückt, so hat das Moment in dem Querschnitte an dieser Stelle nach (9a) den Werth:

$$M_0 = \frac{p}{2}(l\,o - o^2) + k\frac{o^2}{2\,l}(l - o) = 0{,}45\,(32 \,.\, 10{,}85 - 10{,}85^2) + 2{,}5\,\frac{10{,}85^2}{64}\,21{,}15$$

$$= 103{,}275 + 97{,}237 = 200{,}5 \text{ Metertonnen}.$$

Dieser Werth ist natürlich kleiner als das dem Punkte O zukommende Maximalmoment bei voller Belastung des Trägers

$$max\ M_0 = \frac{p + k}{2}(l\,o - o^2) = 1{,}7\,(32 \,.\, 10{,}85 - 10{,}85^2)$$

$$= 390 \text{ Metertonnen}.$$

Die Schubkraft des Trägers in der Mitte, welche bei voller Belastung zu Null wird, nimmt dagegen für den Fall, daß die Last um die Größe o über eine Stütze vorgerückt ist, den Werth

$$V = \pm\, k\frac{o^2}{2\,l} = 2{,}5\,\frac{10{,}85^2}{64} = 4{,}6 \text{ Tonnen}$$

an. Die größte Schubkraft dagegen wird in der Mitte eintreten, wenn eine Hälfte der Brücke mit der Last bedeckt ist, und man hat hierfür nach (4):

$$V_{max} = \frac{k\,l}{8} = 2{,}5 \,.\, 4 = 10 \text{ Tonnen u. s. w.}$$

Balken auf mehreren Stützen. Wenn ein Balken auf mehr als zwei Stützen ruht, so sind die Auflagerreactionen in den einzelnen Stützpunkten aus den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht ohne Weiteres zu ermitteln, denn diese beiden Bedingungen für ein System paralleler Kräfte $\Sigma P = 0$ und $\Sigma M = 0$ gestatten nur die Ermittelung von zwei unbekannten Größen, genügen also zur Bestimmung der Auflagerreactionen §. 37.

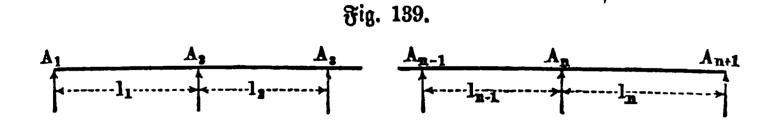
nur bei Balken auf zwei Stützen. Es sind daher bei beliebig vielen, etwa n Stützen, zu jenen beiden Gleichgewichtsbedingungen noch $n - 2$ Gleichungen erforderlich, wenn alle Auflagerreactionen und damit die Momente für alle Balkenquerschnitte bestimmt werden sollen. Diese Gleichungen lassen sich nur angeben, wenn man auf die Elasticitätsverhältnisse des Balkens, also auf dessen Biegung Rücksicht nimmt, während es unmöglich sein würde, die Auflagerdrücke für einen vollkommen starren, mehrfach gestützten Balken zu bestimmen. Man bedient sich zur Aufstellung der erforderlichen Bestimmungsgleichungen der von Navier aufgestellten Formel II^a in §. 35:

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

indem man durch zweimalige Integration dieser Gleichung für jede der $n - 2$ Zwischenstützen zu ebenso vielen Bestimmungsgleichungen gelangt, welche mit den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittelung der n unbekannten Reactionen dienen. Diese Rechnung, welche in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 für mehrere Beispiele durchgeführt worden ist, führt zwar in jedem Falle zum Ziele, doch ist sie für mehrere Stützen ziemlich weitläufig. Man wendet daher mit Vortheil die von Clapeyron*) angegebene Methode der Berechnung an, welche eine directe Beziehung zwischen den Momenten über drei auf einander folgenden Stützen ergiebt.

Es sei im Folgenden ein auf beliebig vielen Stützen $A_1, A_2, A_3 \ldots$, Fig. 139, frei aufliegender Balken vorausgesetzt, und es seien mit $l_1, l_2, l_3 \ldots$

Fig. 139.



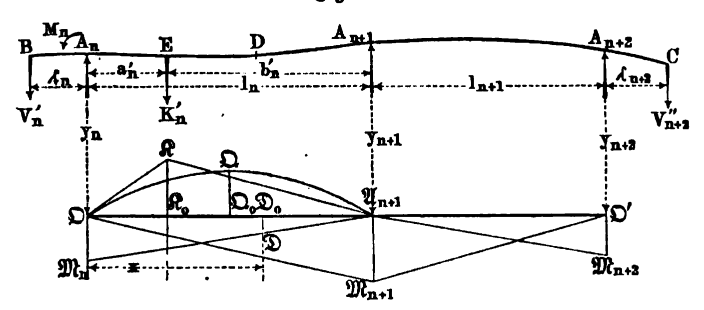
die horizontalen Entfernungen dieser Stützen von einander bezeichnet. Die verticalen Ordinaten dieser zunächst allgemein als in beliebiger Höhe liegend angenommenen Stützpunkte seien, auf eine willkürliche Horizontale bezogen, mit $y_1, y_2, y_3 \ldots$ bezeichnet. Jede der Strecken soll einer gleichmäßig vertheilten Belastung ausgesetzt sein, welche pro Längeneinheit bezw. $q_1, q_2, q_3 \ldots$ betragen möge, so daß also die $n$te Strecke zwischen A_n und A_{n+1} von der Länge l_n einer gleichmäßig vertheilten Belastung $Q_n = q_n l_n$ unterworfen ist. Außerdem möge der Balken noch einer beliebigen Anzahl concentrirter Belastungen K unterworfen sein, welche mit $K_1, K_2, K_3 \ldots$ u. s. w. bezeichnet werden, so daß z. B. die $n$te Strecke durch die Kräfte $K_n', K_n'' \ldots$

*) S. Comptes rendus, Dec. 1857.

angegriffen werden möge, deren Angriffspunkte bezw. um a_n', a_n'' ... von der Stütze A_n entfernt sind.

Dies vorausgeschickt, sei nun das Stück $A_n A_{n+1} A_{n+2}$, Fig. 140, des Balkens ins Auge gefaßt, welches die beiden Strecken l_n und l_{n+1} enthält.

Fig. 140.



Durch den Einfluß der links von A_n befindlichen Balkenstrecken und ihrer Belastungen wird in dem Querschnitte des Balkens, welcher unmittelbar vor der Stütze A_n in einem verschwindend kleinen Abstande ∂l gelegen ist, eine zweifache Wirkung hervorgerufen; es wird nämlich daselbst auf das Balkenstück A_n eine verticale Schubkraft und ein Drehungsmoment ausgeübt, welches etwa in der Richtung des Pfeiles auf das Balkenende A_n wirken möge. Bezeichnet man dieses Moment, welches wegen der unendlich kleinen Entfernung ∂l auch mit dem Momente über A_n übereinstimmt, mit M_n, und die verticale Schubkraft mit V_n', so kann man sich die Schubkraft V_n' und das Moment M_n zu einer Resultirenden V_n' vereinigt denken, welche in B in solchem Abstande λ_n von A_n wirkt, daß man

$$V_n' \lambda_n = M_n$$

hat. Es ist daher klar, daß man den links von A_n befindlichen Theil des Balkens ganz beseitigt denken kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern, vorausgesetzt nur, daß man den beseitigten Balkentheil durch die betreffende Verticalkraft V_n' im Abstande λ_n von A_n ersetzt. Die Größe dieser Kraft V_n' wird gefunden, wenn man die sämmtlichen Belastungen aller beseitigten Balkenstrecken $l_1, l_2, l_3 \ldots l_{n-1}$ addirt und die Summe aller Reactionen davon abzieht, mit welchen die Stützen $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ gegen den Balken aufwärts wirken. Bezeichnet man diese Reactionen mit $R_1, R_2, R_3 \ldots$, so hat man also für die Schubkraft V_n' den Ausdruck:

$$V_n' = l_1 q_1 + \Sigma K_1 + l_2 q_2 + \Sigma K_2 \ldots l_{n-1} q_{n-1} + \Sigma K_{n-1} \\ - (R_1 + R_2 \ldots R_{n-1}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

In derselben Weise kann man auch den rechts von A_{n+2} gelegenen Balkentheil fortgeschnitten denken, wenn man denselben ersetzt durch die in einem solchen Abstande $A_{n+2}C = \lambda_{n+2}$ wirkende Schubkraft V''_{n+2}, daß $V''_{n+2}\lambda_{n+2} = M_{n+2}$ ist, wenn unter M_{n+2} das Moment verstanden ist, welches durch den beseitigten Balkentheil in dem Querschnitte durch A_{n+2} erzeugt wird. Für die Größe der Schubkraft V''_{n+2} gilt ebenfalls die Gleichung (1), natürlich bezogen auf alle rechts von A_{n+2} liegenden Strecken des Balkens.

Unter der verticalen Schubkraft V in irgend einem Querschnitte soll hier immer diejenige Kraft verstanden werden, welche in diesem Querschnitte auf das rechts gelegene Balkenstück ausgeübt wird, und zwar soll wie bisher diese Kraft positiv angenommen werden, wenn sie aufwärts wirkt. Es ist daraus ersichtlich, daß die in einem beliebigen Querschnitte von dem rechts gelegenen Balkentheile auf den links gelegenen ausgeübte Einwirkung durch $-V$ sich ausdrückt. Wenn daher unmittelbar links neben einer Stütze A_n die Schubkraft durch V_n' und unmittelbar rechts davon durch V_n'' ausgedrückt ist, so ergiebt sich die Reaction R_n, mit welcher diese Stütze gegen den Balken wirkt, wegen des Gleichgewichts zwischen den drei Kräften V_n', R_n und $-V_n''$ durch die Gleichung

$$R_n + V_n' - V_n'' = 0$$

allgemein zu

$$R_n = V_n'' - V_n' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

in welcher Gleichung für V_n' und V_n'' in dem oben gedachten Sinne je nach der Richtung der Schubkraft ein positiver oder negativer Werth anzunehmen ist.

Man nehme nun eine Horizontale OO' als Abscissenaxe für ein rechtwinkeliges Coordinatensystem an, dessen Y-Axe durch A_n hindurchgeht, und bezeichne mit α den Winkel, welchen die elastische Linie des belasteten Balkens in irgend einem Punkte mit dem Horizonte bildet, so hat man für die elastische Linie allgemein:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\, \alpha = \alpha,$$

oder

$$\partial y = \alpha\, \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn man wegen der Kleinheit dieses Winkels α für $tg\, \alpha$ setzt. Mit Rücksicht hierauf schreibt sich nun die Navier'sche Gleichung:

$$M = TE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = TE\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{M}{TE} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Gleichung (3) giebt nach der bekannten Methode der theilweisen Integration, wonach

$$\int u \partial v = uv - \int v \partial u \text{ ist,}$$

$$y = \alpha x - \int x \partial \alpha = \alpha x - \int x \frac{\partial \alpha}{\partial x} \partial x,$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$y = \alpha x - \int \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Berechnet man diesen Werth zwischen den Grenzen $x = 0$ in A_n und $x = l_n$ in A_{n+1}, wofür entsprechend der Winkel $\alpha = \alpha_n$ und $\alpha = \alpha_{n+1}$ sowie $y = y_n$ und $y = y_{n+1}$ ist, so erhält man:

$$y_{n+1} - y_n = \alpha_{n+1} l_n - \int_0^{l_n} \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man denke sich nun ebenfalls für die $n + 1$ te Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ die Y-Axe durch A_{n+2} gelegt, so gilt auch hierfür die allgemeine Gleichung (5) und man hat für A_{n+2} die Werthe $x = 0$, $\alpha = \alpha_{n+2}$, und $y = y_{n+2}$, sowie für A_{n+1} ebenso $x = l_{n+1}$, $\alpha = - \alpha_{n+1}$ und $y = y_{n+1}$; daher erhält man zwischen diesen Grenzen aus (5):

$$y_{n+1} - y_{n+2} = - \alpha_{n+1} l_{n+1} - \int_0^{l_{n+1}} \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man das Trägheitsmoment T für alle Querschnitte des Balkens als constant voraus, so erhält man aus (6) und (7) durch Addition nach vorheriger Reducirung mit l_n und l_{n+1}:

$$TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right)$$
$$= - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} M x \partial x - \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} M x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Werthe der beiden Integrale sind nun leicht geometrisch zu deuten. Denkt man sich für jeden beliebigen Punkt des Balkens nämlich das daselbst wirkende Kraftmoment M ermittelt und in der oben besprochenen Weise nach einem beliebigen Momentenmaßstabe als Ordinate über der Abscissenaxe OO' aufgetragen, so erhält man, wie früher schon angegeben, die sogenannte Momentenfläche. Es ist dann $M \partial x$ der Flächeninhalt des unendlich kleinen Streifens von der Breite ∂x, welchen die beiden Ordinaten im

Abstande x und $x + \partial x$ vom Anfangspunkte O bezw. O', aus der Momentenfläche herausschneiden. Folglich ist $x M \partial x$ das statische Moment dieses Streifens, bezogen auf den Anfang der Coordinaten und daher drückt

$$\int_0^{l_n} M x \partial x$$

das statische Moment der über der Strecke $A_n A_{n+1}$ construirten Momentenfläche in Bezug auf A_n aus, und ebenso stellt

$$\int_0^{l_{n+1}} M x \partial x$$

das statische Moment der Momentenfläche über der Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ in Bezug auf A_{n+2} vor. Bezeichnet daher F den Inhalt einer solchen Momentenfläche und f den horizontalen Abstand ihres Schwerpunktes von dem betreffenden Stützpunkte A_n oder A_{n+2}, so kann man das Product Ff als den Werth des zugehörigen Integrals in (8) ansehen. Es kommt daher nur darauf an, die Momentenflächen für die beiden Strecken l_n und l_{n+1} zu bestimmen, und deren Schwerpunkte zu ermitteln. Das letztere kann ebensowohl durch Rechnung wie mit Hülfe der Zeichnung geschehen.

Die Bestimmung der Momentenflächen oder des Momentes M für jeden Balkenquerschnitt ist leicht vorzunehmen, wie die folgende Betrachtung lehrt. Das Moment M in irgend welchem Punkte D der Strecke $A_n A_{n+1}$ entspringt aus drei Wirkungen, nämlich aus denjenigen

1) der concentrirten Lasten K_n,
2) der gleichmäßig vertheilten Last $Q_n = q_n l_n$ und
3) der Momente M_n und M_{n+1}, welche in den Stützen A_n und A_{n+1} durch die daselbst sich anschließenden Balkentheile hervorgerufen werden. Nach dem Vorstehenden können diese Momente so angesehen werden, als ob sie durch die Schubkraft V_n' und bezw. $- V''_{n+1}$ erzeugt werden, welche in den betreffenden Abständen λ_n und λ_{n+1} von A_n und A_{n+1} angreifen.

Man hat also die Momentenfläche für die Strecke $A_n A_{n+1}$ genau so zu bestimmen, wie für einen Balken, der in A_n und A_{n+1} frei aufliegt, und durch die Kräfte K_n, Q_n, V_n' und $- V''_{n+1}$ angegriffen wird. Dies geschieht nach dem in §. 35 Gesagten wie folgt:

1. Eine Kraft K_n' in E im Abstande a_n' von A_n und b_n' von A_{n+1} veranlaßt (s. Fig. 125) in E ein Moment von der Größe

$$\mathfrak{K}\mathfrak{K}_0 = K_n \frac{a_n' \, b_n'}{l_n},$$

und das Dreieck $\mathfrak{D}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_{n+1}$ stellt danach die Momentenfläche vor. Der Inhalt derselben ist

$$F_n' = \frac{1}{2}\,\mathfrak{D}\mathfrak{A}_{n+1} \times \mathfrak{K}\mathfrak{K}_0 = \frac{1}{2}\,l_n\,\frac{a_n'\,b_n'}{l_n}\,K_n' = \frac{a_n'\,b_n'}{2}\,K_n'.$$

Der Schwerpunkt dieser Fläche hat, wie man aus der Figur leicht findet, von A_n den Abstand

$$f_n' = \frac{l_n}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{l_n}{2} - a_n'\right) = \frac{l_n + a_n'}{3},$$

folglich hat man für diese Momentenfläche das statische Moment in Bezug auf A_n

$$F_n' f_n' = a_n' b_n'\,\frac{l_n + a_n'}{6}\,K_n'.$$

Denkt man sich diesen Ausdruck für alle concentrirten Kräfte $K_n', K_n'' \ldots$ der Strecke l_n gebildet, und dies einfach durch das Summenzeichen Σ angedeutet, so ist

$$\Sigma\, a_n b_n\,\frac{l_n + a_n}{6}\,K_n = \mathfrak{K}_n \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

derjenige Theil des Integrals $\int_0^{l_n} M x\,\partial x$ der Gleichung (8), welcher von den concentrirten Belastungen der Strecke l_n herrührt. Ebenso würde

$$\Sigma\, a_{n+1} b_{n+1}\,\frac{l_{n+1} + b_{n+1}}{6}\,K_{n+1} = \mathfrak{K}_{n+1} \quad \ldots \quad (10)$$

dieselbe Bedeutung für die Strecke l_{n+1} in Bezug auf den Stützpunkt A_{n+2}, d. h. für das Integral $\int_0^{l_{n+1}} M x\,\partial x$ haben.

2. Der gleichförmig vertheilten Belastung $Q_n = q_n l_n$ entspricht nach §. 35 und Fig. 126 die Parabelfläche $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_{n+1}$, deren Scheitelordinate $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_0 = q_n \frac{l_n^2}{8}$ ist. Für diese Fläche hat man

$$F_n = \frac{2}{3}\,\mathfrak{D}\mathfrak{A}_{n+1} \times \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_0 = \frac{2}{3}\,l_n q_n\,\frac{l_n^2}{8} = q_n\,\frac{l_n^3}{12},$$

und da der Schwerpunkt in der Mitte liegt, ist hierfür

$$F f = q_n\,\frac{l_n^4}{24} = \mathfrak{Q}_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

derjenige Theil des Ausdrucks $\int_0^{l_n} M x\,\partial x$, welcher von der gleichförmig ver-

theilten Belastung der Strecke l_n herrührt. Für die Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ hat man ebenso

$$q_{n+1} \frac{l_{n+1}{}^4}{24} = \mathfrak{Q}_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

3. Die Kraft V_n', welche als Ersatz des linken Trägertheiles in A_n ein Moment $M_n = V_n' \lambda_n = \mathfrak{O}\mathfrak{M}_n$ erzeugt, ruft in D im Abstande x von A_n ein Moment

$$\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D} = \frac{l_n - x}{l_n} \mathfrak{O}\mathfrak{M}_n = \frac{l_n - x}{l_n} M_n$$

hervor, wie man sich ohne Weiteres überzeugt, wenn man sich $B A_n A_{n+1}$ als einen doppelarmigen Hebel vorstellt, an welchem die in B wirkende Kraft V_n' einen Gegendruck in A_{n+1} von der Größe

$$\frac{V_n' \lambda_n}{l_n} = \frac{M_n}{l_n}$$

hervorruft, der in D ein Moment

$$M_n \frac{l_n - x}{l_n}$$

erzeugt. Die von dem Momente M_n für die Strecke l_n veranlaßten Momente sind daher durch das Dreieck $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_n \mathfrak{A}_{n+1}$ dargestellt, dessen statisches Moment in Bezug auf A_n durch

$$\mathfrak{M}_n'' = \frac{1}{2} \mathfrak{O}\mathfrak{M}_n . l_n . \frac{1}{3} l_n = \frac{1}{6} M_n l_n^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ausgedrückt ist. In gleicher Weise stellt das Dreieck $\mathfrak{O}' \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+2}$ die Momentenfläche dar, welche den Einfluß des in A_{n+2} durch den rechtsseitigen Balkentheil ausgeübten Momentes M_{n+2} auf die Strecke l_{n+1} ergiebt, und man erhält das statische Moment dieser Fläche in Bezug auf A_{n+2} zu

$$\mathfrak{M}_{n+2}' = \frac{1}{2} \mathfrak{O}' \mathfrak{M}_{n+2} . l_{n+1} . \frac{1}{3} l_{n+1} = \frac{1}{6} M_{n+2} . l_{n+1}{}^2 \quad . \quad . \quad (14)$$

Wenn man ferner nach dem gewählten Momentenmaßstabe $\mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1} = M_{n+1}$ macht, so sind die beiden Dreiecke $\mathfrak{O} \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ und $\mathfrak{O}' \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ die Flächen für diejenigen Momente, welche durch das Moment M_{n+1} der Stütze A_{n+1} in den Strecken l_n und bezw. l_{n+1} hervorgerufen werden. Nun hat das Dreieck $\mathfrak{O} \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ in Bezug auf A_n das statische Moment

$$\mathfrak{M}_{n+1}' = \frac{1}{2} M_{n+1} . \frac{2}{3} l_n^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_n^2 \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

während das Dreieck $\mathfrak{O}' \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ in Bezug auf A_{n+2} das statische Moment

$$\mathfrak{M}''_{n+1} = \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_{n+1}^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_{n+1}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

hat. Man erhält daher aus (13) und (15) die Größe

$$\mathfrak{U}_n = \mathfrak{M}_n'' + \mathfrak{M}'_{n+1} = \frac{l_n^2}{6} (M_n + 2 M_{n+1}), \quad . \quad . \quad (17)$$

welche den von den Momenten in A_n und A_{n+1} herrührenden Theil des Integrals $\int_0^{l_n} M x \partial x$ vorstellt, wie ebenso die Summe von (14) und (16)

$$\mathfrak{U}_{n+1} = \mathfrak{M}''_{n+1} + \mathfrak{M}'_{n+2} = \frac{l_{n+1}^2}{6} (2 M_{n+1} + M_{n+2}) \quad . \quad (18)$$

den von den Stützmomenten M_{n+1} und M_{n+2} herrührenden Theil des Integrals $\int_0^{l_{n+1}} M x \partial x$ ergiebt.

Setzt man nunmehr die Werthe aus (9) bis (12), sowie (17) und (18) für die beiden Integrale der Gleichung (8) ein, so geht dieselbe über in:

$$TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) = - \frac{1}{l_n} (\mathfrak{K}_n + \mathfrak{O}_n + \mathfrak{U}_n)$$
$$- \frac{1}{l_{n+1}} (\mathfrak{K}_{n+1} + \mathfrak{O}_{n+1} + \mathfrak{U}_{n+1}) = - \left(\Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{6 l_n} K_n + q_n \frac{l_n^3}{24} \right.$$
$$\left. + \Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{6 l_{n+1}} K_{n+1} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}^3}{24} \right)$$
$$- \frac{l_n}{6} (M_n + 2 M_{n+1}) - \frac{l_{n+1}}{6} (2 M_{n+1} + M_n);$$

welche Gleichung sich auch schreiben läßt:

$$M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} =$$
$$- 6 TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) - \Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{l_n} K_n$$
$$- \Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{l_{n+1}} K_{n+1} - q_n \frac{l_n^3}{4} - q_{n+1} \frac{l_{n+1}^3}{4} \quad . \quad (19)$$

Wenn man in dieser Gleichung die concentrirten Lasten K wegläßt und ferner voraussetzt, daß sämmtliche Stützpunkte in einer Horizontalen liegen, d. h. daß $y_n = y_{n+1} = y_{n+2}$ ist, so erhält man die zuerst von Clapeyron aufgestellte Gleichung:

$$M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} = - \frac{q_n l_n^3 + q_{n+1} l_{n+1}^3}{4} \quad (20)$$

Die Gleichung (19) oder (20) gilt für jede Zwischenstütze eines auf beliebig vielen Stützen liegenden Trägers, man erhält daher bei n Stützen, also bei $n-2$ Zwischenstützen, $n-2$ Bedingungsgleichungen, welche zusammen mit den zwei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen genügen, um die Momente $M_1, M_2 \ldots M_n$ für die Stützpunkte zu berechnen.

Aus den so gefundenen Werthen der Momente in den Stützpunkten läßt sich dann auch das Biegungsmoment für jede beliebige Stelle des Trägers bestimmen, wie sich aus Folgendem ergiebt. Um für den beliebigen Punkt D im Abstande x von A_n das Moment M zu bestimmen, denkt man wieder den links von A_n befindlichen Balkentheil durch die Verticalkraft V_n' in solchem Abstande λ_n von A_n ersetzt, daß

$$V_n' \lambda_n = M_n$$

ist. Nimmt man zunächst an, daß in der Strecke l_n concentrirte Lasten K nicht vorhanden sind, so hat man für den Punkt D das Moment

$$M = V_n'(\lambda_n + x) + R_n x - q_n \frac{x^2}{2} = M_n + (R_n + V_n')\, x - q_n \frac{x^2}{2} \cdot \quad (21)$$

Für $x = l_n$ nimmt M den Werth M_{n+1} des Momentes über der Stütze A_{n+1} an, folglich hat man hierfür

$$M_{n+1} = M_n + (R_n + V_n')\, l_n - q_n \frac{l_n^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus (21) und (22) folgt durch Gleichsetzung der Werthe von $R_n + V_n'$ für das Moment M in dem beliebigen Abstande x von A_n:

$$M = M_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n}\, x + \frac{q_n}{2}(l_n x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Betrachtet man M als die Ordinate zur Abscisse x, so entspricht die Gleichung (23) einer Parabel mit verticaler Y-Axe, deren Scheitelabscisse x_0 sich dadurch bestimmt, daß für den Scheitel die Tangente horizontal ausfällt, also $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$ ist. Hiernach erhält man aus (23) diese Abscisse x_0 durch

$$0 = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2} - q_n x_0$$

zu

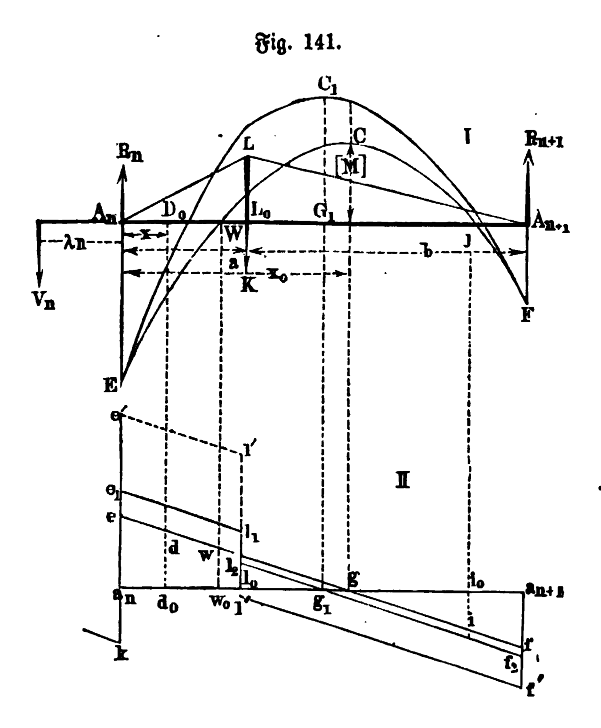
$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Setzt man diesen Werth von x_0 in (23) ein, so ergiebt sich das größte Moment zwischen den Stützen A_n und A_{n+1}, welches durch $[M_n]$ bezeichnet werden soll, zu:

$$[M_n] = M_n + \frac{q_n}{2}\left(\frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n}\right)^2 = M_n + q_n \frac{x_0^2}{2} \quad . . . (25)$$

Zeichnet man diese Parabel ECF, Fig. 141, für welche man außer den durch (24) und (25) bestimmten Ordinaten x_0 und $[M]$ des Scheitels C noch die beiden Punkte E und F durch ihre Ordinaten $A_n E = M_n$ und $A_{n+1} F = M_{n+1}$ kennt, so erhält man in der Fläche $A_n E C F A_{n+1}$ ein

Fig. 141.



deutliches Bild von der Inanspruchnahme der Strecke l_n durch biegende Momente. In W und J ist das Moment gleich Null, so daß die elastische Linie daselbst Wendepunkte zeigt, zu deren beiden Seiten der Balken nach den entgegengesetzten Richtungen gebogen wird.

Auch die Größe der Vertical- oder Scheerkraft ist leicht für jeden Punkt des Trägers zu bestimmen, wenn man mit Hülfe der Clapeyron'schen Formel (20) oder (19) die Momente über den Stützen gefunden hat. Für den beliebigen Punkt D_0 im Abstande $A_n D_0 = x$ von der Stütze A_n ist nach der Figur die verticale Schubkraft V gegeben durch die Gleichung:

$$V = V_n'' - q_n x = R_n + V_n' - q x \quad . . . . (26)$$

Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch durch Differentiation der Gleichung (21), wodurch man erhält

$$\frac{\partial M}{\partial x} = R_n + V_n' - q_n x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

entsprechend der schon früher angegebenen allgemeinen Beziehung:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Betrachtet man, um auch die Schubkraft graphisch darzustellen, V als die Ordinate, so erkennt man aus der Gleichung (26), welche eine gerade Linie darstellt, daß die Gerade egf, Fig. 141 II, für jeden Punkt die Größe von V ergiebt, wenn man

$$a_n e = R_n + V_n' = V_n''$$

macht, und die Linie ef unter einem Winkel γ gegen die Axe $a_n a_{n+1}$ zieht, für welchen man aus (26) durch Differentiation erhält

$$tg\,\gamma = \frac{\partial V}{\partial x} = -q_n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Der Durchschnitt g, für welchen die Schubkraft zu Null wird, hat nach dem Vorstehenden (24) die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n},$$

welche dem Maximum des Momentes $[M]$ entspricht.

Noch eine bemerkenswerthe Beziehung ergiebt sich, wenn man die Gleichung (28), $V \partial x = \partial M$ zwischen den Grenzen x und 0 integrirt; man erhält dann

$$M - M_n = \int_0^x V \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Da das Integral die Fläche $a_n e d d_0$ des Schubkraftdiagramms zwischen $x = 0$ für A_n und $x = A_n D_0$ bedeutet, so folgt hieraus, daß das Stück dieser Fläche zwischen irgend zwei Ordinaten als Maß für die Zunahme des Momentes M zwischen denselben Ordinaten angesehen werden kann. Es stellt daher beispielsweise das Trapez $a_n w_0 w e$ nach demselben Maßstabe das Moment M_n über der Stütze A_n vor, nach welchem das Moment $[M]$ in G durch das Dreieck $g w_0 w$ oder das ebenso große $g i_0 i$ ausgedrückt ist, und nach welchem das Trapez $a_{n+1} i_0 i f$ die Größe des Momentes M_{n+1} über der Stütze A_{n+1} ergiebt.

Man erkennt aus der Figur auch die plötzliche Veränderung der Schubkraft V in den Stützpunkten. Während unmittelbar links von der Stütze

A_n, in unmeßbar kleinem Abstande davon, die auf das rechte Balkenstück abwärts gerichtete (negative) Schubkraft durch $V_n' = a_n k$ dargestellt ist, wird durch die Wirkung der in A_n vertical aufwärts wirkenden Auflagerreaction $R_n = k e$ unmittelbar rechts von A_n eine aufwärts wirkende (positive) Schubkraft auf das Balkenstück rechts ausgeübt von der Größe $a_n e = R_n + V_n' = V_n''$ [vergl. (2)]. Da also auch über dem Pfeiler die Schubkraft durch Null geht, so muß auch hier das Moment einen Maximalwerth annehmen, wenigstens so lange, als die Stütze A_n überhaupt einen Druck R_n auf den Balken ausübt, d. h. so lange der Balken daselbst wirklich aufruht und nicht etwa durch die Wirkung der übrigen Strecken ein Abheben des Balkens über dieser Stütze stattfindet.

Um endlich die Reaction R irgend einer Stütze zu finden, hat man aus (22) für die Stütze A_n:

$$R_n + V_n' = V_n'' = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2},$$

und ebenso für die Stütze A_{n+1}:

$$R_{n+1} + V_{n+1}' = V_{n+1}'' = \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}}{2}.$$

Nun ist aber

$$V_{n+1}' = V_n'' - q_n l_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} - q_n \frac{l_n}{2},$$

und daher folgt nach (2):

$$R_{n+1} = V_{n+1}'' - V_{n+1}'$$
$$= \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + \frac{q_n l_n + q_{n+1} l_{n+1}}{2} \quad (31)$$

Nach dem Vorstehenden kann man nunmehr auch den Einfluß beurtheilen, welchen concentrirte Belastungen K auf die Größe des Momentes und der Schubkraft an jeder Stelle ausüben. Es sei etwa in L_0, Fig. 141, im Abstande a von A_n und b von A_{n+1} eine Last K wirkend, so vergrößert dieselbe in A_n den Stützendruck und also auch die Auflagerreaction R_n um $K \frac{b}{l_n}$. Die Schubkraft V_n'' ist daher um diesen Werth $K \frac{b}{l} = e e_1$ größer geworden. Da dieselbe Vergrößerung für alle Punkte zwischen A_n und L_0 gilt, so wird das Diagramm für die Schubkraft durch die Gerade $e_1 l_1$ dargestellt sein, welche durch e_1 parallel zu $e f$, also unter dem Winkel $\gamma = arc\, tg\, q_n$, gegen die Horizontale gelegt wird. In L_0 ändert sich dann die Schubkraft plötzlich um den Betrag $K = l_1 l_2$, und wenn man durch l_2 eine Parallele $l_2 f_2$ mit $e f$ zieht, so erhält man in deren Ordinaten die Schubkräfte zwischen L und A_{n+1}. In dem letztgenannten Punkte ist

die Schubkraft V'_{n+1} um das (negative) Stück ff_2 größer geworden, welches nach der Construction sich zu

$$l_1 l_2 - e_1 e = K - K\frac{b}{l} = K\frac{a}{l}$$

ergiebt, wie es dem Gesetze des Hebels auch entspricht.

Trägt man ferner in L_0 die Ordinate $L_0 L = K\frac{a\,b}{l_n}$ auf, so erhält man in dem Dreiecke $A_n L A_{n+1}$ bekanntlich die Momentenfläche, welche der Belastung durch K allein entspricht, und es ist dann leicht, durch algebraische Summirung der Ordinaten der Parabel ECF und des Dreiecks $A_n L A_{n+1}$ die resultirende Momentenfläche EC_1F zu erhalten. Es ergiebt sich aus dem Vorhergegangenen, daß dem Scheitel C_1 dieser resultirenden Curve dieselbe Abscisse $A_n G_1$ zukommen muß, wie dem Punkte g_1, in welchem die Axe $a_n a_{n+1}$ von der Begrenzung $e_1 l_1 l_2 f_2$ getroffen wird, d. h. in welchem die Schubkraft zu Null wird. Hieraus folgt auch, daß es ganz von der Größe der Kraft K abhängen wird, ob das Maximalmoment $[M]$ zwischen den Stützen in dem Angriffspunkte L_0 der Kraft K, oder zwischen L_0 und G auftreten wird. Den in der Figur zu Grunde gelegten Verhältnissen gemäß findet sich dieses Maximum von M in dem Punkte g_1 zwischen g und l_0, es ist aber deutlich, daß bei einem vergrößerten K, welchem etwa das Schubkraftdiagramm $a_n e' l' l'' f'' a_{n+1}$ entspricht, das größte oder Bruchmoment der Strecke mit dem Angriffspunkte L_0 der concentrirten Last zusammenfällt.

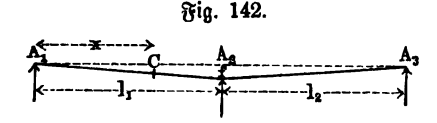
Die Wirkung einer concentrirten Belastung K veranlaßt also, ebenso wie die Reaction einer Stütze eine plötzliche Veränderung der Scheerkraft, und man kann daher einen durch concentrirte Belastungen angegriffenen Balken auch wie einen Träger auffassen, für welchen diese Belastungen als Stützpunkte betrachtet werden, die den Balken von oben nach unten mit den Reactionskräften K angreifen. Man hat dann die allgemeine Formel (19) anzuwenden, indem man für die Reactionen in den Kraftangriffen diese Kräfte K einführt und die Größen $y_{n+1} - y_n$ rc. mit Rücksicht auf die erzeugten Durchbiegungen in Rechnung stellt.

Um die Anwendung der vorstehend entwickelten Formeln zu zeigen, sollen in den folgenden Paragraphen einige der am häufigsten vorkommenden Unterstützungsarten von Trägern näher untersucht werden.

§. 38. **Balken auf drei Stützen.** Der Balken liege auf den drei Stützen A_1, A_2 und A_3, Fig. 142, frei auf und sei über der Länge $A_1 A_2 = l_1$ mit q_1 und über der Länge $A_2 A_3 = l_2$ mit q_2 pro Längeneinheit belastet. Concentrirte Lasten sollen zunächst nicht angenommen werden, und es möge

vorausgesetzt werden, daß die Endstützen A_1 und A_3 in gleicher Höhe liegen, wie dies in der Praxis wohl fast immer der Fall sein wird. Die mittlere Stütze A_2 jedoch soll der Allgemeinheit wegen um die Größe f tiefer liegend angenommen werden, als die beiden Endauflager. Es soll ferner von der Breite der Auflagerflächen abgesehen und vorausgesetzt werden, daß der Auflagerdruck sich in einem Punkte, etwa in der Mitte der Auflagerbreite concentrire, wobei bemerkt werden kann, daß der durch diese Annahme veranlaßte Fehler um so geringer sein wird, je größer die lichten Oeffnungen sind.

Fig. 142.



Für den hier vorausgesetzten Fall hat man nach den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen die Momente über den freien Auflagern in A_1 und A_3

$$M_1 = M_3 = 0,$$

ebenso

$$V_1' = 0 \text{ und } V_3'' = 0.$$

Ferner ist

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_3 = -f,$$

und daher findet sich das Moment M_2 über der Zwischenstütze A_2 nach (19) des vorigen Paragraphen aus

$$0 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + 0 = 6 TE \left(\frac{f}{l_1} + \frac{f}{l_2}\right) - q_1 \frac{l_1^3}{4} - q_2 \frac{l_2^3}{4}$$

zu

$$M_2 = -\frac{1}{8} \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^2}{l_1 + l_2} + 3 TE \frac{f}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$$

$$= -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L} + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn $l_1 + l_2 = L$ und $3 TE \frac{f}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = \varepsilon$ gesetzt wird.

Ferner ist nach (22) des vorigen Paragraphen

$$M_2 = 0 + (R_1 + 0)\, l_1 - q_1 \frac{l_1^2}{2};$$

folglich erhält man hieraus und aus (1) die Auflagerreaction in A_1 zu

$$R_1 = -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und analog durch Vertauschung von l_1 und l_2 für die andere Endstütze A_3:

$$R_3 = -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_2 L} + q_2 \frac{l_2}{2} + \frac{\varepsilon}{l_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und daher den Druck der Mittelstütze:

$$R_2 = q_1 l_1 + q_2 l_2 - (R_1 + R_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Das Moment M für irgend einen Punkt C der Strecke $A_1 A_2$ im Abstande $A_1 C = x$ von A_1 erhält man zu:

$$M = R_1 x - q_1 \frac{x^2}{2} = \left(-\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1}\right) x$$

$$- q_1 \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Den größten Werth von M findet man nach (24) für die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} = \frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1} \quad . \quad . \quad (6)$$

und zwar wird dieses Maximum nach (25) gleich

$$[M_1] = \frac{q_1}{2} \left(\frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Gleichungen (5) bis (7) gelten natürlich auch für die Strecke $A_3 A_2$, wenn man darin l_1 mit l_2 und q_1 mit q_2 vertauscht und x von A_3 nach A_2 hin rechnet.

Für gleiche Weite und Belastungen, also für $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ und $q_1 = q_2 = q$, und für gleiche Höhenlage aller Stützen, also mit $f = \varepsilon = 0$, erhält man die schon in Thl. I angegebenen Werthe:

$$M_2 = -\frac{1}{32} q L^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

$$R_1 = \frac{3}{16} q L = R_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

$$R_2 = \frac{5}{8} q L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

$$M = \frac{3}{16} q L x - q \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^a)$$

$$x_0 = \frac{3}{16} L = \frac{3}{8} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6^a)$$

$$[M] = -\frac{9}{32.16} q L^2 = \frac{9}{512} q L^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^a)$$

Diese Belastungsart ist offenbar übereinstimmend mit der in §. 35 unter (8) angegebenen, denn man kann sich denken, der Träger sei hier zur Hälfte

$A_1 A_2$ horizontal eingemauert, man erhält daher die in §. 35 angegebenen Formeln, wenn man hier $2l$ für L einsetzt.

Die hier gefundenen Gleichungen können auch für Brückenträger gebraucht werden, welche über zwei Oeffnungen gelegt sind, also auf drei Stützpunkten frei aufruhen, da man die Belastung derselben in der Regel als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen darf.

Nimmt man auch hier, wie es in der Wirklichkeit meistens zutreffen wird, die Oeffnungen von gleicher Weite, also $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ an, so erhält man nach (1) das Moment über der Zwischenstütze

$$M_2 = -\frac{q_1 L^3 + q_2 L^3}{8 . 8 L} + \varepsilon = -\frac{L^2}{64}(q_1 + q_2) + \varepsilon \quad . \quad (1^b)$$

und die Auflagerreaction in A_1 nach (2) zu

$$R_1 = \frac{L}{32}(7 q_1 - q_2) + \frac{2 \varepsilon}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^b)$$

und in A_3 entsprechend

$$R_3 = \frac{L}{32}(7 q_2 - q_1) + \frac{2 \varepsilon}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^b)$$

Daher ist der Druck der mittleren Stütze gegen den Balken:

$$R_2 = \frac{L}{2}(q_1 + q_2) - R_1 - R_3 = \frac{L}{16}(5 q_1 + 5 q_2) - \frac{4 \varepsilon}{L} \quad (4^b)$$

Das größte Moment zwischen A_1 und B_1 findet sich nach (6) in einem Abstande x_0 von A_1

$$x_0 = \frac{L}{4} + \frac{2 M_2}{L q_1} = \frac{L}{32} \frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + \frac{2 \varepsilon}{L q_1}$$

$$= \frac{L}{32}\left(\frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2 q_1}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6^b)$$

und zwar ist dieses Moment nach (7):

$$[M_1] = \frac{q_1}{2}\left[\frac{L}{32}\left(\frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2 q_1}\right)\right]^2$$

$$= \frac{L^2}{2 . 32 . 32 q_1}\left(7 q_1 - q_2 + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^b)$$

Man erkennt aus (1^b), daß das Moment M_2 über der Zwischenstütze sowohl mit einer Vergrößerung von q_1 wie q_2 an Größe zunimmt, und man erhält daher den größten Werth dieses Momentes, wenn beide Oeffnungen mit der größten Belastung beschwert sind. Die Belastung einer Brücke besteht nun aus deren Eigengewichte p und der zufälligen oder Verkehrslast k, und es möge die Summe beider Belastungen pro Längen-

einheit durch $q = p + k$ ausgedrückt sein. Man erhält alsdann das größte Moment über der Mittelstütze, wenn beide Oeffnungen mit der zufälligen Belastung k bedeckt sind, also für $q_1 = q_2 = q$, zu

$$M_{2\,max} = -\frac{L^2}{32}q + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Das größe Moment $[M_1]$ dagegen zwischen A_1 und A_2 wächst, wie aus (7^b) folgt, zwar ebenfalls mit q_1, nimmt aber mit zunehmendem q_2 ab, woraus man schließt, daß $[M_1]$ seinen Maximalwerth annimmt, wenn die Oeffnung $A_1 A_2$ mit der möglich größten Belastung $k + p = q$ und die jenseitige Oeffnung $A_2 A_3$ mit der thunlich kleinsten Belastung, d. h. nur mit dem Eigengewichte p beschwert ist. Danach erhält man also

$$[M_1]_{max} = \frac{L^2}{2.32.32\,q}\left(7q - p + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2}\right)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Vergleicht man diese beiden Werthe von $M_{2\,max}$ und $[M_1]_{max}$, welche den ungünstigsten Belastungen entsprechen, so erkennt man, daß die Größe ε also die Senkung f der mittleren Stütze auf beide Momente in entgegengesetzter Weise wirkt, indem nämlich eine Vergrößerung dieser Senkung f oder des Werthes

$$\varepsilon = 3\,TE\,\frac{f}{L}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = 12\,TE\,\frac{f}{L^2}$$

das (negative) Moment M_2 über der Mittelstütze dem absoluten Werthe nach verringert, dagegen dasjenige $[M_1]$ in der Oeffnung vergrößert.

Es ist daraus ersichtlich, daß es eine gewisse Senkung s der mittleren Stütze unterhalb der äußeren Auflager geben wird, bei welcher die beiden Momente $M_{2\,max}$ und $[M_1]_{max}$ von gleicher absoluter Größe sind, und eine solche Anordnung wird die vortheilhafteste sein, insofern, als dann das größte vorkommende Moment den kleinstmöglichen Werth annimmt. Um diese Senkung s zu ermitteln, hat man nur die beiden absoluten Werthe von $M_{2\,max}$ und $[M_1]_{max}$ einander gleich zu setzen und erhält also:

$$\frac{L^2}{32}q - \varepsilon = \frac{L^2}{2.32.32\,q}\left(7q - p + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2}\right)^2 .$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\frac{L^2}{32}q$ und setzt der Kürze wegen das Verhältniß der Belastungen

$$\frac{p}{q} = v \text{ und } u = \frac{32\,\varepsilon}{L^2 q} = \frac{32.12\,TEf}{L^4 q}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

so erhält man

$$1 - u = \frac{1}{64}(7 - v + 2u)^2,$$

woraus

$$u^2 + (23 - v)\, u = \frac{15 - v^2 + 14\, v}{4}$$

oder

$$u = \frac{v - 23 + \sqrt{544 - 32\, v}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

folgt.

Da $u = \frac{384\, TE}{L^4 q} f$ gesetzt war, so ergiebt sich die nöthige Senkung f der Mittelstütze für den Fall gleicher Momentenmaxima zu

$$f_0 = \frac{L^4 q}{384\, TE}\, u = \frac{L^4 q}{768\, TE} \left(v - 23 + \sqrt{544 - 32\, v}\right), \quad (12)$$

und zwar ist das Moment in diesem Falle sowohl über der Mittelstütze bei ganzer Belastung als in der einen Oeffnung, wenn nur diese belastet ist, nach (8):

$$- M_{2\,max} = [M_1]_{max} = \frac{L^2 q}{32} - \varepsilon = \frac{L^2 q}{32} (1 - u) \; . \; . \; (13)$$

Da das Maximalmoment M_2 ohne Senkung der Mittelstütze $\frac{L^2 q}{32}$ ist, so giebt also der Werth u zugleich an, um welchen Procentsatz das Maximalmoment M_2 durch die Senkung vermindert wird.

Die Größe u hängt nach (11) wesentlich von dem Verhältnisse $v = \frac{p}{q}$ der specifischen Belastungen ab, und ist nach (11) die folgende kleine Tabelle berechnet worden.

$v = \frac{p}{q}$	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1
$u =$	0,162	0,177	0,193	0,208	0,239	0,277	0,314

Der Werth $u = 0{,}162$, entsprechend dem Verhältnisse $v = 0$, würde danach für Träger gelten, deren Eigengewicht p gegen die zufällige Belastung verschwindet, also für kleine Spannweiten, während der Werth von $u = 0{,}314$ für $v = 1$ solchen Trägern zukommt, gegen deren Eigengewicht die zufällige Last unerheblich ist, welche also stets über der ganzen Länge von der gleichen Belastung $p = q$ angegriffen werden. Diese Zahl stimmt mit der in Thl. I, §. 241 für einen Balken mit gleichmäßig vertheilter Belastung gefundenen überein.

Der Vortheil, welcher mit einer Senkung der Mittelstütze verbunden ist,

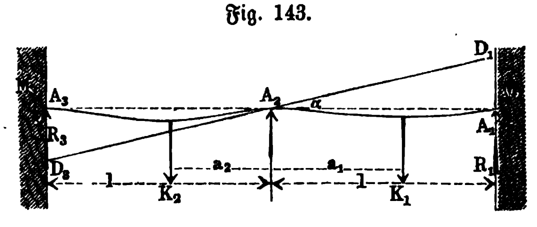
wurde zuerst von Köpcke*), Grashof**) und Scheffler***) gezeigt, die hier gegebene Darstellung schließt sich wesentlich an die Arbeit von Mohr†) an, welcher zuerst darauf aufmerksam gemacht hat, daß bei der Vergleichung der Maximalmomente M_2 und $[M_1]$ die denselben zugehörigen ungünstigsten Belastungen des ganzen Trägers und bezw. nur der einen Oeffnung in Betracht kommen müssen.

Eine besondere Betrachtung verdient der bei Hochbauconstructionen häufiger vorkommende Fall, in welchem ein in der Mitte durch eine Säule unterstützter Träger oder Unterzug an den Enden nicht frei aufliegt, sondern eingemauert ist, so daß man eine horizontale Richtung der elastischen Linie an diesen Enden voraussetzen darf. Wenn hierbei der Balken zu beiden Seiten der Mittelstütze symmetrisch belastet ist, so muß auch über dieser mittleren Stütze die elastische Linie horizontal sein, und es kommt die Belastungsweise auf die in §. 35 unter (5) und (6) besprochene hinaus. Man kann nämlich dann jede Hälfte des Balkens als einen an beiden Enden horizontal eingeklemmten Balken ansehen, und auf jede dieser Hälften die in §. 35 angeführten Formeln anwenden.

Wenn indessen die Belastungen nicht symmetrisch zur Mittelstütze vertheilt sind, wie es z. B. bei den Unterzügen unter Fabrikräumen oft vorkommt, wo die Gewichte der einzelnen Arbeitsmaschinen als isolirte Lasten auftreten, welche nicht nothwendig symmetrisch zur Mittelstütze angebracht sind, so wird über der letzteren die elastische Linie des Balkens auch nicht horizontal bleiben, und es möge dieser Fall einer besonderen Untersuchung unterworfen werden.

Es sei $A_1 A_3$, Fig. 143, ein solcher, bei A_1 und A_3 horizontal eingemauerter Träger von der Länge $2\,l$, welcher in der Mitte auf einer Säule

Fig. 143.



ruht, deren Stützlager A_2 in gleicher Höhe mit den Endauflagern A_1 und A_3 angenommen werden soll. Der Träger soll einer gleichmäßig ver-

*) Zeitschr. des Archit. u. Jng.-Ver. f. Hannover, Bd. II, 1856.
**) Zeitschr. des Ver. deutsch. Jng. 1857.
***) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken. 1857.
†) Zeitschr. des Archit. u. Jng.-Ver. f. Hannover. 1860.

theilten Belastung ausgesetzt sein, welche zwar in der Wirklichkeit meist für beide Strecken von gleichem Betrage pro Längeneinheit sein wird, hier aber der Allgemeinheit wegen mit q_1 und q_2 für jeden Meter Länge angenommen werden soll. Von den isolirten Kräften K ist in der Figur in jeder Strecke nur eine Kraft K_1 und bezw. K_2 angedeutet, und es soll auch für diese nur die Rechnung geführt werden, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, denn bei einer beliebig großen Anzahl concentrirter Belastungen in einer Strecke hat man diese Kräfte sämmtlich in übereinstimmender Art in die Rechnung einzuführen. Die Kräfte K_1 und K_2 mögen die Abstände a_1 und a_2 von dem mittleren Stützpunkte A_2 haben, welcher letztere als der Anfang rechtwinkeliger Coordinaten mit der horizontalen X-Axe $A_1 A_2 A_3$ angesehen wird. Der Unterschied zwischen diesem Falle und dem in Fig. 142 dargestellten eines auf drei Stützen frei aufliegenden Balkens besteht darin, daß die Momente über den Endstützen A_1 und A_3 hier nicht mehr gleich Null sind, sondern gewisse von vornherein noch unbekannte Werthe M_1 und M_3 haben. Es mögen R_1 und R_3 wieder die Auflagerreactionen in A_1 und A_3 sein, so hat man diese und die besagten Momente M_1 und M_3 mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die elastische Linie in A_1 und A_3 horizontal gerichtet ist, und daß die Stützpunkte A_1 und A_3 mit A_2 in gleicher Höhe liegen.

Bezeichnet man daher mit α den Winkel, unter welchem die elastische Linie in A_2 gegen den Horizont geneigt ist, so müssen die auf jede Hälfte A_2A_1 und A_2A_3 wirkenden Kräfte eine Biegung an den Enden im Winkelbetrage ebenfalls von α hervorbringen, da diese Enden horizontal gerichtet sind. Außerdem müssen aber die Enden aus der Richtung $D_1 D_3$ der Tangente in A_2 um die Größe $D_1 A_1 = D_3 A_3 = l\alpha$ gesenkt resp. gehoben werden. Um diese Bedingungen durch Gleichungen auszudrücken, hat man nur zu beachten, daß die Neigung β und die Senkung f eines Balkens von der Länge l an seinem Ende bezw. ausgedrückt ist durch:

$$1)\quad TE.\beta = q\frac{l^3}{6} \text{ und } TE.f = q\frac{l^4}{8},$$

bei Vorhandensein einer gleichmäßig vertheilten Belastung ql;

$$2)\quad TE.\beta = Ml \text{ und } TE.f = M\frac{l^2}{2},$$

bei Einwirkung eines Kräftepaares vom Momente M, und

$$3)\quad TE.\beta = K\frac{a^2}{2}, \text{ bezw.}$$

$$TE.f = K\frac{a^3}{3} + K\frac{a^2}{2}(l-a) = Ka^2\frac{3l-a}{6},$$

bei der Wirkung einer concentrirten Kraft K am Hebelarme a (vergl. Thl. I, §. 236 bis §. 239).

Mit Rücksicht hierauf hat man nun für die Hälfte $A_2 A_1$ die beiden Bedingungen:

$$TE.\alpha = q_1 \frac{l^3}{6} + K_1 \frac{a_1^2}{2} + M_1 l - R_1 \frac{l^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und

$$TE.l\alpha = q_1 \frac{l^4}{8} + K_1 a_1^2 \frac{3l - a_1}{6} + M_1 \frac{l^2}{2} - R_1 \frac{l^3}{3} \quad . \quad . \quad (15)$$

Wenn man daher die Gleichung (15) nach vorheriger Division durch l von (14) subtrahirt, wird

$$q_1 \frac{l^3}{24} + K_1 \frac{a_1^3}{6\,l} + M_1 \frac{l}{2} - R_1 \frac{l^2}{6} = 0,$$

oder

$$R_1 = q_1 \frac{l}{4} + K_1 \frac{a_1^3}{l^3} + 3 \frac{M_1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ganz in derselben Weise erhält man für die andere Balkenstrecke $A_2 A_3$, wenn man $-\alpha$ für α einführt:

$$-TE.\alpha = q_2 \frac{l^3}{6} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + M_3 l - R_3 \frac{l^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14^a)$$

$$-TE.l\alpha = q_2 \frac{l^4}{8} + K_1 a_2^2 \frac{3l - a_2}{6} + M_3 \frac{l^2}{2} - R_3 \frac{l^3}{3} \quad . \quad (15^a)$$

$$R_3 = q_2 \frac{l}{4} + K_2 \frac{a_2^3}{l^3} + 3 \frac{M_3}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16^a)$$

Durch Addition von (14) und (14ª) erhält man nun, wenn man aus (16) und (16ª) die Werthe von R_1 und R_3 einführt:

$$\frac{q_1 + q_2}{6} l^3 + K_1 \frac{a_1^2}{2} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + (M_1 + M_3)\, l = (R_1 + R_3) \frac{l^2}{2}$$

$$= \frac{q_1 + q_2}{8} l^3 + K_1 \frac{a_1^3}{2\,l} + K_2 \frac{a_2^3}{2\,l} + 3 \frac{M_1 + M_3}{2} l,$$

woraus sich

$$M_1 + M_3 = \frac{q_1 + q_2}{12} l^2 + K_1 a_1^2 \frac{l - a_1}{l^2} + K_2 a_2^2 \frac{l - a_2}{l^2} \quad . \quad . \quad (17)$$

ergiebt.

Eine zweite Beziehung zwischen M_1 und M_3 findet sich aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung, wonach die Momentensumme aller Kräfte der einen Hälfte in Bezug auf A_2 gleich derjenigen für die andere Balkenhälfte und zwar gleich dem Momente M_2 über der mittleren Stütze sein muß. Demgemäß ist

$$q_1 \frac{l^2}{2} + K_1 a_1 + M_1 - R_1 l = M_2 = q_2 \frac{l^2}{2} + K_2 a_2 + M_3 - R_3 l, \quad \ldots \ldots (18)$$

woraus man, wenn für R_1 und R_3 die Werthe aus (16) gesetzt werden:

$$q_1 \frac{l^2}{4} + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{l^2} - 2 M_1 = q_2 \frac{l^2}{4} + K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{l^2} - 2 M_3$$

folgt, so daß man nun erhält:

$$M_1 - M_3 = \frac{q_1 - q_2}{8} l^2 + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{2 l^2} - K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{2 l^2} \quad . . (19)$$

Man erhält dann schließlich aus (17) und (19) durch Addition:

$$M_1 = \frac{5 q_1 - q_2}{48} l^2 + K_1 \frac{a_1 l^2 + 2 a_1^2 l - 3 a_1^3}{4 l^2} + K_2 \frac{2 a_2^2 l - a_2 l^2 - a_2^3}{4 l^2} \quad \ldots (20)$$

und durch Subtraction:

$$M_3 = \frac{5 q_2 - q_1}{48} l^2 + K_2 \frac{a_2 l^2 + 2 a_2^2 l - 3 a_2^3}{4 l^2} + K_1 \frac{2 a_1^2 l - a_1 l^2 - a_1^3}{4 l^2} \quad \ldots (21)$$

Würde man diese Werthe für M_1 und M_2 in (16), (16ᵃ) und (18) einsetzen, so erhielte man allgemeine Ausdrücke für die Reactionen R_1 und R_3, sowie für das Moment M_2 über der Mittelstütze. Der Auflagerdruck in der Mitte folgt dann einfach zu

$$R_2 = (q_1 + q_2) l + K_1 + K_2 - R_1 - R_3;$$

auch erhält man aus (14) oder (15) die Neigung α der elastischen Linie in A_2 gegen den Horizont, deren Kenntniß indessen für gewöhnlich nicht von praktischem Interesse ist.

Setzt man in den vorstehenden Formeln $q_1 = q_2 = q$ und $K_1 = K_2 = 0$, so erhält man, entsprechend dem unter (6) in §. 35 angeführten Belastungsfalle

$$M_1 = M_3 = M_2 = q \frac{l^2}{12}, \; R_1 = R_3 = q \frac{l}{2}, \text{ und } R_2 = q l.$$

Ebenso erhält man mit $q_1 = q_2 = 0$ und $K_1 = K_2 = K$, sowie $a_1 = a_2 = \frac{l}{2}$, d. h. für den in den Mitten der Strecken belasteten Balken, entsprechend §. 35, (5):

$$M_1 = M_3 = M_2 = K \frac{l}{8}, \; R_1 = R_3 = \frac{K}{2} \text{ und } R_2 = K \text{ u. s. w.}$$

Beispiele: 1. Wie groß ist die Senkung der Mittelstütze eines über zwei gleichen Oeffnungen liegenden Trägers zu machen, damit die Maximalmomente gleich groß werden, wenn die ganze Länge des Trägers $L = 40$ m, die Belastung durch sein Eigengewicht pro Meter $p = 800$ kg und die zufällige Last $k = 2400$ kg beträgt, und wenn die zulässige Faserspannung 6 kg pro Quadratmillimeter und der Elasticitätsmodul 18000 anzunehmen ist?

Man hat hier

$$v = \frac{p}{q} = \frac{800}{2400 + 800} = 0{,}25,$$

und daher nach (11):

$$u = \frac{0{,}25 - 23 + \sqrt{544 - 32 \,.\, 0{,}25}}{2} = 0{,}201,$$

folglich das Maximalmoment für den Fall der gehörigen Senkung der Mittelstütze nach (13:)

$$M_{1\,max} = \frac{L^2 q}{32}(1 - u) = \frac{40 \,.\, 40 \,.\, 3200}{32} \, 0{,}799 = 127\,840 \text{ mkg}.$$

Nimmt man die Höhe des Trägers zu $h = 2$ m, also die Entfernung der äußersten Faserschicht von der neutralen Axe zu $e = 1$ m an, so erhält man das Trägheitsmoment T, wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden durch

$$M_{max} = s \frac{T}{e} \text{ zu}$$

$$T = \frac{1 \,.\, 127\,840}{6 \,.\, 1000 \,.\, 1000} = 0{,}02131,$$

und daher die erforderliche Senkung der Mittelstütze nach (12):

$$f = \frac{u L^4 q}{384 \, T \,.\, E} = \frac{0{,}201 \,.\, 40^4 \,.\, 3200}{384 \,.\, 0{,}02131 \,.\, 18\,000 \,.\, 1000 \,.\, 1000} = 0{,}0112 \text{ m}$$

oder nur wenig mehr als 11 mm.

2. In einer Spinnerei ist ein 8 m langer, an beiden Enden eingemauerter Unterzug angebracht, welcher in der Mitte, Fig. 144, durch eine Säule gestützt ist. Die Anstrengung dieses Unterzuges soll ermittelt werden, wenn derselbe durch das Gewicht des darauf ruhenden Fußbodens pro Meter Länge mit $q = 2000$ kg belastet wird, und außerdem durch aufgestellte Maschinen die eine Oeffnung eine Last von 800 kg in 2,4 m Entfernung von der Mitte, und die andere Oeffnung in 3 m Entfernung von der Säule eine Last von 1000 kg erhält?

Hier ist $q = 2000$ kg, $K_1 = 800$ kg, $K_2 = 1000$ kg, $a_1 = 2{,}4$, $a_2 = 3$ und $l = 4$ m. Man findet daher (20) das Moment an einem Ende

$$M_1 = 2000 \frac{16}{12} + 800 \frac{2{,}4 \,.\, 16 + 2 \,.\, 2{,}4^2 \,.\, 4 - 3 \,.\, 2{,}4^3}{4 \,.\, 16} + 1000 \frac{2 \,.\, 9 \,.\, 4 - 3 \,.\, 16 - 27}{4 \,.\, 16}$$

$$= 2666{,}7 + 537{,}6 - 46{,}9 = 3157{,}4 \text{ mkg},$$

und das am anderen Ende:

$$M_2 = 2000 \frac{16}{12} + 1000 \frac{3 \,.\, 16 + 2 \,.\, 9 \,.\, 4 - 3 \,.\, 27}{64} + 800 \frac{2 \,.\, 2{,}4^2 \,.\, 4 - 2{,}4 \,.\, 16 - 2{,}4^3}{64}$$

$$= 2666{,}7 + 609{,}4 - 76{,}8 = 3199{,}3 \text{ mkg}.$$

Mit diesen Werthen erhält man aus (16) den Auflagerdruck auf der einen Seite A_1 zu:

$$R_1 = 2000 \frac{4}{4} + 800 \frac{2,4^3}{4^3} + 3 \frac{3157,4}{4} = 4541 \text{ kg},$$

und aus (16ᵃ) auf der anderen Seite A_3:

$$R_3 = 2000 + 1000 \frac{27}{64} + 3 \frac{3199,3}{4} = 4822 \text{ kg},$$

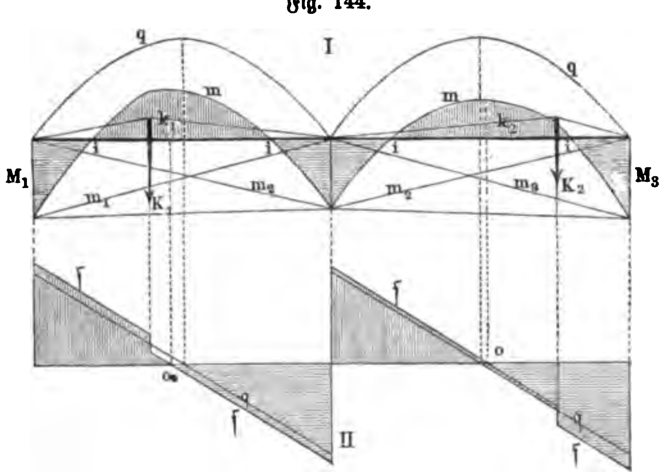
folglich ist der Druck auf die Mittelstütze:

$$R_2 = 2000 . 8 + 800 + 1000 - 4541 - 4822 = 8437 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment über der Mittelstütze ergiebt sich endlich aus (18) zu

$$M_2 = 2000 \frac{16}{2} + 800 . 2,4 + 3157,4 - 4541 . 4 = 2912 \text{ mkg}.$$

Fig. 144.



Um das Biegungsmoment und die Scheerkraft an jeder Stelle zu finden, sind in Fig. 144 I und II die Diagramme entworfen, indem die Curven m und f für die resultirenden Momente und Schubkräfte durch Vereinigung der Diagramme gezeichnet wurden, welche der gleichförmigen Belastung q, den concentrirten Kräften K und den negativen Stützenmomenten M_1, M_2 und M_3 zukommen, welche Diagramme durch die entsprechenden Bezeichnungen q, q, k und m_1, m_2, m_3 unterschieden sind. Man ersieht daraus die Inflexionspunkte i und die Stellen, wo die Zwischenmomente [M] die größten Werthe haben, d. h. wo die Schubkräfte Null werden.

Balken auf vier Stützen. Es soll ein continuirlicher Brückenträger $A_1 A_4$, Fig. 145 (a. f. S.), über drei Oeffnungen angenommen werden, von welchen jede der äußeren die gleiche Weite $l_1 = l_3$ und die mittlere die Weite l_2 haben soll. Die Endstützen A_1 und A_4 sollen in einer Hori- §. 39.

zontalen liegen, unter welche jede der beiden mittleren Stützpunkte um die Größe $f_2 = f_3 = f$ gesenkt sein soll, so daß man $y_1 - y_2 = y_4 - y_3 = f$ hat. Die Belastung durch das Eigengewicht sei überall pro 1 m Länge mit p, diejenige durch die Verkehrslast mit k und die gesammte Belastung wieder mit $q = p + k$ bezeichnet.

Wegen der freien Auflagerung der Enden hat man wieder für die Momente daselbst

$$M_1 = M_4 = 0$$

und erhält daher hiermit aus (19), §. 37 die beiden Ausdrücke für A_2:

$$0 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = - 6 TE \left(-\frac{f}{l_1} + 0\right) - q_1 \frac{l_1^3}{4} - q_2 \frac{l_2^3}{4}$$

und für A_3:

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_1) + 0 = - 6 TE \left(0 - \frac{f}{l_1}\right) - q_2 \frac{l_2^3}{4} - q_3 \frac{l_1^3}{4}.$$

Fig. 145.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $2 (l_1 + l_2)$, die zweite mit l_2 und subtrahirt die letztere von der ersteren, so erhält man:

$$M_2 (4 l_1^2 + 8 l_1 l_2 + 3 l_2^2) = - q_1 \frac{l_1^3}{4} (2 l_2 + 2 l_1) - q_2 \frac{l_2^3}{4} (l_2 + 2 l_1)$$
$$+ q_3 \frac{l_1^3 l_2}{4} + 6 TEf \left(2 + \frac{l_2}{l_1}\right).$$

Wenn man hierin das Verhältniß der Spannweiten

$$\frac{l_2}{l_1} = m, \text{ und } 4 l_1^2 + 8 l_1 l_2 + 3 l_2^2 = (2 l_1 + l_2)(2 l_1 + 3 l_2)$$
$$= l_1^2 (2 + m)(2 + 3m),$$

sowie die ganze Länge

$$L = 2 l_1 + l_2 = l_1 (2 + m)$$

setzt, so wird:

$$M_2 l_1^2 (2 + m)(2 + 3m) = \frac{l_1^4}{4}\left(- q_1 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_3 m + \frac{24}{l_1^4} TEf (2 + m)\right),$$

oder:

$$M_2 = \frac{L^2}{4} \frac{- q_1 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_3 m + u (2 + m)}{(2 + m)^3 (2 + 3m)}, \quad \ldots (1)$$

wenn der Kürze wegen

$$\frac{24}{l_1^4} TEf = u$$

gesetzt wird.

Wegen der symmetrischen Anordnung kann diese Gleichung auch für die Stütze A_3 gelten, sobald man darin q_3 mit q_1 vertauscht. Man erhält dann:

$$M_3 = \frac{L^2}{4} \frac{- q_3(2+2m) - q_2 m^3(2+m) + q_1 m + u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} \quad . . (1^a)$$

Nunmehr findet man auch die Reaction R_1 der Endstütze A_1 aus der Gleichung (22) in §. 37, worin man die Verticalkraft V_1' unmittelbar links von A_1 gleich Null anzunehmen hat, zu

$$R_1 = q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1}, \quad . . . . (2)$$

und dem entsprechend hat man der Symmetrie wegen für die andere Endstütze A_4:

$$R_4 = q_3 \frac{l_1}{2} + \frac{M_3}{l_1} \quad . . . . (2^a)$$

Aus der Verticalkraft $R_1 = V_1''$ unmittelbar rechts neben A_1 ergiebt sich die Schubkraft V_2' unmittelbar links neben A_2 zu

$$V_2' = R_1 - q_1 l_1, \quad . . . . (3)$$

so daß man nun mit diesem Werthe von V_2' aus der Gleichung (22), §. 37 auch die Reaction R_2 in A_2 zu

$$R_2 = \frac{M_3 - M_2}{l_2} + q_2 \frac{l_2^2}{2} - V_2' \quad . . . . . . (4)$$

erhält. Die Ausdrücke für V_3' und R_3 werden ganz analoge sein müssen. Vermittelst der Reaction R_1 in A_1 folgt nun das größte Biegungsmoment zwischen A_1 und A_2 zu

$$[M_1] = \frac{R_1^2}{2 q_1} = \frac{q_1}{2}\left(\frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1}\right)^2, \quad . . . . . . (5)$$

welches sich bekanntlich in dem Abstande von A_1

$$x_0 = \frac{R_1}{q_1} = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} \quad . . . . (6)$$

einstellt, wo die Verticalkraft gleich Null ist.

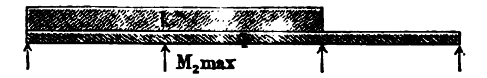
Außerdem findet sich noch ein Maximalmoment in dem mittleren Felde, welches bei symmetrischer Anordnung und Belastung in der Mitte des Trägers eintritt, und dessen Betrag unter dieser Voraussetzung aus der Gleichung (25) in §. 37 sich ergiebt zu:

$$[M_2] = M_2 + \frac{q_2}{2}\left(\frac{l_2}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l_2 q_2}\right)^2 = M_2 + q_2 \frac{l_2^2}{8} \quad . . (7)$$

weil für $q_1 = q_3$ auch $M_2 = M_3$ ist. Es werden also an drei Stellen jeder Balkenhälfte die relativ größten Momente auftreten, nämlich in der Mitte $[M_2]$, über der Zwischenstütze M_2, und im Abstande x_0 von dem Endauflager $[M_1]$. Es wird daher von Interesse sein, diejenigen Verhältnisse zu prüfen, unter denen die Bruchgefahr für den Träger an allen diesen Stellen die nämliche wird, d. h. unter denen die absolute Größe dieser Maximalmomente denselben Werth annimmt. Es muß hierbei bemerkt werden, daß der Werth jedes dieser Momente wesentlich von der Art der Belastung, d. h. von dem Verhältnisse der Größen q_1, q_2 und q_3 abhängig ist, und daß die gedachten Momentenmaxima M_2, $[M_1]$ und $[M_2]$ keineswegs bei einer und derselben Belastungsweise gleichzeitig ihre absolut größten Werthe annehmen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Aus der Gleichung (1) ersieht man zunächst, daß der absolute Werth des (negativen) Momentes M_2 über der Zwischenstütze A_2 um so größer wird, je größer die Belastungen q_1 und q_2 der benachbarten Felder sind und je kleiner die Belastung q_3 des dritten Feldes ist. Man wird daher den absolut größten Werth, welchen M_2 überhaupt annehmen kann, dann erhalten, wenn man für die beiden benachbarten Felder $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ die größte Verkehrslast k annimmt, während das abgewandte Feld $A_3 A_4$ einer zufälligen Belastung gar nicht, sondern nur seinem Eigengewichte p unterworfen ist, wie Fig. 146 anzeigt.

Fig. 146.



Man erhält diesen größten Werth von M_2 daher, wenn man

$$q_1 = q_2 = p + k = q \text{ und } q_3 = p$$

in die Gleichung (1) einsetzt, zu

$$M_{2\,max} = \frac{L^2}{4} \frac{-q(2+2m)(1+m^3)+pm+u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} \quad . \; . \; . \; (8)$$

Um auch den ungünstigsten Werth von $[M_1]$ zu bestimmen, berechnet sich der Werth von R_1 aus (2), wenn man für M_2 den Werth aus (1) einsetzt zu

$$R_1 = \frac{L}{4} \frac{q_1(6+14m+6m^2)-q_2 m^3(2+m)+q_3 m+u(2+m)}{(2+m)^2(2+3m)}.$$

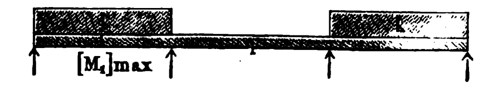
Man erkennt hieraus, daß dieser Ausdruck den größten Werth für R_1 liefert, wenn man q_1 und q_3 möglichst groß, also gleich $p + k = q$, wenn man q_2 möglichst klein, also gleich p wählt, Fig. 147, und damit erhält man:

$$R_{1max} = \frac{L}{4}\,\frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)}.$$

Daher ergiebt sich für diesen größten Auflagerdruck auch der größte Werth für $[M_1]$ zu:

$$[M_1]_{max} = \frac{R_1^2}{2q} = \frac{L^2}{32q}\left(\frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)}\right)^2 \quad . . . . (9)$$

Fig. 147.



Das Maximalmoment $[M_2]$ in der mittleren Strecke berechnet sich nach (7), wenn man in dem Werthe für M_2 in (1) die Belastung $q_1 = q_3$ setzt zu

$$[M_2] = \frac{L^2}{4}\,\frac{-q_1(2+2m-m) - q_2m^3(2+m) + u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} + \frac{m^2L^2}{8(2+m)^2}q_2$$

$$= \frac{L^2}{8}\,\frac{-2q_1 + q_2(2+m)m^2 + 2u}{(2+m)^2(2+3m)}.$$

Dasselbe erhält seinen größten Werth, wenn q_2 möglichst groß, also gleich q, und $q_1 = q_3$ möglichst klein, also gleich p ist, Fig. 148, und daher erhält man diesen größten Werth zu

$$[M_2]_{max} = \frac{L^2}{8}\,\frac{q(2+m)m^2 - 2p + 2u}{(2+m)^2(2+3m)} \quad . . . . (10)$$

Fig. 148.



Hieraus ergiebt sich, daß die drei Maximalmomente M_2, $[M_1]$ und $[M_2]$ nicht zugleich, sondern bei den durch die Figuren 146 bis 148 dargestellten Belastungsarten eintreten, und es folgt daraus, daß **bei der vollen Belastung der ganzen Brücke durch q keineswegs der ungünstigste Zustand vorhanden ist**, indem hierbei nicht ein einziges der drei Maximalmomente seinen größten Werth annimmt.

Will man daher die gestellte Bedingung erfüllen, wonach an den gedachten drei Stellen gleiche Bruchgefahr stattfindet, so ergeben sich aus den drei Ausdrücken (8), (9) und (10) die Bedingungsgleichungen:

$$M_{2\,max} = [M_1]_{max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und

$$M_{2\,max} = [M_2]_{max} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Damit diese beiden Gleichungen erfüllt werden können, genügt es nicht, eine entsprechende Senkung der mittleren Stützen vorzunehmen, sondern man muß noch für eine zweite Größe eine gewisse Annahme zulassen, etwa für das Verhältniß der Oeffnungsweiten $m = \frac{l_2}{l_1}$, oder für das Verhältniß der Belastungen $v = \frac{p}{q}$. Da diese Belastungen p und q von vornherein durch die Verhältnisse festgesetzt sein werden, so bleibt daher nur übrig, das Verhältniß der Oeffnungsweiten $m = \frac{l_2}{l_1}$ und die Senkung f so zu bestimmen, daß den beiden Bedingungen (11) und (12) Genüge geschieht. Man erhält daher f und m durch Auflösung dieser Gleichungen in einem vorliegenden Falle, d. h. für eine gegebene Spannweite L und gegebene Belastungen p und q. Die Ausführung dieser weitläufigen Rechnung soll hier nicht vorgenommen werden, es möge statt dessen im Folgenden nur die Tabelle angeführt werden, welche von Mohr auf Grund dieser zuerst von ihm geführten Untersuchung dieses Falles berechnet worden ist. Diese Tabelle giebt für verschiedene Belastungsverhältnisse $v = \frac{p}{q}$ zwischen 0 und 1 diejenigen Werthe von m und von $\frac{u}{q} = \frac{24\,T\,E}{q\,l_1^4}\,f$, d. h. also auch diejenigen der Senkung f, welche zu wählen sind, um, wie vorstehend angenommen, gleich große Werthe für die Bruchmomente $M_{2\,max}$, $[M_1]_{max}$ und $[M_2]_{max}$ zu erhalten. Der Werth dieses Momentes selbst ist in der vierten Zeile der Tabelle als Procentsatz des Betrages $q\,\frac{L^2}{72}$ angegeben, welchen letzteren das Biegungsmoment in der Mitte der Oeffnungen in demjenigen Falle annehmen würde, in welchem man die Spannweite L in drei gleiche Oeffnungen zerlegen und jede dieser Oeffnungen durch einen einfachen Träger von der Länge $\frac{L}{3}$ überdecken würde. Die in dieser vierten Zeile angegebenen Coefficienten von $q\,\frac{L^2}{72}$ lassen daher ein Urtheil zu über denjenigen Procentsatz, um welchen durch die Anordnung des continuirlichen Trägers gegenüber der Aufstellung von Einzelträgern das Biegungsmoment, also auch der Materialaufwand verringert wird. Dieser Gewinn schwankt der Tabelle zufolge zwischen 18 Proc. für $v = 0$, d. h. für kleine Brücken, deren Eigengewicht unerheblich ist im Vergleich zur Belastung, und 39 Proc. für die

größten Spannweiten, für welche das Eigengewicht p vorherrscht. Ebenso erkennt man aus der Tabelle, daß die mittlere Oeffnungsweite l_2 für alle Belastungsverhältnisse größer zu nehmen ist, als die der Seitenöffnungen und zwar um 13 bis 17 Proc. In der Ausführung pflegt man dieses Verhältniß $\frac{l_2}{l_1}$ in der Regel zu 1,2 bis 1,25 zu wählen.

Tabelle von Mohr über das Verhältniß der Oeffnungen und die Senkung der Mittelstützen bei continuirlichen Trägern auf vier Stützen.

$v = \frac{p}{q} = \frac{\text{Eigenlast}}{\text{Totallast}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} = \frac{\text{Mittelöffnung}}{\text{Seitenöffnung}}$	1,13	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$\frac{u}{q} = \frac{24\,TE}{q\,l_1^4}\,f$; $f =$ Senkung d. Mittelstützen	0,40	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$M_{max} = \frac{q\,L^2}{72}$ mal	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61

Aus den Resultaten dieser Tabelle folgert Mohr die empirischen Formeln:

$$m = 1{,}13 + 0{,}04\,\frac{p}{q}, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

$$u = 0{,}40\,q + 0{,}32\,p \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

und

$$M_{max} = \frac{L^2}{72}\,(0{,}82\,q - 0{,}21\,p) \quad \ldots \quad (15)$$

Da hier $u = \frac{24\,TE}{l_1^4}\,f$ angenommen wurde, so ist auch:

$$f = \frac{l_1^4}{60\,TE}\,(q + 0{,}80\,p) \quad \ldots \quad (16)$$

Beispiel. Für eine Eisenbahnbrücke sollen zwei über drei Oeffnungen gespannte, 4 m hohe continuirliche Träger von $L = 120$ m Länge angeordnet werden. Die Verhältnisse sind mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die Verkehrslast pro laufenden Meter der Brücke 4000 kg beträgt und für das Material eine höchstens zulässige Faserspannung von 6 kg pro Quadratmillimeter, sowie ein Elasticitätsmodul von $E = 20\,000$ angenommen werden kann.

Nimmt man das Eigengewicht der ganzen Brücke zu 2400 kg pro 1 m Länge, also die dadurch bewirkte Belastung für jeden der beiden Längsträger gleich der Hälfte zu $p = 1200$ kg an, so hat man das Verhältniß der beiden Belastungen

$$v = \frac{p}{q} = \frac{1200}{1200 + 2000} = 0{,}375.$$

Hiermit erhält man aus (13):

$$m = 1{,}13 + 0{,}04 \,.\, 0{,}375 = 1{,}145,$$

folglich wird jede Seitenöffnung eine Weite

$$l_1 = \frac{L}{2 + m} = \frac{120}{3{,}145} = 38{,}1 = rot\ 38\,\text{m},$$

und die Mittelöffnung eine solche von

$$l_2 = 120 - 2 \,.\, 38 = 44\,\text{m}$$

zu erhalten haben.

Das größte Biegungsmoment bestimmt sich nach (15) zu

$$M_{max} = \frac{3{,}2 \,.\, 120^2}{72}\left(0{,}82 - 0{,}21\,\frac{1{,}2}{3{,}2}\right) = 640 \,.\, 0{,}741 = 474 \text{ Metertonnen.}$$

Um die Senkung der Mittelstützen zu berechnen, bestimmt man zunächst das Trägheitsmoment T mit Rücksicht darauf, daß das Biegungsmoment $M_{max} = 474\,000$ mkg eine Spannung $s = 6$ kg in der äußersten Faser erzeugt, und daß diese äußerste Faser um die halbe Trägerhöhe

$$\frac{h}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{m}$$

von der neutralen Axe absteht, nach der Grundformel I des §. 35 durch

$$M_{max} = s\,\frac{T}{e} \text{ zu } T = \frac{e\,M_{max}}{s},$$

also hier, wenn die Längen in Metern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt werden:

$$T = \frac{2 \,.\, 474\,000}{6000\,000} = 0{,}158.$$

Mit diesem Werthe erhält man dann aus (16) die Senkung der mittleren Stützen

$$f = \frac{3200 \,.\, 38^4}{60 \,.\, 0{,}158 \,.\, 20\,000 \,.\, 1000^2}\,(1 + 0{,}80 \,.\, 0{,}375) = 0{,}0458\,\text{m oder rund } 46\,\text{mm}.$$

Aus den vorstehenden Untersuchungen erkennt man, daß die Anordnung continuirlicher Träger, im Vergleiche mit der Anwendung von Einzelträgern für jede Brückenöffnung, mit einem gewissen Gewinne verbunden ist, indem bei den ersteren die Inanspruchnahme und somit der Materialaufwand geringer ausfällt, als bei isolirten Trägern. Die Größe dieses Gewinnes ist insbesondere aus den Coefficienten zu erkennen, mit welchen nach der vorstehenden Tabelle der Werth des Momentes für Einzelträger $\frac{q\,L^4}{72}$ zu multipliciren ist, um das größte Moment M_{max} des continuirlichen Trägers zu erhalten. Diese Coefficienten zeigen, daß der besagte Vortheil um so

größer ist, je mehr sich das Verhältniß $v = \frac{p}{q}$ der Einheit nähert, d. h. je größer die lichten Spannweiten sind, und daß er bei Trägern auf vier Stützen bis zu 39 Proc. anwachsen kann. So groß nun auch dieser Vortheil, insbesondere bei schweren Trägern oder großen Spannweiten ist, so hat doch die Anwendung continuirlicher Träger gewichtige praktische Bedenken, wie sich aus dem Folgenden ergiebt.

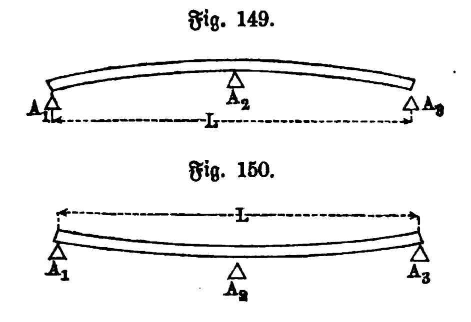
Aus der Rechnung erkennt man, daß es sich meist um sehr geringe Höhenunterschiede der Auflager handelt, durch deren Einfluß die Verringerung der Anspannung des Trägers herbeigeführt wird; so genügte in dem vorstehend berechneten Beispiele schon eine Senkung der Mittelstützen um noch nicht 46 mm, um das Moment M_{max} in dem Verhältnisse 1 : 0,741 zu verringern, eine Senkung, die im Verhältnisse zu der Trägerlänge von 120 m sehr gering erscheinen muß.

Wenn man nun auch bei sorgfältiger Ausführung diese Höhenlagen der Stützen genau erzeugen kann, so muß man doch befürchten, daß im Laufe der Zeit, etwa durch ungleichmäßiges Setzen der Brückenpfeiler, diese gegenseitige Lage der Stützpunkte sich verändern könne, und es ist leicht einzusehen, daß unter einer solchen Voraussetzung der Zustand des Trägers ein sehr ungünstiger wird. Denkt man sich z. B., daß bei einem auf drei Stützen ruhenden Träger mit entsprechend tiefer gelegtem Mittelauflager, wie er im vorhergehenden Paragraphen berechnet wurde, die Außenpfeiler sich um so viel senken würden, daß sämmtliche Stützpunkte in eine Horizontale zu liegen kämen, so würde dadurch das Moment, wofür der Träger berechnet ist, und welches ursprünglich an den gefährdeten Stellen $\frac{q L^2}{32}(1 - u)$ betrug, zu dem Betrage $\frac{q L^2}{32}$ gewachsen sein.

Diese Senkung würde für den im Beispiel 1 des vorigen Paragraphen berechneten Träger von 40 m Länge nur 12 mm zu betragen haben, um das Maximalmoment in dem Verhältnisse $1 : 1 - u = \frac{1}{0,799} = 1,25$ zu steigern.

Würde die Höhenveränderung noch größer werden, so würde eine weitere Vergrößerung des Bruchmomentes veranlaßt werden, und das letztere würde den äußersten Betrag $\frac{q L^2}{8}$, also mehr als das Vierfache desjenigen, wonach der Träger construirt ist, erlangen, wenn die Außenstützen sich so tief gesenkt hätten, daß der Träger nur noch in der Mitte A_2 aufruhen würde, Fig. 149 (a. f. S.) Es würde derselbe Betrag $\frac{q L^2}{8}$ des Maximalmomentes

auch eintreten, wenn etwa die mittlere Stütze A_2 sich um so viel gesenkt hätte, daß der Träger nur an beiden Enden A_1 und A_3 aufruhen würde, Fig. 150. Die hierzu erforderliche Höhendifferenz zwischen der Mittelstütze und den äußeren Auflagern müßte für diese äußersten Fälle offenbar den Betrag der Durchbiegungen erreichen, um welche der Träger unter Einfluß der Belastung q sich an den Enden resp. in der Mitte durchbiegen würde. Man erhielt diese Durchsenkung für den durch Fig. 149 dargestellten Zustand nach §. 35, 2 zu



$$f = \frac{q l^4}{8\,TE} = \frac{q L^4}{16 . 8\,TE} = 0{,}167 \text{ m},$$

und für den Zustand der Fig. 150 nach §. 35, 4 durch

$$f = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{TE} = 0{,}278 \text{ m}.$$

Wenn nun auch eine so beträchtliche Veränderung der Auflagerhöhen nicht zu befürchten sein mag, so erkennt man doch zur Genüge aus den vorstehenden Zahlenwerthen, in welcher erheblichen Weise die Sicherheit continuirlicher Träger durch zufällige und unvermeidliche Veränderungen der Auflager beeinflußt werden kann.

Hierzu tritt der ungünstige Umstand, daß auch schon bei der Herstellung des eisernen Trägers Abweichungen von der richtigen Form leicht vorkommen können, welche nur durch Anwendung besonderer Sorgfalt sich vermeiden lassen. Die vorstehende Theorie ist nämlich immer von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Unterkante des Trägers im unbelasteten Zustande eine gerade Linie sei, oder daß doch wenigstens sämmtliche Auflagerstellen desselben ursprünglich in einer Geraden liegen, so lange der Träger noch nicht durch eine Belastung, also auch nicht durch sein Eigengewicht angegriffen ist. Denkt man sich etwa den Träger nach seiner Fertigstellung, bei welcher er auf hoher Kante zu stehen pflegt, umgekantet, so daß sein Eigengewicht nunmehr nicht auf eine Durchbiegung in der Trägerebene wirkt, so müssen in dieser Lage des Trägers die sämmtlichen Auflagerstellen genau in einer geraden Linie liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, wenn z. B. die mittlere Auflagerstelle um eine gewisse Größe a von der geraden

Verbindungslinie der äußeren Auflagerflächen abwiche, wie dies unter anderem sicher der Fall sein wird, wenn diese Auflagerstellen bei der Zusammensetzung des Trägers in aufrechter Stellung in einer Geraden befindlich gewesen sein sollten, so ist diese Abweichung von der richtigen Trägerform offenbar in ihrem Einflusse gleichbedeutend mit einer Höhenabweichung der mittleren Stütze von der Verbindungslinie der äußeren Auflager um eben dieselbe Größe a. Man ersieht hieraus, wie durch ein möglicherweise in ungünstiger Art stattfindendes Zusammentreffen der nie ganz zu vermeidenden Ungenauigkeiten der Anfertigung mit denen der Aufstellung die Sicherheit continuirlicher Träger in hohem Grade gefährdet erscheint, und daß eine stete Ueberwachung des betreffenden Zustandes unerläßlich ist.

Diese Gründe sind denn auch hauptsächlich die Veranlassung, weshalb man neuerdings mehr und mehr von der Anwendung continuirlicher Brückenträger zurückgekommen ist, und den isolirten Trägern über die einzelnen Oeffnungen den Vorzug giebt, trotzdem dieselben nach den vorstehenden Rechnungen einen größeren Materialaufwand zu ihrer Ausführung erfordern. Es ist leicht ersichtlich, daß bei der Anordnung von Einzelträgern eine Veränderung der Auflagerhöhen, wie sie etwa durch ungleichmäßiges Setzen der Pfeiler eintritt, so bedenkliche Wirkungen für die Sicherheit nicht im Gefolge hat, wie sie vorstehend für die continuirlichen Träger erkannt wurden.

Es mag hier noch die sinnreiche, ebenfalls von Mohr angegebene Aufstellungsart angeführt werden, welche den Zweck hat, die gedachten Uebelstände zu beseitigen, welche aus den unvermeidlichen Fehlern der Anfertigung und Aufstellung der continuirlichen Träger herrühren. Mohr schlägt zu dem Ende vor, continuirliche Träger in den Einzelstrecken der verschiedenen Oeffnungen getrennt anzufertigen und aufzustellen, und nach ihrer Aufstellung die Enden der auf den Mittelpfeilern zusammentreffenden Einzelträger nachträglich durch Vernietung mit einander zu verbinden. Ist dies geschehen, so hat man eine nachträgliche Senkung der mittleren Auflager durch Entfernung von besonderen zu dem Zwecke untergelegten Platten zu bewirken. Die Stärke dieser Platten, d. h. die Größe der entsprechenden Senkung, ist natürlich nicht direct durch die vorstehend entwickelten Formeln zu berechnen, sondern mit Rücksicht darauf zu bestimmen, daß der Träger in dem Zustande, wo er nur sein Eigengewicht zu tragen hat, auf Stützen ruht, welche solche Höhenlage zu einander haben, daß die Momente über den Mittelstützen gleich Null sind, wie es offenbar vor der Zusammenkuppelung der Einzelträger der Fall war, und woran die Vereinigung nichts ändern konnte. Von diesem Zustande ausgehend ist dann die nachträglich zu bewirkende Senkung der Innenstützen so zu berechnen, daß die verschiedenen Maximalmomente für die ungünstigsten Belastungsfälle einander gleich

werden. Hinsichtlich der Ausführung dieser Rechnungen muß hier auf die benutzte Quelle*) verwiesen werden.

§. 40. Die elastische Linie als Seilcurve. Die Berechnung der continuirlichen Träger führt, wie aus dem Vorstehenden sich ergiebt, zu verwickelten und umständlichen Rechnungen, sobald die Anzahl der Stützen eine größere und die Belastungsart nicht eine sehr einfache ist. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, kann man sich daher auch hier graphischer Methoden bedienen, welche eine für die Praxis genügende Genauigkeit gewähren. Im Folgenden soll die von Mohr**) herrührende, durch ihre Anschaulichkeit und Einfachheit ausgezeichnete Methode näher angegeben werden. Aus der für die elastische Linie geltenden Gleichung

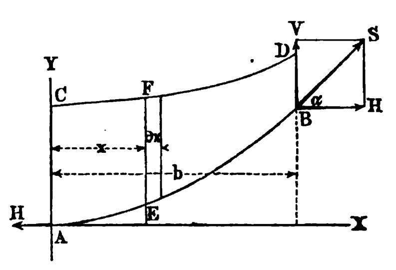
$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

läßt sich wie folgt nachweisen, daß die elastische Linie zu den sogenannten Seilcurven gehört. Man denke sich zu dem Zwecke in AB, Fig. 151, ein Seilstück, dessen tiefster Punkt A ist, so daß daselbst die Tangente des Seiles horizontal ausfällt, und dessen Belastung in bekannter Weise der Belastungslinie CFD gemäß derart angenommen ist, daß die Ordinate EF in dem beliebigen Punkte E daselbst die specifische Belastung q nach einem gewissen willkürlich gewählten Maßstabe darstellt. In dem Punkte B wirkt auf das Seilstück eine Zugspannung S, deren horizontale Componente gleich dem überall constanten Werthe H ist, während die verticale Componente V übereinstimmt mit der zwischen dem Scheitel A und dem Punkte B angebrachten Belastung. Diese letztere ist nach dem Begriffe der Belastungsfläche durch das Flächenstück $ACDB$ dargestellt.

Fig. 151.



Nimmt man den Scheitel A der Seilcurve zum Anfang rechtwinkeliger Coordinaten an, deren X-Axe horizontal gerichtet ist, und ist α der Winkel

*) S. Zeitschr. d. Archit.- u. Ing.-Ver. für Hannover, 1860.
**) S. Zeitschr. d. Archit.- u. Ing.-Ver. für Hannover, 1868.

des Seiles in B gegen die Horizontale, so hat man dem Vorstehenden gemäß

$$S \cos \alpha = H,$$

$$S \sin \alpha = V = \int_0^b q \partial x,$$

folglich durch Division:

$$\tang \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\int_0^b q \partial x}{H},$$

woraus durch Differentiation:

$$H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

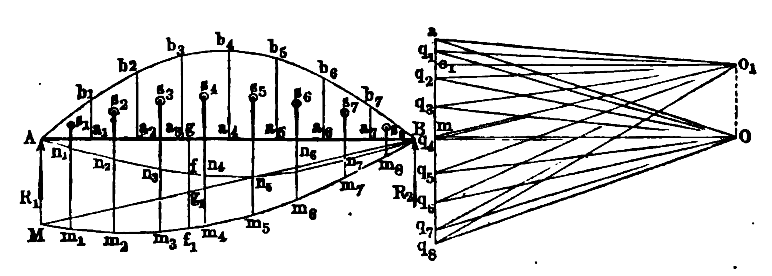
folgt. Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter (1) angegebenen zeigt nun ohne Weiteres, daß die elastische Linie ebenfalls eine Seilcurve sein muß, für welche der horizontale Zug durch $H = E$ dargestellt ist, und für welche man in jedem Punkte eine Belastungsordinate anzunehmen hat, welche durch $q = \frac{M}{T}$ gegeben ist. Denkt man sich zunächst das Trägheitsmoment des Balkens für alle Punkte desselben von derselben Größe, so kann man auch $q = M$ setzen, und es ergiebt sich aus dem Vorstehenden die folgende Construction der elastischen Linie.

Für irgend einen Balken, welcher etwa auf zwei Stützen frei aufliegend angenommen werden möge, kann man, wenn die Belastung gegeben ist, das auf Biegung wirkende Moment M in der mehrfach gezeigten Weise bestimmen, sei es durch Rechnung oder vermöge eines Seilpolygons, wie dies in Thl. I, Anhang 2 angegeben und an mehreren Beispielen durchgeführt worden ist. Ist dies geschehen, so kann man in jedem Punkte des Balkens eine Ordinate aufgetragen denken, welche nach einem beliebig anzunehmenden Maßstabe die Größe des in diesem Punkte angreifenden Momentes darstellt, mit anderen Worten, man kann die Momentenfläche des Balkens in der vorstehend mehrfach angegebenen Art construiren. Entwirft man nun mit Hülfe eines Kräftepolygons, dessen Polabstand oder Horizontalzug man nach demselben Maßstabe wie die Belastungen gleich dem Elasticitätsmodul E annimmt, diejenige Seilcurve, welche man erhält, wenn man die gedachte Momentenfläche als Belastungsfläche ansieht, so erhält man in derselben die elastische Linie des Balkens, und also in den verticalen Ordinaten ihrer verschiedenen Punkte die Durchbiegungen dieser Punkte.

Um dieses Verfahren, welches zwar bei früheren Gelegenheiten mehrfach zur Anwendung gekommen ist, des Zusammenhanges wegen hier zu er-

läutern, diene Fig. 152. Es sei für den Balken AB die Belastungslinie durch die krumme oder gebrochene Linie $A b_1 b_2 b_3 \ldots B$ gegeben, und durch die verticalen Theilungslinien ab sei die Belastungsfläche beliebig in Lamellen getheilt, deren Gewichte Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots$ in den Schwerpunkten s der Flächenstreifen wirkend gedacht werden. Die Größen dieser den betreffenden Streifen der Belastungsfläche proportionalen Kräfte seien nach einem gewissen Maßstabe im Kräftepolygone als die Strecken $a q_1$, $q_1 q_2$, $q_2 q_3 \ldots$ der Reihe nach angetragen. Wählt man den Pol O_1 des Kräfte-

Fig. 152.



polygons beliebig, und construirt in bekannter Weise durch Parallellinien mit den Polstrahlen $O_1 a$, $O_1 q_1$, $O_1 q_2 \ldots$ das Seilpolygon $M m_1 m_2 \ldots B$, so erhält man bekanntlich in der Schlußlinie BM die Richtung desjenigen Polstrahles Om, welcher die Gesammtbelastung $a q_8$ so theilt, daß die beiden Theile am und $m q_8$ die Auflagerdrucke R_1 und R_2 in A und B angeben. Wenn man daher den Pol in einer durch diesen Punkt m gehenden Horizontallinie in O angenommen hätte, so würde man mit diesem Pole das Seilpolygon $A n_1 n_2 n_3 \ldots B$ mit horizontaler Schlußlinie AB erhalten haben. Es ist ferner bekannt, daß ein solches Seilpolygon für jeden seiner Punkte wie f in der verticalen Ordinate $y = fg$ ein Maß für das daselbst stattfindende Moment abgiebt, dergestalt, daß dieses Moment durch $M = Hy$ ausgedrückt ist, wenn H diejenige Kraft bedeutet, welche durch die Poldistanz mO nach dem Kräftemaßstabe dargestellt ist, während y nach dem Längenmaßstabe zu messen ist, in welchem die Zeichnung ausgeführt ist. Werden beispielsweise die Belastungen durch Kilogramme und die Längen durch Meter gemessen, so erhält man das Moment für den Punkt f des Balkens zu $M = Hy$ Meterkilogramm. Es geht hieraus auch hervor, daß die beiden mit den Polen O und O_1 gezeichneten Seilpolygone An und Mm für jeden Punkt g des Balkens gleich große verticale Ordinaten $fg = f_1 g_1$ haben müssen, sobald für beide Pole O und O_1 derselbe Abstand von der Kraftlinie $a q_8$ angenommen wurde. Wäre dagegen der Abstand $O_1 o_1$ des

Poles O_1 größer oder kleiner als derjenige Om gewählt, so daß etwa

$$O_1 o_1 = \mu . Om$$

wäre, so würden an jeder Stelle des Balkens die Ordinaten y und y_1 der beiden zugehörigen Seilpolygone im umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen, d. h. man hätte in diesem Falle $y_1 = \frac{1}{\mu} y$, denn für beide Polygone gilt

$$M = Hy = Om . fg = O_1 o_1 . f_1 g_1.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf den vorliegenden Fall an, so hat man zur Verzeichnung der elastischen Linie die Belastungsfläche $A b_1 b_2 \ldots B$ des Balkens so zu bestimmen, daß die Ordinate für jeden Punkt wie g gleich ist dem in g wirkenden Momente, während man die Poldistanz Om, welche den Horizontalzug darstellt, gleich dem Elasticitätsmodul E zu machen hat. Die mit dieser Poldistanz gezeichnete Seilcurve, d. h. die von dem Seilpolygone umhüllte Curve stellt dann nach dem Obigen die elastische Linie des Balkens vor, deren Construction daher nach den bekannten Regeln in jedem Falle leicht zu entwerfen ist, wie im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Was den beim Auftragen der Belastungsordinaten anzuwendenden Maßstab anbetrifft, so läßt sich darüber Folgendes bemerken. Setzt man in der allgemeinen Gleichung $M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der elastischen Linie für das Moment M das Product Pa aus einer Kraft P Kilogramm und einer Länge a Meter, und setzt man für das Trägheitsmoment T des Querschnittes den Ausdruck Fr^2, worin F die Fläche des Querschnittes in Quadratmetern und r den sogenannten Trägheitshalbmesser in Metern bezeichnet, so kann man die obige Gleichung auch schreiben:

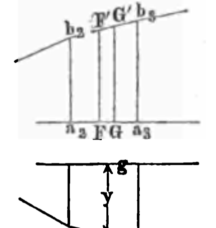
$$\frac{Pa}{r^2} = FE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Hierin bedeutet FE eine Kraft in Kilogrammen, welche dem Horizontalzuge H in der Gleichung der Seilcurve (2) $q = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ entspricht. Andererseits ist $\frac{Pa}{r^2}$ eine Kraft dividirt durch eine Länge, d. h. eine specifische Belastung oder eine Belastung für die Längeneinheit gleich 1 m, entsprechend dem Werthe q in der Gleichung (2) der Seilcurve. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich nunmehr analog der Construction in Fig. 152 das folgende Verfahren.

Man habe bei der Zeichnung des Balkens AB einen Längenmaßstab L angenommen, welcher etwa in dem Verhältnisse λ z. B. $^1/_{200}$ verjüngt ist,

so daß also jeder Länge der Abscissen in der Zeichnung von 5 mm eine wirkliche Trägerlänge von 1 m entspricht, und man habe ferner für die Horizontalkraft $H = FE$ einen Kräftemaßstab K so gewählt, daß jedem Kilogramme etwa eine Länge gleich $\varkappa$ in der Zeichnung zukommt. Wenn man nun nach demselben Kräftemaßstabe K die Größe der specifischen Kraft $\frac{Pa}{r^2}$ an jeder Stelle des Balkens als Belastungsordinate aufträgt, z. B. für den Punkt F, Fig. 153, die Ordinate $FF' = \frac{Pa}{r^2} = \frac{M}{r^2}$ macht, unter M das Moment in F verstanden, so ist es deutlich, daß daselbst der Streifen $FF'G'G$ von der Breite 1 m, also in der Figur von der Breite $FG = 5$ mm, durch seinen Inhalt die Größe der auf 1 m Länge entfallenden Belastung des Trägers in F repräsentirt, genau so, wie es in Fig. 152 der Fall ist, wo die Ordinaten ab der Belastungsfläche den specifischen Belastungen des Trägers entsprechen. Es ergiebt sich daher, daß man zur Auftragung der Kräfte im Kräftepolygone die einzelnen Flächenstücke, wie $a_2 b_2 b_3 a_3$, in Rechtecke von der Basis $FG = 1$ m zu verwandeln und die Höhe der so verwandelten Rechtecke auf der Verticalen des Kräftepolygons ($a\, q_8$ in Fig. 152) aufzutragen hat. Die so erhaltenen Strecken stellen dann offenbar die den Elementen $A a_1$, $a_1 a_2 \ldots$ des Balkens zugehörigen Werthe von $\frac{M}{r^2}$ vor, und wenn man das Seilpolygon nunmehr zeichnet, so erhält man in der zugehörigen Ordinate $y = fg$ eine Länge, für welche die dem Seilpolygone eigenthümliche Beziehung gilt,

Fig. 153.



$$Hy = \int_0^x q\, \partial x,$$

oder im vorliegenden Falle

$$FE . y = \int_0^x \frac{M}{r^2}\, \partial x.$$

In diesem Ausdrucke ist die Ordinate $y = fg$ des Seilpolygons nach dem Maßstabe L der Zeichnung zu messen; es würde also beispielsweise bei dem gewählten Verjüngungsverhältnisse $\lambda = {}^1/_{200}$ jeder Länge der Ordinate y, welche gleich 5 mm ist, eine Länge von 1 m entsprechen. Man erhält also den Werth

$$F E . y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \partial x$$

in Meterkilogrammen, wenn man die Anzahl von Kilogrammen, welche die Poldistanz H nach dem Kräftemaßstabe K darstellt, multiplicirt mit der Anzahl von Metern, welche die Ordinate y nach dem Längenmaßstabe L vorstellt. Würde man in dieser Weise verfahren, so würde bei der außerordentlichen Größe des Elasticitätsmoduls E, also auch der Horizontalkraft FE, gegen welche die Strecken auf der Verticallinie des Kräftepolygons sehr klein sind, der Pol in weite Ferne gerückt, so daß die Polstrahlen nur wenig von einander und von der Horizontalen abweichen würden. In Folge dessen würde die erhaltene Seilcurve, welche die elastische Linie darstellt, sehr flach werden, und von der geraden Balkenaxe nur unmerklich abweichen. Wenn man sich jedoch vorstellt, daß man als den Maßstab, nach welchem man den Horizontalschub $H = FE$ aufträgt, nicht denjenigen K, sondern einen ν fach kleineren annimmt, so daß also für die Horizontalkraft H ein Kilogramm nicht mehr durch $\varkappa$ Millimeter, sondern durch $\nu \varkappa$ Millimeter dargestellt ist, während man für die verticalen Kräfte den Maßstab K beibehält, so ist es nach dem oben über den Einfluß der Poldistanz Gesagten klar, daß nunmehr die Ordinaten der Seilcurve im Verhältnisse von $\frac{1}{\nu}$ vergrößert erscheinen. Gesetzt, man würde $\nu = \lambda = 1/_{200}$, also gleich dem für die Längen gewählten Verjüngungsverhältnisse der Zeichnung annehmen, so würde eine Vergrößerung der Ordinaten y in dem Verhältnisse $\frac{1}{\nu} = 200$ eintreten, mit anderen Worten, die Ordinaten der Seilcurve stellen dann die Durchbiegungen des Balkens in natürlicher Größe vor. Hierauf beruht die Möglichkeit, den Verlauf der elastischen Linie und damit die mit der Biegung im Zusammenhange stehenden Kraftverhältnisse des elastischen Balkens graphisch zu behandeln.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß in Folge der nach dem Vorstehenden anzunehmenden Verschiedenheit des Kräftemaßstabes für die verticalen und horizontalen Kräfte die sich ergebende Seilcurve wegen der dadurch hervorgerufenen Verzerrung nun nicht mehr die Copie der elastischen Linie vorstellen kann, und daß die Neigungen der Tangenten beider Curven in entsprechenden Punkten verschieden ausfallen müssen. Es ist aber aus dem Obigen ohne Weiteres der einfache Zusammenhang klar, welcher zwischen diesen beiden Neigungen für jeden Punkt besteht. Wenn nämlich in irgend einem Punkte des Balkens die Richtung der Tangente an die Seilcurve den Winkel α' mit der Horizontalen bildet, so muß die elastische

Linie in demselben Punkte unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt sein, für welchen man hat

$$tg\ \alpha = \nu\ tg\ \alpha',$$

wofür man bei der Kleinheit von α in den meisten Fällen $\alpha = \nu \alpha'$ wird setzen können.

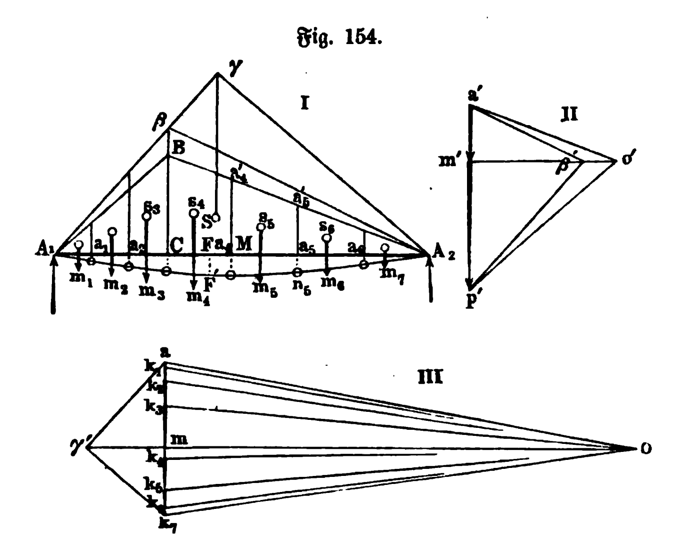
Wenn man es mit einem Balken von überall gleichem Querschnitte zu thun hat, für welchen also das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ überall dieselbe Größe hat, so kann man die Ordinaten der Belastungsfläche auch einfach proportional der Größe des Momentes M und die Horizontalkraft einfach gleich dem Elasticitätsmodul E annehmen, da diese Annahme, welche $T = 1$ voraussetzt, nur auf die Einheit des für die Horizontalkraft H angewendeten Maßstabes, also auf das oben mit ν bezeichnete Verhältniß, nicht aber auf das gegenseitige Verhältniß der Kräfte von Einfluß ist. Wenn dagegen der Querschnitt des Balkens an verschiedenen Stellen verschieden ist, so kann man die Untersuchung in zweifacher Weise führen. Nach der einen Methode setzt man in dem Ausdrucke $T = Fr^2$ die Fläche F gleich der Einheit (1 qm) voraus, bestimmt mit Rücksicht darauf die Trägheitshalbmesser r für die verschiedenen Querschnitte und trägt als Ordinaten der Belastungsfläche in den einzelnen Punkten Strecken auf, welche den jeweiligen Werthen von $\frac{M}{r^2}$ entsprechen. Andererseits kann man aber auch einen überall constanten Trägheitshalbmesser r gleich der Einheit zu Grunde legen, so daß man die Belastungsordinaten den Momenten direct proportional aufträgt, hat aber dann zur Verzeichnung der einzelnen Seiten des Seilpolygons für jeden Punkt eine veränderte Horizontalkraft anzuwenden, welche durch $F.E$ ausgedrückt ist, wenn F überall die aus der Beziehung $T = F.1^2$ sich ergebende Fläche bedeutet. Mit anderen Worten, man verändert dem Werthe des Trägheitsmomentes entsprechend im Kräftepolygone die Poldistanz, mit Hülfe deren die entsprechende Seite des Seilpolygons gezeichnet wird. Es kann, je nach den Umständen bald das eine, bald das andere dieser beiden Verfahren bequemer in der Anwendung sein. Daß beide zu demselben Resultate führen müssen, ist leicht zu erkennen, wenn man bedenkt, daß ganz allgemein die $n$fach vergrößerte Annahme von F also auch von der Horizontalkraft H ebenfalls eine $n$fache Vergrößerung der Belastungsordinaten $\frac{M}{r^2} = M\frac{F}{T}$, also nur eine Veränderung in der Einheit des Kräftemaßstabes zur Folge hat.

§. 41. **Beispiele.** Zur Erläuterung der vorstehend angegebenen Beziehungen möge die Anwendung des darauf beruhenden graphischen Verfahrens an

einigen Beispielen gezeigt werden. Es sei $A_1 A_2$, in Fig. 154, I, ein etwa im Maßstabe 1 : 100 gezeichneter horizontaler Träger auf zwei Stützen, dessen Länge $l = 5$ m ist, und welcher im Abstande $A_1 C = a = 1,5$ m von A_1 durch ein concentrirtes Gewicht von $P = 5000$ kg belastet sein soll. Wenn zunächst von der Belastung durch das Eigengewicht abgesehen wird, so findet man das in C auf den Balken wirkende Moment bekanntlich zu

$$M = P \frac{a(l-a)}{l} = 5000 \frac{1,5 \cdot 3,5}{5} = 5250 \text{ mkg},$$

Fig. 154.



und wenn man diese Größe nach einem beliebigen Maßstabe, d. h. für eine beliebige Basis b gleich CB anträgt, so giebt die Dreiecksfläche $A_1 B A_2$ die Momentenfläche des Trägers. Man kann dieselbe übrigens ohne jegliche Rechnung graphisch bestimmen, wenn man nach dem für die Kräfte angenommenen Maßstabe (in der Figur 1 mm = 200 kg) auf einer Verticallinie in II die Strecke $a'p' = P$ anträgt und durch a' und p' zwei Parallelen mit den beiden Geraden βA_2 und βA_1 legt, welche man von einem beliebigen Punkte β der Richtung P nach den Stützpunkten A_2 und A_1 gezogen hat. Zieht man durch den Durchschnitt β' dieser Linien eine Horizontale $\beta' m'$, so theilt diese bekanntlich die Kraft $a'p'$ in m' in zwei Abschnitte, welche den Auflagerdrucken R_1 in A_1 und R_2 in A_2 entsprechen. Man hat also, um das Seilpolygon $A_1 B A_2$ für die Momente mit einer horizontalen Schlußlinie $A_1 A_2$ zu erhalten, auf der durch m' gelegten Horizontalen nur die Länge $m'o'$ gleich der für den Momentenmaßstab gewählten

Basis b anzutragen (in der Figur II ist $b = m'o' = 20$ mm, entsprechend einer Länge von 2 m). Zieht man dann durch A_1 eine Parallele mit $o'p'$ und durch A_2 eine Parallele mit $o'a'$, so müssen sich diese nach der Construction in einem Punkte B der Kraftrichtung schneiden, und man hat das Moment in C in Meterkilogrammen durch das Product

$$CB \text{ Kilogramm} \times m'o' \text{ Meter}$$

gefunden. In der Figur ergiebt sich $CB = 13{,}2$ mm, entsprechend 2640 kg, also hat man graphisch das Moment zu

$$CB \times m'o' = 2640 \,.\, 2 = 5280 \text{ mkg}$$

gefunden. Ein größerer Maßstab für die Zeichnung würde natürlich das Resultat dem oben berechneten von 5250 entsprechend näher ergeben haben. Der Maßstab für die Momentenfläche ist demnach so zu bestimmen, daß danach 1 mm einem Momente von 200 kg . 2 m = 400 mkg entspricht. Wie schon bemerkt, wird man diese Hülfsconstruction in denjenigen Fällen nicht ausführen, in welchen die Momentenfläche wie hier durch die Rechnung einfacher zu bestimmen ist.

Ist nun die Momentenfläche $A_1 B A_2$ bestimmt, so kann man dieselbe durch verticale Linien in den beliebigen Punkten a_1 a_2 . . . in eine größere Anzahl (sieben in der Figur) Theile theilen, deren Schwerpunkte $s_1, s_2, s_3 \ldots$ bestimmen, und die Flächeninhalte dieser Elemente, d. h. die Höhen der in Rechtecke von 1 m Breite verwandelten Flächen ermitteln.

Um nun das Kräftepolygon, Fig. III, für die Ermittelung der elastischen Linie in passenden Maßstäben zu zeichnen, muß man zunächst das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ des Trägers kennen. Man findet dasselbe, vorausgesetzt, daß es nicht von vornherein durch die Dimensionen des Trägers gegeben ist, mit Rücksicht auf die Festigkeitsformel

$$M_{max} = s \frac{T}{e}$$

zu

$$T = \frac{M_{max}}{s} e,$$

unter s die höchstens zulässige Faserspannung und unter e den Abstand der äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden. Setzt man $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter, und e gleich der halben Trägerhöhe, welche 0,5 betragen mag, also $e = \frac{h}{2} = 0{,}25$ m, so ergiebt sich T, wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden, zu

$$T = \frac{5250}{6000\,000} \, 0{,}25 = 0{,}000\,2187.$$

Nimmt man an, die ganze Fläche F des Querschnittes sei in den beiden Gurtungen im Abstande $r = e = 0{,}25$ m concentrirt, so ergiebt sich

$$F = \frac{T}{r^2} = \frac{0{,}000\,2187}{0{,}25\,.\,0{,}25} = 0{,}0035 \text{ qm}.$$

Man hat daher den Horizontalzug

$$H = FE = 0{,}0035\,.\,18\,000\,.\,1000\,.\,1000 = 63\,000\,000 \text{ kg}$$
$$= 63\,000 \text{ Tonnen}$$

anzunehmen, und kann danach einen passenden Maßstab wählen. In der Figur ist dieser Maßstab für die Horizontalkraft so gewählt, daß 1 mm = 1000 Tonnen ist, daher die Poldistanz $mO = 63$ mm aufgetragen wurde. Für die Verticalkräfte ak_1, k_1k_2 ... ist der Maßstab hundertmal größer genommen, so daß also 1 mm = 10 Tonnen ist, und zwar sind die Strecken ak_1, k_1k_2 ... so bestimmt, daß sie nach diesem Maßstabe den Werthen

$$\frac{K}{r^2} = \frac{K}{0{,}25\,.\,0{,}25} = 16\,K$$

entsprechen, wenn mit K der Flächeninhalt der einzelnen Elemente der Belastungsfläche A_1BA_2 bezeichnet ist. Man erhält also beispielsweise die Strecke k_4k_5, wenn man das Trapez $a_4a_4'a_5'a_5$ in ein Rechteck von der Breite 1 m verwandelt. Mißt man die erhaltene Höhe h dieses Rechtecks nach einem Maßstabe, dessen Einheiten in dem Verhältnisse $\frac{1}{r^2}$ kleiner sind, als diejenigen des Momentenmaßstabes, so daß also danach in dem vorliegenden Falle 1 mm $= \frac{400 \text{ mkg}}{{}^1/_{16} \text{ qm}} = 6400$ kg pro Meter ist, so hat man das so gewonnene Resultat nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe (1 mm = 10 Tonnen) als k_4k_5 auf ak_7 abzutragen. In der Figur ist

$$h = \frac{a_4a_4' + a_5a_5'}{2} \cdot a_4a_5 = 7{,}2 \text{ mm},$$

daher

$$k_4k_5 = h\,\frac{6400}{10\,000} = 4{,}6 \text{ mm}.$$

Was die Höhenlage des Pols O anbetrifft, so hat man dieselbe so zu wählen, daß die Horizontale durch den Pol die Verticalkraft ak_7 in einem Punkte m so trifft, daß die Abschnitte am und mk_7 den Auflagerdrucken gleich sind, welche die Belastungsfläche A_1BA_2 in A_1 und A_2 erzeugt. Um diesen Punkt m zu finden, denkt man sich das Gewicht der Belastung in dem leicht anzugebenden Schwerpunkte S des Dreiecks A_1BA_2 wirkend, und zieht durch irgend welchen Punkt γ der Schwerrichtung zwei

Gerade γA_1 und γA_2 nach den Auflagern. Legt man sodann im Kräftepolygone durch a und h_7 Parallelen $a\gamma'$ und $k_7\gamma'$ zu jenen Linien, so liefert die Projection des Durchschnittspunktes γ' auf $a\,k_7$ in m den gesuchten Theilpunkt, in dessen Horizontallinie der Pol O in der oben ermittelten Poldistanz angenommen werden muß.

Nachdem das Kräftepolygon in dieser Weise festgestellt ist, kann die Zeichnung des Seilpolygons in der bekannten Art geschehen, indem man, von A_1 aus beginnend, Parallelen $A_1 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$ . . . mit den Polstrahlen Oa, Ok_1, Ok_2 . . . zieht, dann muß der gewählten Lage von O entsprechend die durch m_7 mit dem letzten Polstrahle $O\,k_7$ gezogene Parallele durch den Punkt A_2 gehen, indem die Schlußlinie des Seilpolygons $A_1 m_1 m_2$ . . . A_2 mit der horizontalen Balkenaxe $A_1 A_2$ zusammentreffen muß.

Das erhaltene Seilpolygon hüllt die dem Balken zugehörige Seilcurve ein, welche man erhalten würde, wenn die Theilung der Belastungsfläche in unendlich viele unendlich schmale Streifen vorgenommen werden könnte. Jede Seite des Polygons ist eine Tangente an die Seilcurve, und es ist ersichtlich, daß irgend eine Polygonseite, wie z. B. $m_5 m_6$, die Seilcurve in dem Punkte n_5 berührt, durch welchen die verticale Theilungslinie $a_5 a_5'$ hindurchgeht. Dementsprechend ist die erste Polygonseite $A_1 m_1$ eine Tangente in A_1 und die letzte Seite $m_2 A_2$ eine Berührungslinie in A_2 an die Seilcurve. Es ist mit Bezug hierauf leicht, die Seilcurve mit genügender Sicherheit in das Polygon einzuzeichnen, wenn die Anzahl der Elemente, in welche die Belastungsfläche getheilt wurde, nicht zu klein angenommen ist. In der Figur I sind die Punkte, wie n_5, in welchen die Seilcurve die Polygonseiten berührt, durch kleine Kreise angedeutet.

Die so erhaltene Curve giebt nach dem Vorstehenden eine Darstellung der elastischen Durchbiegungen des Balkens an jeder Stelle, und zwar ist im vorliegenden Falle, in welchem das Verhältniß der Kräftemaßstäbe für H und K gleich dem Verjüngungsverhältnisse der Abscissen in I (1 : 100) gewählt wurde, an jeder Stelle die Durchbiegung durch die Ordinate der Seilcurve daselbst unmittelbar in natürlicher Größe gegeben. Die größte Durchbiegung $f = FF'$ des Balkens erhält man offenbar für denjenigen Punkt F, in welchem die Seilcurve eine mit der Schlußlinie $A_1 A_2$ parallele Tangente hat, diese Durchbiegung bestimmt sich nach der Figur zu nahezu 3 mm und zwar findet sie sich hier nicht im Angriffspunkte C der Kraft P, auch nicht in der Mitte M, sondern in einem Punkte F, welcher zwischen C und M gelegen ist. Nur wenn die Kraft P in der Mitte des Balkens angreift, tritt auch in der Mitte die größte Durchbiegung ein. Diese Durchbiegung würde im vorliegenden Falle rechnerisch zufolge §. 35. 3, zu

$$f = \frac{5000 \, . \, 5^3}{48 \, . \, 0{,}000\,2187 \, . \, 18\,000 \, . \, 1000^2} = 0{,}0033 \text{ m} = 3{,}3 \text{ mm}$$

sich ergeben.

Die Seilcurve ist, wie schon bemerkt wurde, nicht mit der elastischen Linie übereinstimmend oder geometrisch ähnlich, sondern ihre Ordinaten sind in dem Verhältnisse der beiden Kräftemaßstäbe $\left(\frac{1}{v} = 100\right)$ vergrößert. Wenn daher die Neigungen der ersten und der letzten Polygonseite gegen den Horizont mit α_1' und α_2' bezeichnet werden, man also

$$m_1 A_1 A_2 = \alpha_1' \text{ und } m_7 A_2 A_1 = \alpha_2'$$

hat, so bestimmen sich die Neigungen α_1 und α_2 der elastischen Linie an den Enden in A_1 durch

$$tg\,\alpha_1 = v\,tg\,\alpha_1' = 0{,}01\,tg\,\alpha_1'$$

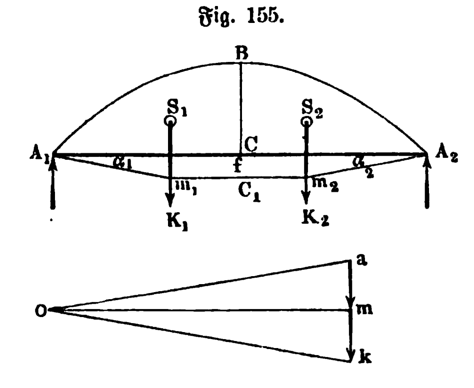
und in A_2 durch

$$tg\,\alpha_2 = v\,tg\,\alpha_2' = 0{,}01\,tg\,\alpha_2' \text{ u. s. w.}$$

Wenn die beiden Auflager A_1 und A_2 nicht, wie hier angenommen wurde, in einer Horizontallinie liegen, so ändert sich die Construction nur in der Beziehung, daß der Pol O des Kräftepolygons nicht in der durch den Punkt m gelegten Horizontallinie, sondern da anzunehmen ist, wo eine durch m mit $A_1 A_2$ gezogene Parallele diejenige Verticallinie schneidet, welche im Abstande gleich der Poldistanz $H = FE$ von der Kräftelinie $a k_7$ gezogen ist.

Die hier angeführte Construction giebt Aufschluß über den ganzen Verlauf der elastischen Linie. Wenn es indessen nur darauf ankommt, die größte Durchbiegung f derselben kennen zu lernen, so läßt sich die Zeichnung in allen den Fällen einfacher ausführen, in denen man von vornherein diejenige Stelle kennt, für welche die Durchbiegung ihren größten Werth annimmt. Es sei z. B. $A_1 A_2$, Fig. 155, ein auf zwei in gleicher Höhe befindlichen Stützen ruhender Balken von der

Fig. 155.



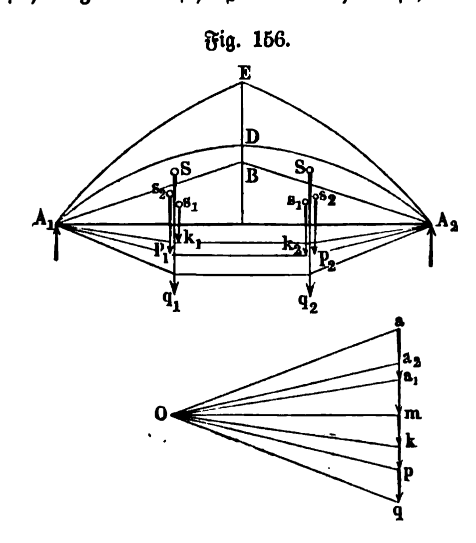
Länge $A_1 A_2 = l$, welcher durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung von q Kilogramm pro laufenden Meter belastet ist, so liegt die größte Durchbiegung in der Mitte, für welche das Moment seinen Maximalbetrag

$M = q\frac{l^2}{8} = CB$ annimmt. Zeichnet man durch A_1, B und A_2 eine Parabel mit der Axe in BC, also dem Scheitel in B, so erhält man die zugehörige Momentenfläche, deren Inhalt durch $\frac{2}{3}.CB.A_1A_2 = \frac{1}{12}ql^3$ gegeben ist. Trägt man daher wieder auf der Verticallinie ak nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe die Strecke

$$ak = \frac{1}{12}\frac{ql^3}{r^2}$$

ab, und macht auf der Horizontalen durch die Mitte m von ak die Poldistanz $mO = FE$, wobei r und F aus dem bekannten Trägheitsmomente $T = Fr^2$ zu entnehmen sind, so erhält man, mit Hülfe der in den Schwerpunkten S_1 und S_2 der Segmenthälften anzunehmenden Belastungen K_1 und K_2 das Seilpolygon $A_1 m_1 m_2 A_2$, an welches die Seilcurve in A_1, C_1 und A_2 sich tangential anschließt. Man hat also, wie im vorhergehenden Beispiele, die Durchbiegung f in der Mitte durch CC_1 und die Neigung der elastischen Linie gegen den Horizont in A_1 und A_2 durch $v\alpha_1'$ und $v\alpha_2'$ gefunden.

Fig. 156.

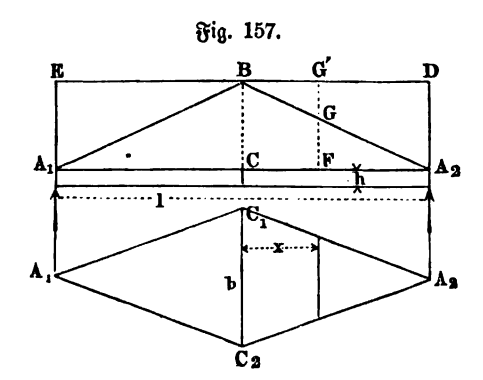


Wenn ein Balken A_1A_2, Fig. 156, durch mehrere Kräfte belastet ist, z. B. durch sein Eigengewicht pl und durch eine concentrirte Kraft K in der Mitte C, so kann man die beiden Momentenflächen A_1DA_2 der gleichförmig vertheilten und A_1BA_2 der concentrirten Belastung durch Summirung der Ordinaten zu einer resultirenden Momentenfläche A_1EA_2 vereinigen, und nun wie oben verfahren, indem man das Seilpolygon $A_1q_1q_2A_2$ mit Hülfe des Kräftepolygons Oaq bestimmt, in welchem letzteren aq der resultirenden Momentenfläche A_1EA_2 entspricht. Es ist auch ersichtlich, daß man zu demselben Resultate gelangen wird, wenn man für die einzelnen Belastungen mit demselben Horizontalzuge mO ihre besonderen Seilpolygone zeichnet und deren Ordinaten summirt. So stellt in der Figur $A_1k_1k_2A_2$ das mit Hülfe des Kräfteplans Oa_1k gezeichnete Seilpolygon für die concentrirte

Kraft K vor, während $A_1 p_1 p_2 A_2$ der gleichförmigen Belastung durch das Eigengewicht $p\,l$ entspricht, für welche das Kräftepolygon durch $O\,a_2\,p$ gegeben ist.

Wenn der Querschnitt des Trägers für verschiedene Punkte verschieden ist, wie z. B. bei der Dreiecksfeder, Fig. 157, deren Breite in der Mitte $C_1 C_2 = b$ und deren constante Stärke h ist, so hat man die Werthe $\frac{M}{r^2}$ als Ordinaten der Belastungsfläche aufzutragen. So ist für das Beispiel in Fig. 157 das Trägheitsmoment in der Mitte bei C durch

Fig. 157.



$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} h^2 b h = r^2 F;$$

und im Abstande x von der Mitte, woselbst die Breite $b_1 = b \frac{l - 2x}{l}$ ist, durch

$$T_1 = \frac{1}{12} b \frac{l - 2x}{l} h^3 = \frac{1}{12} \frac{l - 2x}{l} h^2 . b h = r_1^2 F$$

gegeben. Nimmt man $F = b h$ gleich dem Querschnitte in C an, und verwendet für das Seilpolygon den constanten Horizontalzug $F E = b h . E$, so hat man die Ordinate $F G$ der dreieckigen Momentenfläche $A_1 B A_2$ im Abstande x von der Mitte in dem Verhältnisse $\frac{1}{r_1^2}$ zu vergrößern, und man erhält, wenn $C B$ als Ordinate $\frac{M}{\frac{1}{12} h^2}$ für die Belastungsfläche in C angenommen wird, die Ordinate in F zu

$$F G' = F G \frac{l}{l - 2x} = C B,$$

d. h. die Belastungsfläche ist durch das Rechteck $A_1 E D A_2$ dargestellt. Wollte man dagegen die Dreiecksfläche $A_1 B A_2$ der Momente direct als die Belastungsfläche durch die Ordinaten $\frac{M}{r^2}$ ansehen, d. h. r^2 für alle Querschnitte constant gleich $\frac{1}{12} h^2$ annehmen, so hätte man für den Querschnitt durch F einen Horizontalzug

$$H_1 = \frac{l - 2x}{l} b h E$$

zu benutzen. Im vorliegenden Falle wird das erstgedachte Verfahren mit Verwendung eines constanten Horizontalzuges das bequemere sein, in manchen Fällen kann es sich jedoch empfehlen, den Horizontalzug H veränderlich zu machen, indem man die Momentenfläche direct als die für die elastische Linie geltende Belastungsfläche verwendet.

Die im Vorstehenden erläuterte graphische Methode zur Bestimmung der elastischen Linie wird man in den einfachen Fällen, welche behufs der Verdeutlichung hier betrachtet wurden, zwar kaum zur Bestimmung der Durchbiegungen von Trägern benutzen, da in diesen Fällen die bekannten einfachen Formeln in der Regel das Resultat schneller ergeben. Dagegen erleichtert die graphische Methode die Untersuchung wesentlich in allen den Fällen, wo die Elasticitätsverhältnisse benutzt werden müssen, um die unbekannten Biegungsmomente und Auflagerdrucke zu ermitteln, also insbesondere bei der Prüfung der continuirlichen Träger, wo die Rechnung bei einer größeren Anzahl von Stützen sehr weitläufig wird, wie aus §. 39 zu ersehen ist. Es soll daher die hier angegebene graphische Methode noch besonders in ihrer Anwendung auf continuirliche Träger besprochen werden.

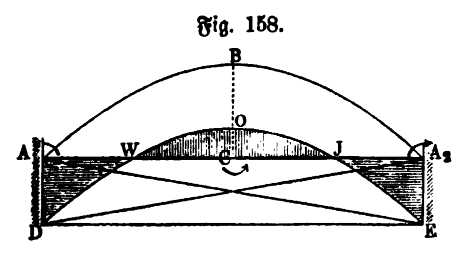
§. 42. **Continuirliche Träger.** Die Belastung eines auf zwei Stützen frei aufruhenden Trägers ruft in der Strecke zwischen den Stützen Momente hervor, in Folge deren der Balken eine nach unten hin convexe Krümmung annimmt. Ueber den Stützen treten Momente nicht auf, vielmehr werden sich hier die Enden unter gewissen Neigungen gegen den Horizont einstellen, die von der Art der Belastung abhängen. Wenn der Träger indessen an den Enden in gewisser horizontaler oder geneigter Richtung eingespannt ist, so kann man sich den durch die Einspannung auf den Träger ausgeübten Zwang als die Wirkung von Momenten denken, welche eine derartige Biegung auf die Enden ausüben, daß dieselben in Folge davon aus denjenigen Neigungen, welche die Balkenenden bei freier Auflagerung durch die Belastung anzunehmen veranlaßt werden, zurückgebogen werden in diejenigen Richtungen, unter welchen die Einklemmung geschehen ist. Diese Momente haben also eine Drehungsrichtung, der zufolge sie den Balken nach oben convex zu biegen streben, welche daher der Drehungsrichtung der Belastungsmomente entgegengesetzt ist.

In ganz gleicher Weise sind die Zwischenstützen der continuirlichen Träger zu beurtheilen, indem auch hier jedes mittlere Feld, d. h. ein von zwei Zwischenstützen begrenztes, wie ein an den Enden eingespannter Balken zu betrachten ist, auf dessen Enden Momente wirken, die hier aber nicht mehr durch Einmauerung, sondern durch die Einwirkung der beiderseits sich an-

schließenden belasteten Strecken erzeugt werden. Es sind daher auch über allen Zwischenstützen Momente wirksam, die im Allgemeinen die entgegengesetzte Drehungsrichtung von derjenigen haben, welche von den durch die Belastung zwischen den Stützen hervorgerufenen Momenten angestrebt wird. Wie im Vorhergehenden immer geschehen, sollen auch in der Folge die Momente positive oder negative heißen, je nachdem sie, wie die Belastungsmomente, dem Balken eine positive, d. h. nach oben concave oder, wie die Stützenmomente, eine negative, nach unten hin concave Krümmung zu ertheilen streben. Auch sollen im Folgenden in graphischen Darstellungen die positiven Momente aufwärts, die negativen abwärts von der Abscissenaxe angetragen werden.

Zur Erläuterung sei $A_1 A_2$, Fig. 158, ein an den Enden horizontal eingespannter, durch eine gleichmäßig vertheilte Last q pro Längeneinheit belasteter Balken von der Länge l. Die positive Momentenfläche ist in diesem Falle bekanntlich durch die Parabel $A_1 B A_2$ mit der mittleren Ordinate $CB = q\frac{l^2}{8}$ dargestellt. Durch die Einspannung der Enden werden daselbst nach §. 35 negative Momente $M_1 = M_2 = q\frac{l^2}{12}$ hervorgerufen. Jedem solchen Pfeilermomente entspricht als Momentenfläche für den Balken eine Dreiecksfläche von der Länge l zur Basis und einer Höhe gleich dem Momente an der Einmauerungsstelle. Es ist z. B. für das Moment M_1 in A_1 die Momentenfläche durch das Dreieck $A_1 D A_2$ und für das Moment M_2 in A_2 durch das Dreieck $A_2 E A_1$ dargestellt, wenn nach dem gewählten Maßstabe $A_1 D = M_1$ und $A_2 E = M_2$ gemacht ist.

Fig. 158.

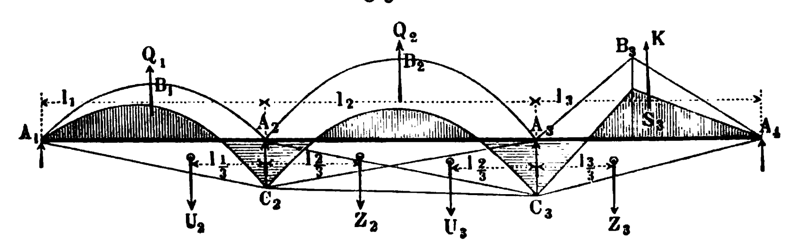


Man kann die beiden negativen Momentenflächen einfach addiren, wenn man DE zieht, indem man für $A_2 E A_1$ das flächengleiche Dreieck $A_2 E D$ einführt, und man erhält auf diese Weise als negative Momentenfläche des eingespannten Balkens das Trapez $A_1 A_2 E D$, welches in dem vorliegenden Falle, wo die Anordnung und Belastung symmetrisch zur Mitte C ist, wegen der Gleichheit von M_1 und M_2 zu einem Rechtecke wird. Wenn man nun ebenfalls eine Summirung der positiven Momentenfläche $A_1 B A_2$ mit der negativen Momentenfläche $A_1 A_2 E D$ vornimmt, was einfach dadurch geschieht, daß man die Parabel $A_1 B A_2$ ohne Formänderung mit dem Punkte A_1 nach D und mit dem Punkte A_2 nach E herunterrückt, so erhält man in $A_1 D W O J E A_2$ die bekannte Momentenfläche für den beiderseits ein-

gemauerten, gleichförmig belasteten Balken. Aus dieser Momentenfläche, welche aus einem positiven Theile WOJ und zwei negativen Stücken A_1WD und A_2JE besteht, erkennt man, daß der Balken in dem mittleren Theile WJ convex nach unten und an den Enden convex nach oben gebogen wird, und daß in W und J die beiden Inflexionspunkte der elastischen Linie liegen, wo das Moment Null, also der Krümmungsradius unendlich groß ist, so daß daselbst also die entgegengesetzten Krümmungen in einander übergehen.

Demgemäß hat man sich auch bei einem continuirlichen Träger, wie demjenigen $A_1A_2A_3A_4$, Fig. 159, die Anstrengungen hervorgebracht zu

Fig. 159.



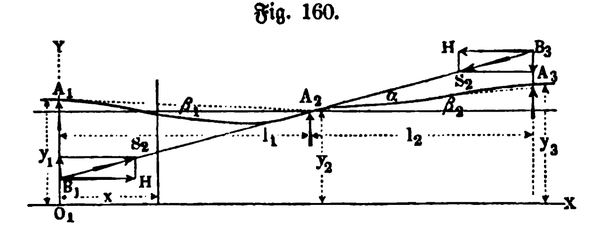
denken aus den positiven Momenten für die Belastungen Q und den negativen Momenten der Stützen. Die positiven Momente sind beispielsweise in der Figur durch die Parabelflächen $A_1B_1A_2$ und $A_2B_2A_3$ für die beiden ersten Strecken entsprechend einer gleichmäßig vertheilten Belastung, und für die dritte Strecke durch das Dreieck $A_3B_3A_4$ entsprechend einer in B_3 wirkenden concentrirten Last dargestellt. Die Momente über den Zwischenstützen, M_2 in A_2 und M_3 in A_3 rufen nach dem Vorstehenden in den Balkenstrecken die durch die Dreiecke $A_2C_2A_1$ und $A_2C_2A_3$, sowie $A_2C_3A_3$ und $A_3C_3A_4$ dargestellten Momente hervor. Die Summirung aller Momentenflächen ist aus der Figur ersichtlich, und es sind darin auch durch verschiedene Schraffirung die positiven Momente von den negativen unterschieden.

Es sei nun angenommen, daß die Ordinaten dieser sämmtlichen Momentenflächen den Größen $\frac{M}{r^2}$ proportional gewählt seien, so kann man nach dem Vorstehenden diese Flächen als die Belastungsflächen der elastischen Linie betrachten, welche sich als Seilcurve für den Horizontalzug FE zeichnet, wenn wieder, wie mehrfach angegeben, $Fr^2 = T$ das Trägheitsmoment des Balkens bedeutet. Da es im Folgenden weniger darauf ankommt, die elastische Linie selbst in ihrem Verlaufe kennen zu lernen, es sich vielmehr in der Regel nur um die Ermittelung der Momente an einzelnen Stelen, ins-

besondere über den Stützen handelt, so wird es genügen, die durch die einzelnen Belastungsflächen dargestellten Belastungen in den Schwerpunkten dieser Flächen concentrirt anzunehmen. Demgemäß wirken die den gleichförmig vertheilten Lasten zukommenden Kräfte Q_1 und Q_2 in den Mitten von A_1A_2 und A_2A_3, während die Belastung K_3 in dem Schwerpunkte S_3 des Dreiecks $A_3B_3A_4$ wirksam zu denken ist. Die mit U und Z bezeichneten negativen Belastungen durch die Stützenmomente wirken ebenfalls in den Schwerpunkten der betreffenden Dreiecke, also in Abständen von der betreffenden Stütze, welche dem dritten Theile der zugehörigen Felderweite gleichkommen. Die Belastungen durch die positiven Momente Q und K sind nach dem oben Bemerkten natürlich aufwärts gerichtet anzunehmen, da diese Anstrengungen positive Krümmungen hervorzurufen bestrebt sind.

Betrachtet man nunmehr irgend welche zwei benachbarte Strecken $A_1A_2A_3$, Fig. 160, der elastischen Linie eines continuirlichen Trägers als eine Seil-

Fig. 160.



curve mit dem horizontalen Zuge FE und der Belastungsordinate $q = \frac{M}{r^2}$, so ergiebt sich ohne Weiteres aus der Figur das Folgende. Man kann den Träger in A_2 zerschneiden, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn man an der Schnittstelle an jedem Ende der dadurch gebildeten Trägertheile eine Kraft gleich derjenigen Spannung S_2 anbringt, welche vor der Trennung an dieser Stelle vorhanden war. Denkt man die in der Richtung der elastischen Linie in A_2 anzunehmende Kraft S_2 für das Balkenstück $A_1 A_2$ in B_1 wirksam, und zerlegt sie in ihre verticale und ihre horizontale Componente, welche letztere $H = FE$ ist, so hat man für das Gleichgewicht des Balkentheils A_1A_2 die Momentengleichung in Bezug auf A_1

$$H . A_1 B_1 = \int_0^{l_1} q x \partial x,$$

oder da, unter α den Winkel der Tangente an die elastische Linie in A_2 gegen den Horizont verstanden, $B_1 A_1 = l_1 tg \alpha + y_1 - y_2$ ist,

$$\int_0^{l_1} q x \partial x - H (l_1 tg\,\alpha + y_1 - y_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In gleicher Weise findet man die Momentengleichung für das Balkenstück $A_2 A_3$ in Bezug auf A_3, wenn man die auf dasselbe wirkende Kraft S_2 in B_3 angreifend denkt und in ihre Componenten zerlegt:

$$\int_0^{l_2} q x \partial x + H (l_2 tg\,\alpha + y_2 - y_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Durch die Verbindung von (1) und (2) entfernt man $tg\,\alpha$ und erhält

$$\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} q x \partial x + \frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} q x \partial x + H \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2}\right) = 0, \quad (3)$$

eine Gleichung, welche zu der in §. 37 angegebenen Clapeyron'schen Formel führt, sobald man, wie dort geschehen, in ihr die beiden Integrale als die statischen Momente der Belastungsflächen der beiden Balkenstrecken $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ in Bezug auf A_1 und bezw. A_3 bestimmt.

Um die Gleichung (3) zu deuten, kann man bemerken, daß $\int_0^{l_1} q x \partial x$ das statische Moment der Belastungsfläche der Strecke $A_1 A_2$ in Bezug auf A_1, folglich $\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} q x \partial x$ den von dieser Belastungsfläche in A_2 erzeugten Druck auf diese Stütze bedeutet. Ebenso stellt das zweite Integral $\frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} q x \partial x$ den von der Belastungsfläche der Strecke $A_2 A_3$ auf A_2 ausgeübten Druck vor. Der dritte Summand ferner $H \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2}\right)$ ist der algebraische Ausdruck für denjenigen Druck, welchen ein Seil mit dem Horizontalzuge H auf den Punkt A_2 ausübt, wenn dasselbe durch die drei Stützpunkte A_1, A_2 und A_3 gelegt ist. Letzteres erkennt man sofort aus den Eigenschaften der Seilpolygone, wenn man die geraden Verbindungslinien $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ zieht, welche mit der Horizontalen bezw. die Winkel β_1 und β_2 bilden mögen. Die Spannungen S_1 und S_3 in A_1 und A_3 haben die horizontale Componente H, folglich die verticalen Componenten $H tg\,\beta_1$ und $H tg\,\beta_3$, oder, da nach der Figur abgesehen vom Vorzeichen

$$tg\,\beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_1} \text{ und } tg\,\beta_2 = \frac{y_2 - y_3}{l_2}$$

ist, so folgt die von beiden Seilen auf A_2 ausgeübte Verticalkraft durch

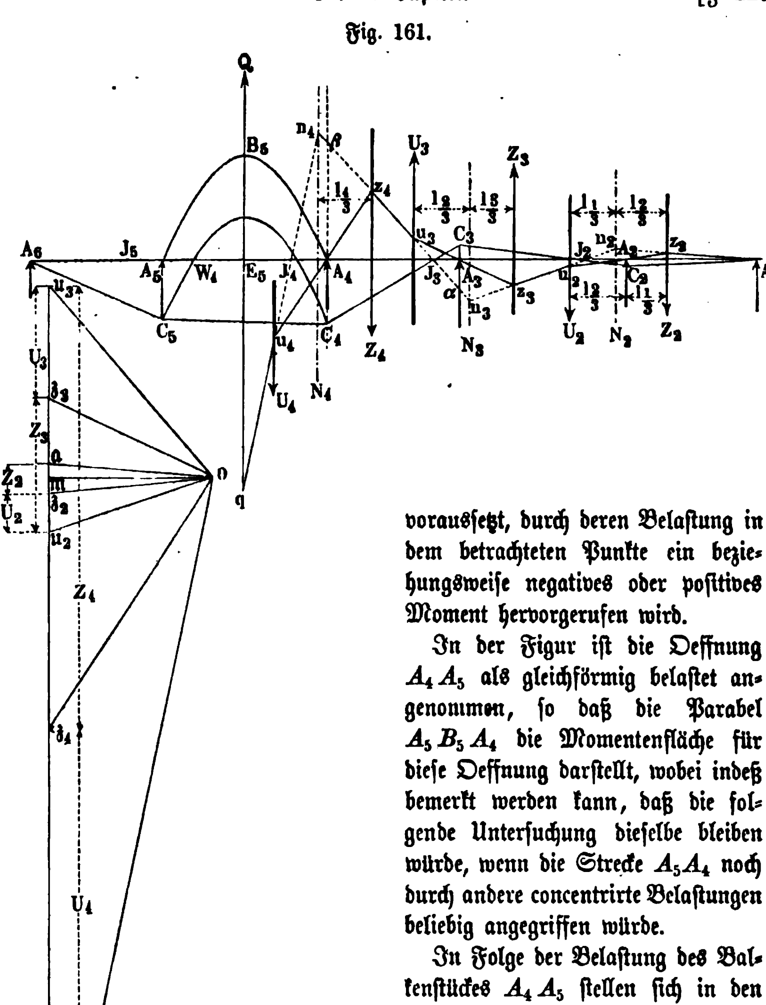
$$H\left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2}\right).$$

Daß dieser Werth nach der Figur, worin A_2 unterhalb A_1 und A_3 liegt, negativ wird, deutet nur an, daß der Seilzug anstatt eines abwärts wirkenden Druckes eine aufwärts gerichtete Zugkraft auf die Stütze A_2 ausübt. Man kann daher das in (3) enthaltene Resultat dahin aussprechen, daß bei jedem continuirlichen Balken der in Folge der gedachten Belastung durch die Ordinaten $q = \frac{M}{r^2}$ auf einen beliebigen Zwischenpfeiler ausgeübte Druck gleich Null sein muß*). Dieser Satz gewährt ein klares Bild von der Bedeutung der Clapeyron'schen Formel.

Nach dem Vorhergehenden ist nun die Untersuchung eines continuirlichen Trägers verhältnißmäßig einfach durchzuführen. Es sei $A_1 A_2 A_3 \ldots A_6$, Fig. 161 (a. f. S.), ein continuirlicher Balken auf beliebig vielen (in der Figur sechs) Stützen, von denen der Einfachheit wegen angenommen werden soll, daß sie sämmtlich in einer Horizontalen liegen. Von diesem Balken, dessen Strecken bezw. die Weiten l_1, l_2, l_3, l_4 und l_5 haben mögen, werde zunächst angenommen, daß nur eine einzige beliebige Oeffnung belastet sei, die übrigen aber gar keine Belastung, auch nicht durch das Eigengewicht der Construction zu tragen haben. Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt, denn da die als belastet angenommene Oeffnung eine ganz beliebige ist, so kann man auch die Untersuchung so oft wiederholt denken, als Oeffnungen vorhanden sind, indem man jedesmal eine andere Strecke als belastet voraussetzt. Wenn man dann die für diese verschiedenen Einzelbelastungen sich ergebenden Momente in einem beliebigen Punkte des Trägers algebraisch addirt, so findet man in der erhaltenen Summe das Moment in demselben Punkte für den Fall, daß sämmtliche Oeffnungen belastet sind. Aus einer solchen Ermittelung wird sich auch sogleich für jeden Punkt die ungünstigste Belastungsart ergeben. Man erhält nämlich für irgend welchen Querschnitt das größte positive oder negative Biegungsmoment, wenn man alle diejenigen Strecken unbelastet, d. h. nur ihrem Eigengewichte unterworfen

*) Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß hier nicht der Druck gemeint ist, welchen der Balken in Folge seiner Belastung auf den Zwischenpfeiler ausübt, sondern der Druck, welchen die fingirte Belastung durch die Momentenfläche daselbst erzeugt.

Fig. 161.



vorausgesetzt, durch deren Belastung in dem betrachteten Punkte ein beziehungsweise negatives oder positives Moment hervorgerufen wird.

In der Figur ist die Oeffnung $A_4 A_5$ als gleichförmig belastet angenommen, so daß die Parabel $A_5 B_5 A_4$ die Momentenfläche für diese Oeffnung darstellt, wobei indeß bemerkt werden kann, daß die folgende Untersuchung dieselbe bleiben würde, wenn die Strecke $A_5 A_4$ noch durch andere concentrirte Belastungen beliebig angegriffen würde.

In Folge der Belastung des Balkenstückes $A_4 A_5$ stellen sich in den Stützen A_4 und A_5 wegen der oben besprochenen Eigenschaft continuirlicher Träger gewisse vorläufig noch unbekannte und zwar negative Momente M_4 und M_5 ein, für welche etwa die Größen

$$\frac{M_4}{r^2} = A_4 C_4 \text{ und } \frac{M_5}{r^2} = A_5 C_5$$

als Ordinaten nach demselben Maß-

stabe aufgetragen sein mögen, nach welchem die Momentenfläche $A_4 B_5 A_5$ der Belastung Q gezeichnet worden ist. Das Moment M_4 in A_4 ruft nunmehr in der folgenden Strecke $A_4 A_3$ Momente hervor, welche durch das Dreieck $A_4 C_4 A_3$ dargestellt sind, und man kann sich das Gewicht dieses Dreiecks in seinem Schwerpunkte, also im Abstande $^1/_3\, l_3$ von A_4 im Betrage

$$Z_4 = {}^1/_2 \,.\, A_4 C_4 \,.\, l_3 = {}^1/_2\, M_4 \,.\, l_3$$

wirksam denken.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß das in A_4 hervorgerufene Moment M_4 in der folgenden Stütze A_3 ebenfalls das Auftreten eines gewissen Momentes

$$M_3 = A_3 C_3$$

veranlassen muß, und zwar muß dieses Moment M_3 die entgegengesetzte Drehungsrichtung von M_4 haben, weil nur dann die oben gefundene Bedingung erfüllt sein kann, wonach in der Stütze A_3 der von den Momentenflächen ausgeübte Druck gleich Null sein muß. Es ist leicht erkennbar, daß diese Bedingung nur bei entgegengesetzten Vorzeichen der von M_4 und M_3 erzeugten Druckcomponenten, d. h. also bei entgegengesetzten Drehungsrichtungen der Momente M_4 und M_3 erfüllbar sein wird. Denkt man sich daher das Moment $\frac{M_3}{r^2}$ als $A_3 C_3$ nach oben hin aufgetragen, so finden sich die beiden Momentenflächen, welche M_3 für die angrenzenden Strecken erzeugt, in den Dreiecken

$$A_3 C_3 A_4 = {}^1/_2\, \frac{M_3}{r^2}\, l_3 = U_3$$

im Abstande $^1/_3\, l_3$ links von A_3 und

$$A_3 C_3 A_2 = {}^1/_2\, \frac{M_3}{r^2}\, l_2 = Z_3$$

im Abstande $^1/_3\, l_2$ rechts von A_3 beide positiv, also aufwärts wirkend. In Folge dieses Momentes M_3 in A_3 wird ebenfalls in A_2 ein gewisses Moment M_2 hervorgerufen werden, und dieselbe Schlußfolgerung, welche für A_3 angestellt wurde, gilt auch für A_2, d. h. das hier auftretende Moment M_2 wird die entgegengesetzte Richtung von M_3 haben müssen, wenn in A_2 der Auflagerdruck der Momentenflächen Null werden soll. Es sei nach dem gewählten Maßstabe etwa

$$A_2 C_2 = \frac{M_2}{r^2}$$

nach der negativen Richtung aufgetragen, so stellen die beiden Kräfte

$$\frac{1}{2}\,\frac{M_2}{r^2}\,l_2 = U_2 \text{ im Abstande } \frac{l_2}{3} \text{ von } A_2$$

und

$$\frac{1}{2}\,\frac{M_2}{r^2}\,l_1 = Z_2 \text{ im Abstande } \frac{l_1}{3} \text{ von } A_2$$

die Belastungen der elastischen Linie dar, welche durch M_2 erzeugt werden. In der Endstütze A_1 kann ein Moment nicht auftreten, es wird daselbst also auch ein gewisser Auflagerdruck stattfinden, welcher, von dem Dreiecke $A_2 C_2 A_1$ herrührend, den Betrag $\frac{1}{3} Z_2$ haben muß.

Die Aufgabe nun, die noch unbekannten Momente M_2, M_3 und M_4 aus der bekannten Belastung Q zu bestimmen, kann als gelöst betrachtet werden, sobald es möglich ist, mit einem beliebig anzunehmenden Horizontalzuge H ein Seilpolygon für das Balkenstück $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu entwerfen, denn alsdann findet man in bekannter Weise die Größen U und Z, also auch die Momente M_2, M_3, M_4, wenn man mit den einzelnen Seiten des Seilpolygons durch den Pol des Kräftepolygons Parallellinien legt.

Um ein solches Seilpolygon zu zeichnen, möge zunächst vorausgesetzt werden, das Moment M_2 über A_2 sei gegeben, so ist dadurch auch die Größe des Dreiecks $A_2 C_2 A_1$, also die Kraft Z_2 bekannt. Man denke sich nun nach einem beliebigen Maßstabe diese Kraft Z_2 gleich der Strecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}_2$ auf einer Verticalen angetragen, und nehme einen Pol $\mathfrak{o}$ in beliebigem Abstande von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}_2$ so an, daß die Horizontale $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$ die Strecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}_2$ in dem Verhältnisse theilt, in welchem die von der Kraft Z_2 in A_1 und A_2 erzeugten Stützendrucke stehen, d. h. also, man mache $\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} = \frac{1}{3}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}_2$. Zieht man nun durch A_1 eine Parallele $A_1 z_2$ mit $\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}$, so ist z_2 ein Punkt des Seilpolygons, und wenn man von z_2 eine Gerade durch A_2 zieht, welche Gerade in Folge des gewählten Poles $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}\,\mathfrak{z}_2$ parallel ausfallen muß, so erhält man in dem Durchschnitte u_1 mit der Richtungslinie von U_2 eine zweite Ecke des Seilpolygons., Die darauf folgende in u_2 sich anschließende Seite des Seilpolygons ist nun leicht mit Rücksicht darauf zu zeichnen, daß diese Seite, gehörig verlängert, mit der Verlängerung von $A_1 z_2$ sich in einem Punkte der verticalen Mittelkraft N_2 aus U_2 und Z_2 treffen muß. Die Lage dieser in der Figur punktirten Mittelkraft N_2 läßt sich aber ohne Weiteres angeben, denn da man das Verhältniß der Seitenkräfte $\frac{U_2}{Z_2} = \frac{l_2}{l_1}$ kennt, so braucht man nur den Abstand $\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{3}$ dieser beiden Kräfte U_2 und Z_2 in dem umgekehrten Verhältnisse derselben, also im Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ zu theilen, und erhält also die Richtung der Mittelkraft N_2 im Abstande

$\frac{l_1}{3}$ von U_2 und $\frac{l_2}{3}$ von Z_2. Verlängert man daher $A_1 z_2$ bis zum Durchschnitte n_2 mit N_2, so ergiebt sich aus $n_2 u_2$ die Richtung der folgenden Polygonseite, welche die Kraft Z_3 in z_3 schneidet. Die weitere Verzeichnung des Seilpolygons erfolgt in gleicher Art; indem man von z_3 durch A_3 zieht, erhält man den Durchschnitt u_3 in der Kraft U_3 und hat von u_3 aus die folgende Polygonseite so zu ziehen, daß dieselbe durch den Schnittpunkt n_3 der verlängerten Polygonseite $u_2 z_3$ mit der Mittelkraft N_3 aus Z_3 und U_3 hindurchgeht. Hierbei ist die Lage dieser Mittelkraft N_3 wieder so zu bestimmen, daß ihr Abstand von U_3 gleich $\frac{l_2}{3}$, und derjenige von Z_3 gleich $\frac{l_3}{3}$ anzunehmen ist. Von der Ecke z_4 des Polygons zieht man ferner durch A_4 bis zum Durchschnitte u_4 mit U_4 und fügt die folgende $u_4 q$ wiederum in solcher Richtung an, daß $q u_4$ verlängert durch den Schnittpunkt n_4 des Seiles $u_3 z_4$ mit der Mittelkraft N_4 aus Z_4 und U_4 hindurchgeht. Für diese Mittelkraft N_4 gilt dieselbe Beziehung, wie für N_3 und N_2, ihre Abstände von U_4 und Z_4 sind deren Größen umgekehrt proportional und daher bezw. $\frac{l_3}{3}$ und $\frac{l_4}{3}$.

Auf diese Weise wäre das Seilpolygon $A_1 z_2 u_2 z_3 u_3 z_4 u_4 q$ gefunden, und man würde durch Polstrahlen im Kräftepolygone, die parallel mit den Seilpolygonseiten sind, die Größen U und Z erhalten, wenn eine von diesen Größen, etwa $Z_2 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{z}_2$, oder auch wenn Z_4 bekannt wäre, welche letztere Größe im Kräftepolygone offenbar durch die Strecke $\mathfrak{u}_3 \mathfrak{z}_4$ dargestellt ist, welche die mit den Seiten $z_4 u_3$ und $z_4 u_4$ parallelen Polstrahlen zwischen sich einschließen. Um die Aufgabe als gelöst zu betrachten, ist es also nur nöthig, die noch unbekannte Größe Z_4, d. h. das Moment M_4 in A_4 aus der bekannten Belastung Q der Strecke $A_4 A_5$ zu bestimmen, da alsdann das Kräftepolygon die übrigen Größen U und Z, d. h. die Momente M_3 und M_2 ergiebt. Um nun Z_4 aus Q zu bestimmen, kann man zunächst betreffs des Seilpolygons die folgende Betrachtung anstellen.

Fortsetzung. Die vorstehend mit Hülfe der Mittelkräfte N_2, N_3 und N_4 festgesetzten Seilrichtungen ergeben in der Horizontalen $A_1 A_5$ gewisse Schnittpunkte J_2, J_3 und J_4, welche für die Untersuchung der continuirlichen Träger von besonderer Wichtigkeit sind. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß diese Punkte ganz bestimmte Festpunkte sind, zu denen man immer gelangen wird, wenn man auch ein anderes Seilpolygon, d. h. eine andere Horizontalkraft o m zu Grunde legen würde. Dies erkennt man, wenn man die Bedeutung jedes dieser Punkte J ins Auge faßt, als Angriffspunkt einer Mittelkraft von zwei verticalen Kräften, welche ein constantes §. 43.

Verhältniß zu einander haben. Man ersieht nämlich aus dem Kräftepolygon, daß J_2 der Angriffspunkt derjenigen Mittelkraft ist, welche aus der Verticalkraft $U_2 = \mathfrak{z}_2 \mathfrak{u}_2$ und dem Auflagerdrucke $\mathfrak{m}\,\mathfrak{z}_2 = {}^2/_3\, Z_2$ resultirt, den die Momentenfläche Z_2 auf A_2 ausübt. Denn mit den Polstrahlen $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{u}_2$ sind offenbar die drei Seile $A_2 J_2$, $A_2 u_2$ und $z_3 u_2$ parallel, folglich geht durch den Schnittpunkt J_2 der Endseile $A_2 J_2$ und $z_3 u_2$ die Mittelkraft der beiden genannten Kräfte U_2 und ${}^2/_3\, Z_2$. Diese Kräfte drücken sich nun durch

$$U_2 = {}^1/_2 \frac{M_2}{r^2}\, l_2$$

und

$${}^2/_3\, Z_2 = {}^2/_3 \,.\, {}^1/_2 \frac{M_2}{r^2}\, l_1$$

aus, folglich haben sie ein festes, nur von den Oeffnungsweiten l_1 und l_2 abhängiges Verhältniß

$$\frac{U_2}{{}^2/_3\, Z_2} = \frac{3\, l_2}{2\, l_1}.$$

Daraus folgt aber, daß auch der Punkt J_2 eine ganz bestimmte Lage im ersten Drittel der Länge l_2 von A_2 aus haben muß, welche Lage nicht von der Größe des Momentes M_2, d. h. nicht von der Größe der Belastung Q abhängig ist.

Ebenso erkennt man, daß J_3 der Angriffspunkt der Mittelkraft ist aus der Kraft $U_3 = \mathfrak{z}_3 \mathfrak{u}_3$ und aus $\mathfrak{m}\,\mathfrak{z}_3$, d. h. dem von Z_3 bei einer Zerlegung nach A_3 und J_2 auf A_3 ausgeübten Drucke, denn die drei Seile $A_3 J_3$, $A_3 u_3$ und $z_4 u_3$ sind mit den Polstrahlen $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{z}_3$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{u}_3$ bezw. parallel, folglich muß durch den Schnittpunkt J_3 die Mittelkraft der genannten beiden Seitenkräfte gehen. Da nun auch U_3 und Z_3 ein constantes nur von l_3 und l_2 abhängiges Verhältniß haben, und J_2 als ein fester Punkt erkannt wurde, so findet sich ähnlich wie für J_2 auch, daß J_3 ein fester von der Belastung unabhängiger Punkt sein muß. Gleiches gilt von J_4, durch welchen die Mittelkraft von $U_4 = \mathfrak{z}_4 \mathfrak{u}_4$ und dem von Z_4 bei einer Zerlegung nach A_4 und J_3 auf A_4 ausgeübten Auflagerdrucke $\mathfrak{m}\,\mathfrak{z}_4$ hindurchgeht.

Diese festen Punkte J, welche wegen der später ersichtlichen, ihnen anhaftenden Eigenschaft Inflexions- oder Wendepunkte genannt werden, haben nun die merkwürdige Eigenschaft, daß durch die beiden Abschnitte, in welche ein solcher Punkt die Oeffnungsweite, in welcher er liegt, theilt, gleichzeitig das Verhältniß der beiderseitigen Stützmomente gegeben ist. Es ist also z. B. für J_3 die Gleichung gültig:

$$J_3 A_3 : J_3 A_4 = M_3 : M_4.$$

Diese Beziehung läßt sich leicht aus dem Seilpolygone erkennen. Bekanntlich ist nach den Eigenschaften der Seilcurven das Moment einer Kraft wie U_3 in Bezug auf irgend einen Punkt wie A_3 gleich dem Producte aus dem Horizontalzuge H in die Ordinate $A_3\alpha$, welche auf einer durch A_3 gelegten Verticallinie durch die beiden Seile $u_3 z_3$ und $u_3 z_4$ abgeschnitten wird, zwischen denen die Kraft U_3 enthalten ist *). Man hat daher

$$H . A_3\alpha = U_3 \frac{l_3}{3}.$$

In derselben Weise erhält man aber auch für die Kraft Z_4 in Bezug auf den Punkt A_4:

$$H . A_4\beta = Z_4 \frac{l_3}{3},$$

daher durch Division:

$$\frac{A_3\alpha}{A_4\beta} = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Da nun aber auch

$$A_3\alpha : A_4\beta = J_3 A_3 : J_3 A_4,$$

so folgt die obige Behauptung:

$$\frac{J_3 A_3}{J_3 A_4} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Kennt man daher die Inflexionspunkte J_2, J_3, J_4, so kann man aus einem beliebigen Stützmomente, wie z. B. M_4 in A_4, sofort auch die Größe der Momente M_3 in A_3 und M_2 in A_2 bestimmen, ohne das Seilpolygon zeichnen zu müssen. Denn ist $M_4 = A_4 C_4$ bekannt, so giebt die Gerade $C_4 J_4$ in C_3 das Moment $M_3 = A_3 C_3$, und die durch C_3 und J_2 gelegte Gerade schneidet ebenso auf der Verticalen durch A_2 in C_2 eine Strecke $A_2 C_2$ ab, welche nach dem angenommenen Maßstabe das Moment M_2 daselbst vorstellt.

Die Ermittelung der Inflexionspunkte J verursacht nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeit. Um diese letzteren Punkte festzustellen, zieht man durch einen beliebigen Punkt z_2 der Verticallinie Z_2 im Abstande $\frac{l_1}{3}$ von A_2 zwei Gerade durch A_2 und A_1, und verbindet deren bezügliche

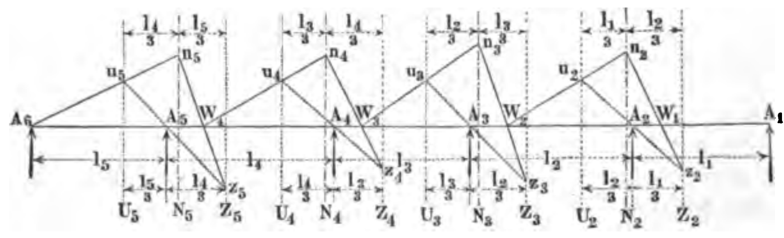
*) Man erkennt die Richtigkeit hiervon sogleich, wenn man die Spannung S_3 des Seiles $u_3 n_3$ in α in ihre horizontale Componente H und ihre verticale Componente V zerlegt, welche letztere für A_3 ein Moment gleich Null hat, so daß für A_3 die Momentengleichung gilt:

$$U_3 . \frac{l_3}{3} = H . A_3\alpha.$$

Durchgangspunkte u_2 durch die Verticallinie U_2 im Abstande $\frac{l_2}{3}$ von A_2 und n_2 durch die Mittelkraft N_2 von Z_2 und U_2 mit einander durch die Gerade $u_2 n_2$, welche in der Horizontalen $A_1 A_5$ den Inflexionspunkt J_2 liefert. Ist J_2 gefunden, so zieht man ebenso durch einen beliebigen Punkt z_3 von Z_3 die beiden Strahlen durch A_3 und J_2, und verbindet den Durchschnitt u_3 von U_3 und $z_3 A_3$ mit demjenigen n_3, in welchem $z_3 J_2$ die Mittelkraft N_3 von U_3 und Z_3 schneidet, um in dem Durchschnitte der Verbindungslinie $u_3 n_3$ mit der Horizontalen $A_1 A_5$ den Inflexionspunkt J_3 zu finden, und sofort findet man J_4 und J_5.

Wenn man die vorstehend angegebene Construction der Fig. 161 in entsprechender Art nochmals in der entgegengesetzten Richtung, d. h. von A_6 nach A_1 fortschreitend vornimmt, so gelangt man in derselben Weise zu einer zweiten Reihe von Wendepunkten W_4, W_3, W_2 und W_1 rechts neben den Zwischenstützen, für welche die Art der Construction aus Fig. 162 ersichtlich

Fig. 162.



und nach dem Vorangegangenen leicht verständlich ist. Man zieht, um diese Wendepunkte W zu erhalten, durch einen beliebigen Punkt u_5 von U_5 zwei Strahlen durch A_6 und A_5 und verbindet deren Schnittpunkte mit N_5 und bezw. Z_5 durch die Gerade $n_5 z_5$, welche in der Axe $A_6 A_1$ den Punkt W_4 ergiebt. Durch W_4 und A_4 zieht man dann wieder von einem beliebigen Punkte u_4 der Verticalen U_4 zwei Strahlen, deren Schnittpunkte n_4 mit N_4 und z_4 mit Z_4 in ihrer Verbindung $n_4 z_4$ den folgenden Wendepunkt W_3 ergeben u. s. w. Für diese Wendepunkte W gelten die nämlichen Beziehungen, welche vorstehend für die Wendepunkte J gefunden wurden, d. h. wenn nur eine einzige Oeffnung des Trägers belastet ist, so werden die **links** von dieser Oeffnung gelegenen Strecken durch die Wendepunkte W in demselben Verhältnisse getheilt, wie dasjenige der Stützmomente über den beiden die betreffende Strecke einschließenden Auflagern ist.

Um nun die durch die Belastung einer Strecke wie $A_4 A_5$, Fig. 163, hervorgerufenen Momente M_4 und M_5 in den beiden Auflagern A_4 und A_5 zu bestimmen, dient ebenfalls die im Vorstehenden gefundene Eigenschaft der Wendepunkte W und J in folgender Art. Es sei die Strecke $A_4 A_5$ in

irgend einem Punkte E_5 durch eine beliebige Belastung K angegriffen, welche daselbst das Moment

$$E_5 B_5 = K \frac{A_4 E_5 \cdot A_5 E_5}{A_4 A_5} = K \frac{a b}{l_4} = k$$

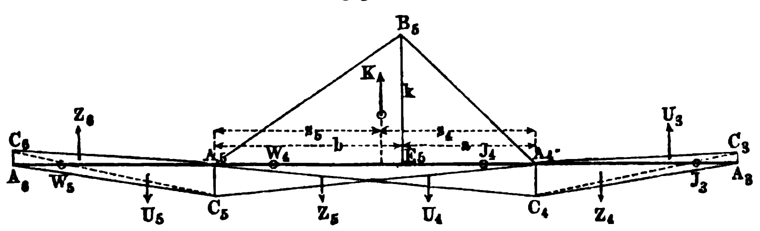
hervorruft, so ist die Belastung der elastischen Linie durch die Dreiecksfläche $A_4 B_5 A_5$ von dem Inhalte $F = k \frac{l_4}{2}$ dargestellt. Sind nun s_4 und s_5 die horizontalen Abstände des Schwerpunktes S dieser Dreiecksfläche von A_4 und A_5, so erhält man die von dieser Momentenfläche auf die Stützen ausgeübten Auflagerdrucke zu

$$k \frac{l_4}{2} \cdot \frac{s_5}{l_4} = k \frac{s_5}{2} \text{ in } A_4$$

und

$$k \frac{s_4}{2} \text{ in } A_5.$$

Fig. 163.



Bezeichnet man nun wieder mit $M_4 = A_4 C_4$ und $M_5 = A_5 C_5$ die noch unbekannten in A_4 und A_5 erzeugten negativen Momente, und ebenso mit $M_3 = A_3 C_3$ und $M_6 = A_6 C_6$ *) die positiven Momente der nächst benachbarten Stützen, so sind die beiden Stützen A_4 und A_5 außerdem noch durch die zugehörigen Dreiecke

$$+ A_4 A_3 C_3 = U_3, \quad - A_4 A_3 C_4 = Z_4,$$
$$- A_4 A_5 C_4 = U_4, \quad - A_4 A_5 C_5 = Z_5,$$
$$- A_5 A_6 C_5 = U_5 \text{ und } + A_5 A_6 C_6 = Z_6$$

belastet, welche mit $^1/_3$ bezw. $^2/_3$ ihres Betrages auf die Stützpunkte drücken. Man findet daher die auf A_4 und A_5 ausgeübten gesammten Auflagerdrucke, welche nach dem oben erkannten Gesetze gleich Null sein müssen, zu:

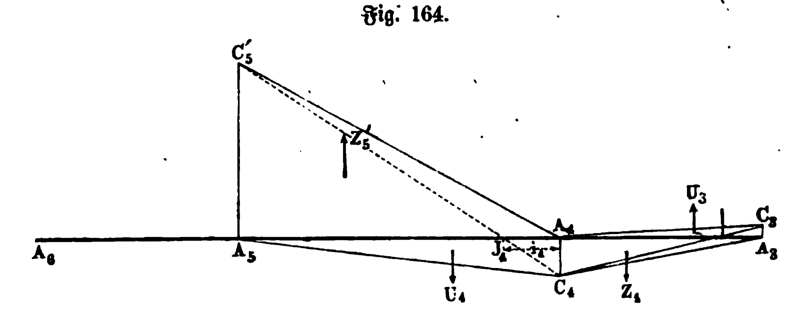
*) Wenn A_6 eine Endstütze ist, wie in Fig. 161, so fällt $M_6 = 0$ aus.

$$A_4 = k\,\frac{s_5}{2} - \frac{Z_5}{3} - 2\,\frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$A_5 = k\,\frac{s_4}{2} - \frac{U_4}{3} - 2\,\frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Denkt man sich jetzt die Belastung durch die Kraft K beseitigt, und statt deren auf den links von A_5 befindlichen Trägertheil äußere Kräfte in solcher Art wirksam, daß in A_4 dasselbe Moment $A_4 C_4 = M_4$ auftritt, welches durch die Belastung K hervorgerufen wird, so muß nach der Eigenschaft der

Fig. 164.



Wendepunkte J in A_5 ein positives Moment $M_5' = A_5 C_5'$, Fig. 164, sich einstellen, welches durch

$$A_5 C_5' = -\frac{l_4 - i_4}{i_4}\, A_4 C_4 = \nu\, M_4$$

ausgedrückt ist, wenn $i_4 = A_4 J_4$ den Abstand des Inflexionspunktes J_4 von A_4 und $\nu = -\frac{l_4 - i_4}{i_4}$ das Verhältniß der beiden Abschnitte $\frac{A_5 J_4}{A_4 J_4}$ bedeutet, in welche die Strecke l_4 durch den Inflexionspunkt J_4 getheilt wird. Die Stütze A_4 ist daher in diesem Falle durch die aus der Fig. 164 ersichtlichen Weise belastet, und man findet nunmehr den dadurch in A_4 hervorgerufenen Auflagerdruck, welcher auch jetzt gleich Null sein muß, zu

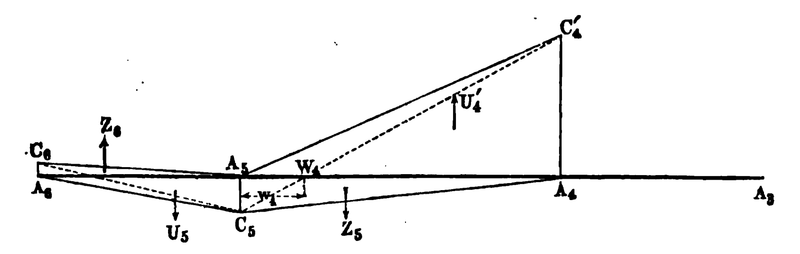
$$A_4 = \frac{Z_5'}{3} - 2\,\frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

Wenn man eine ganz übereinstimmende Betrachtung in Betreff der Stütze A_5 anstellt, d. h. wenn man sich die Belastung K ersetzt denkt durch eine Einwirkung äußerer Kräfte auf das rechts von A_4 gelegene Balkenstück von solcher Art, daß in A_5 das Moment M_5 unverändert wird, so muß für diesen Fall in A_4 ein positives Moment, Fig. 165, $M_4' = A_4 C_4' = \mu\, M_5$ sich einstellen, wenn man mit $\mu = -\frac{A_4 W_4}{A_5 W_4} = -\frac{l_4 - w_4}{w_4}$ das Verhältniß

der Abschnitte bezeichnet, in welches die Strecke l_4 durch den linken Wendepunkt getheilt wird. Es findet sich nunmehr der Auflagerdruck in A_5 zu

$$A_5 = \frac{U_4'}{3} - 2\,\frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2^a)$$

Fig. 165.



Die Vergleichung von (1) und (2) mit (1^a) und (2^a) ergiebt nun:

$$k\,\frac{s_5}{2} = \frac{Z_5' + Z_5}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und

$$k\,\frac{s_4}{2} = \frac{U_4' + U_4}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

oder wenn man

$$Z_5' = \nu\,U_4 = \nu\,M_4\,\frac{l_4}{2}$$

und

$$U_4' = \mu\,Z_5 = \mu\,M_5\,\frac{l_4}{2}$$

einführt,

$$k\,\frac{s_5}{2} = {}^1/_3\,(M_5 + \nu\,M_4)\,\frac{l_4}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

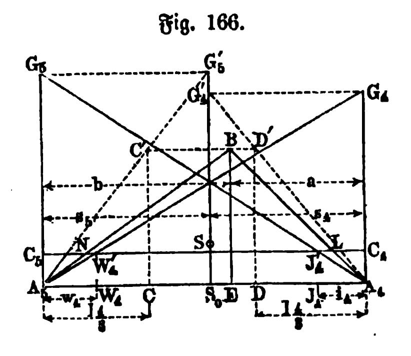
$$k\,\frac{s_4}{2} = {}^1/_3\,(M_4 + \mu\,M_5)\,\frac{l_4}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Aus dem Vorstehenden (3) folgt also, daß der Druck, welchen die Momentenfläche der Belastung K auf eine der beiden Stützen wie A_4 ausübt, gerade so groß ist, wie derjenige, welchen die beiden Momentendreiecke Z_5 und Z_5' auf dieselbe Stütze A_4 hervorbringen. Wenn man daher ein bei A_5 rechtwinkeliges Dreieck von der Basis $A_5A_4 = l_4$ aufsucht, welches in A_4 den Druck $k\,\frac{s_5}{2}$ erzeugt, so erhält man nach (5) in der Höhe oder der anderen Kathete desselben in A_5 die Größe für den Werth $M_5 + \nu\,M_4$. In derselben Weise ergiebt ein Dreieck zu derselben Basis A_5A_4, welches bei A_4 rechtwinkelig ist und in

A_5 den Druck $k\,\frac{s_4}{2}$ ausübt, nach (6) in seiner Höhe bei A_4 den Werth von $M_4 + \mu M_5$.

Diese Dreiecke sind leicht zu construiren, und zwar giebt Mohr dazu die folgende Construction an. Ist $A_4 B A_5$, Fig. 166, die Momentenfläche der Last K, so zieht man in D und C in den Abständen $\frac{l_4}{3}$ von den Stützen Verticallinien, auf welche man die Spitze B des Momentendreiecks nach D' und C' projicirt. Zieht man dann durch die Stützpunkte A_4 und A_5 die Geraden $A_4 D'$ und $A_5 C'$, so schneiden diese auf der Verticalen durch den Schwerpunkt S die gesuchten Höhen $S_0 G_4' = A_4 G_4$ und $S_0 G_5' = A_5 G_5$ ab. Die Richtigkeit dieser Construction erkennt man leicht aus der Figur, welche aus

Fig. 166.



$$S_0 G_4' : D D' = s_4 : \frac{l_4}{3}$$

die Größe

$$S_0 G_4' = 3 \,.\, \frac{k\, s_4}{l_4}.$$

ergiebt. Das Dreieck $A_5 A_4 G_4$ übt daher auf A_5 den Druck

$$\tfrac{1}{3} \,.\, A_4 G_4 \,.\, \frac{l_4}{2} = \frac{k\, s_4}{2},$$

also von derselben Größe, wie das Momentendreieck $A_4 B A_5$ aus.

Hat man die beiden Dreiecke $A_4 A_5 G_4$ und $A_4 A_5 G_5$ gezeichnet, so findet man nach dem Vorstehenden die gesuchten Momente M_4 und M_5 über den Stützen, wenn man durch die Wendepunkte W_4 und J_4 Verticallinien zieht, und die Schnittpunkte W_4' und J_4' mit den Hypotenusen der betreffenden Dreiecke durch eine Gerade $W_4' J_4'$ verbindet. Diese liefert dann in $C_4 A_4$ und $C_5 A_5$ die gesuchten Momente M_4 und M_5.

Es mag hier sogleich bemerkt werden, daß die Spitze B des Momentendreiecks der Last K immer oberhalb der beiden Dreiecksseiten $A_5 G_4$ und $A_4 G_5$ gelegen sein wird, wo auch die Belastung K zwischen A_4 und A_5 wirken möge. In Folge dessen werden die Schnittpunkte L und N niemals zwischen die Wendepunkte J und W, sondern stets zwischen die letzteren und die betreffenden Stützpunkte fallen, eine Eigenschaft, auf welche in der Folge noch Bezug genommen werden wird.

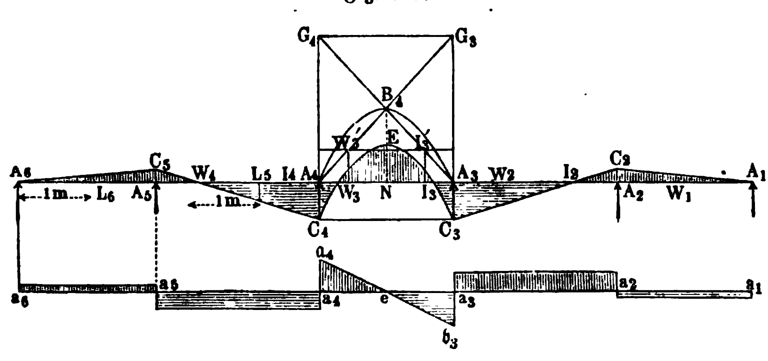
Wenn die Belastung der Oeffnung gleichmäßig über deren Länge vertheilt ist, wie in Fig. 161 vorausgesetzt worden, so ergeben sich die beiden vorerwähnten Höhen $A_4 G_4$ und $A_5 G_5$ gleich groß und zwar ist jede derselben gleich der doppelten Scheitelordinate k der Parabel, welche die Momentenfläche darstellt, denn der von der Parabel auf jede Stütze ausgeübte Auflagerdruck ist

$$1/_2 \cdot 2/_3\, k\, l_4 = \frac{k\, l_4}{3},$$

also eben so groß wie derjenige eines Dreiecks von der Höhe $2\,k$ und der Basis l_4.

Nach dem Vorstehenden bestimmen sich nun die in dem ganzen Träger $A_1 A_6$, Fig. 167, durch Belastung einer einzigen Oeffnung, wie $A_3 A_4$,

Fig. 167.



hervorgerufenen Momente wie folgt. Es seien zunächst nach Anweisung der Figuren 161 und 162 die Wendepunkte J und W ermittelt und durch die Parabel $A_4 B_4 A_3$, deren Scheitelhöhe in der Mitte N der belasteten Oeffnung die Größe $NB_4 = q_3 \frac{l_3^2}{8}$ hat, sei die Fläche der positiven Momente dieser Strecke dargestellt. Macht man jetzt $A_4 G_4 = A_3 G_3 = 2\, NB_4$, und zieht $A_4 G_3$ und $A_3 G_4$, so erhält man in den Verticalen durch J_3 und W_3 die beiden Punkte J_3' und W_3', deren Verbindungslinie auf den Verticalen durch A_3 und A_4 Strecken abschneidet, welche man als $M_3 = A_3 C_3$ und als $M_4 = A_4 C_4$ anzutragen hat. Nachdem dies geschehen, erhält man in bekannter Art mittelst der Wendepunkte W und J durch die Linienzüge $C_3 J_2 C_2 A_1$ und $C_4 W_4 C_5 A_6$ die Momentenflächen der unbelasteten Strecken zu beiden Seiten. Wenn man noch, um die positiven und negativen Momente der belasteten Strecke $A_3 A_4$ zu addiren, die Ordinaten der Parabel $A_4 B_4 A_3$ und des Trapezes $A_4 A_3 C_3 C_4$ algebraisch summirt, so giebt die in der Figur schraffirte Fläche eine Darstellung der Biegungsmomente, welche

in jedem Punkte durch die gleichmäßige Belastung der Strecke $A_3 A_4$ mit der Last $q_3 l_3$ hervorgerufen werden.

Es leuchtet ein, daß, wenn dieselbe Construction für sämmtliche Oeffnungen wiederholt wird, durch algebraische Summirung aller so erhaltenen Momentenflächen diejenige Fläche erhalten wird, welche der vollen Belastung des ganzen Trägers in allen Feldern durch die diesen Feldern zukommenden Belastungen $(q = p + k)$ entspricht.

Aus den für alle Punkte des Balkens gefundenen Biegungsmomenten M läßt sich dann auch mit Hülfe der Gleichung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

die Größe der Schubkraft V ermitteln, welche in jedem Punkte des Balkens ebenfalls durch die Belastung der Strecke $A_3 A_4$ erzeugt wird. Zu dem Ende sucht man zunächst in der Strecke $A_3 A_4$ den Punkt E, in welchem das Maximum der positiven Momente auftritt, d. h. den Punkt der Momentencurve, dessen Tangente horizontal ist*). In diesem Punkte e der Axe ist die verticale Schubkraft gleich Null, und man erhält nach dem Früheren die Darstellung der Schubkräfte für diese gleichförmig mit q_3 belastete Strecke durch die unter dem Neigungswinkel *arc tang* q_3 gegen den Horizont durch e gelegte Gerade $\mathfrak{a}_4 e \mathfrak{b}_3$, d. h. indem man $a_4 \mathfrak{a}_4 = q_3 . e a_4$ und $a_3 \mathfrak{b}_3 = q_3 . e a_3$ macht. Für jede der übrigen Strecken ist die Schubkraft constant, da für diese Strecken die Momentenflächen durch gerade Linien begrenzt sind, und zwar sind die Schubkräfte in der Figur für die Strecken $A_6 A_5$ und $A_3 A_2$ positiv, weil hier die Momente von links nach rechts zunehmen (algebraisch), während für die Strecken $A_5 A_4$ und $A_2 A_1$, auf welchen die Momente von links nach rechts abnehmen, die Schubkräfte negativ und demgemäß in der Figur unterhalb der Axe $a_6 a_1$ angetragen sind. Die absolute Größe der Schubkraft für jedes Feld findet man wegen $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ aus der constanten Neigung der Momentenlinie, z. B. für $A_6 A_5$ aus dem Verhältnisse

$$+ \frac{A_5 C_5}{A_6 A_5} = + \frac{M_5}{l_5},$$

und für die Strecke $A_5 A_4$ durch

$$- \frac{A_4 C_4}{W_4 A_4}.$$

Da die Größen $A_5 C_5$, $A_4 C_4$ ... Momente, d. h. Meterkilogramme (oder

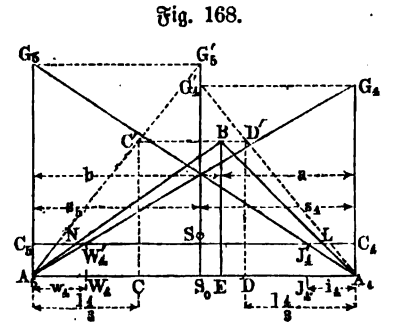
*) Dieser Punkt E liegt bei der gleichförmig vertheilten Belastung in Fig. 167 in der Mitte der Oeffnung.

Metertonnen) vorstellen, so repräsentiren obige Verhältnisse natürlich Kräfte (Kilogramme oder Tonnen). Hat man daher für die Momente einen Maßstab gewählt, nach welchem 1 mm n Metertonnen beträgt, so erhält man in der Ordinate des Punktes L_6 oder L_5, welcher nach dem Längenmaßstabe um 1 m von dem Nullpunkte A_6 bezw. W_4 absteht, diejenigen Längen, welche, nach dem Maßstabe für die Momente gemessen, die Schubkraft in Tonnen ergeben. Wenn man auch die Schubkraftdiagramme für die besondere Belastung jeder einzelnen Oeffnung entwirft, so erhält man durch algebraische Summirung derselben ebenfalls das Diagramm für die aus der vollen Belastung des ganzen Trägers resultirenden Schubkräfte.

Die volle Belastung des ganzen Trägers durch die gesammte aus dem Eigengewichte p und der Verkehrslast k bestehende Totallast q entspricht jedoch nicht dem ungünstigsten Belastungsfalle des Trägers für jeden Querschnitt, da durch diese volle Belastung in keinem Punkte das größte daselbst mögliche Biegungsmoment oder die größte Schubspannung hervorgerufen wird. Da nun aber die Dimensionen des Balkens in jedem Querschnitte diesen größten Werthen $max\, M$ und $max\, V$ gemäß gewählt werden müssen, so erübrigt noch, diejenigen Belastungszustände des Balkens festzustellen, welchen für irgend einen Querschnitt die gedachten absolut größten Werthe von M und V zukommen. Da das Eigengewicht der Construction ein für alle Mal als volle Belastung des Trägers auftritt, so wird diese Untersuchung sich nur auf die jeweilige Stellung der beweglichen Verkehrslast zu beziehen haben.

Betrachtet man irgend eine Oeffnung wie $A_5 A_4$, Fig. 168, welche in einem beliebigen Punkte E einer Belastung durch K ausgesetzt ist, während die sämmtlichen übrigen Oeffnungen, abgesehen vom Eigengewichte, nicht belastet sind, so erhält man nach dem Vorstehenden in dem Linienzuge

Fig. 168.



$$A_5 C_5 N B L C_4 A_4$$

die Begrenzung der Momentenfläche, von welcher das Dreieck NBL die positiven Momente darstellt. Nun wurde schon oben bemerkt, daß die Nullpunkte N und L niemals zwischen die Wendepunkte W und J fallen können, wo auch der Angriffspunkt E der Kraft K zwischen A_5 und A_4 gewählt werden möge. Daraus geht also hervor, daß jede Belastung irgend eines Elementes der betrachteten

Oeffnung für die zwischen W und J gelegene Balkenstrecke einen positiven Zuwachs zu dem Momente in allen Punkten dieser Strecke hervorruft. Man hat daher zu schließen, daß in den Querschnitten dieser mittleren Strecke WJ das größte positive Moment eintritt, wenn die ganze Oeffnung $A_5 A_4$ von der beweglichen Last $q_4 l_4$ bedeckt ist. Denkt man jetzt auch die übrigen Oeffnungen des Trägers beliebig belastet, so ergiebt sich aus dem Früheren und aus Fig. 167, daß jede Belastung der beiden unmittelbar anstoßenden Oeffnungen negative, und jede Belastung der darauf folgenden zweitnächsten positive Momente u. s. f. in der Strecke WJ hervorruft. Daraus folgt, daß man für diese Strecke die größten positiven Momente bei einer Belastung erhält, wie sie durch I, Fig. 169, dargestellt ist.

Fig. 169.

I. M max für WJ

II. M min für N

III. M max für A_4

IV. V max für N

V. V min für N

Die kleinsten Momente würden sich ergeben, wenn man umgekehrt die unmittelbar an $A_4 A_3$ anstoßenden Oeffnungen $A_5 A_4$ und $A_3 A_2$ und jede zweitfolgende belasten würde.

Anders verhält es sich hinsichtlich der beiden seitlichen Strecken $A_4 W$ und $J A_3$ jeder Oeffnung. Man ersieht aus Fig. 168, daß für den Punkt N die Lage einer Kraft K in E als Grenzlage gilt, derart, daß jede rechts von E wirkende Last in N ein negatives, dagegen jede links von E wirkende Last in N ein positives Moment erzeugt. Wenn daher die Strecke $A_5 E$ von der beweglichen Last bedeckt ist, so wird das größte positive Moment in N erzeugt, welches aus einer Belastung der Oeffnung $A_4 A_5$ überhaupt resultirt, während eine Belastung der Strecke $A_4 E$ den größten

negativen Beitrag zu dem Momente in N ergiebt. Ebenso folgt, daß die Belastungen der ersten, dritten u. s. w. Oeffnung links neben A_5, sowie der zweiten, vierten ꝛc. Oeffnung rechts von A_4 negative Momente für $A_5 N$ erzeugen. Demgemäß ergiebt sich, daß das absolut größte negative Moment, d. h. M_{min} für einen Punkt N der Strecke $A_4 W$, Fig. 169, durch die in II dieser Figur dargestellte Belastungsart des Balkens hervorgerufen wird. Dabei stellt E denjenigen Punkt vor, welcher nach Fig. 168 die Belastungsscheide für den in Betracht gezogenen Querschnitt N abgiebt, und welcher in der oben angegebenen Art zu ermitteln ist. Man kann hinsichtlich dieses Punktes E bemerken, daß derselbe bei einer Verschiebung des zugehörigen Punktes N von A_5 nach W_4, Fig. 168, zwischen A_5 und A_4 sich bewegt, derart, daß er gleichzeitig mit N in A_5 fällt und nach A_4 gelangt, wenn N nach W_4 gekommen ist. Eine ganz ähnliche Betrachtung wie für die Strecke $A_5 W_4$ gilt auch für diejenige $A_4 J_4$, indem für den Punkt L derselben ebenfalls E als Belastungsscheide auftritt, derart, daß links von E befindliche Lasten negative und rechts von E gelegene Belastungen positive Momente in L erzeugen.

Fällt der Punkt N in einen Stützpunkt A_4, so ergiebt sich, da alsdann auch die zu N gehörige Belastungsscheide in diesen Stützpunkt hineinfällt, die Belastung des Trägers, welche dem absolut größten Werthe des negativen Stützmomentes in A_4 entspricht, in der durch Fig. 169, III dargestellten Weise.

Um auch die Belastung, welche der größten Verticalkraft V für einen beliebigen Punkt N, Fig. 169, IV, entspricht, zu finden, hat man zu bemerken, daß nach §. 36 die Belastung der Strecke $N A_3$ rechts von N für diesen Punkt nur positive Scheerkräfte hervorruft, und daß dasselbe für die Belastungen derjenigen Oeffnungen $A_5 A_4$ und $A_2 A_1$ gilt, welche in der Oeffnung $A_4 A_3$ Momente erzeugen, die von links nach rechts algebraisch zunehmen. Hieraus geht hervor, daß die in IV dargestellte Belastungsart in N das Maximum der positiven Scheerkraft erzeugt, während die entgegengesetzte Belastungsart in Fig. 169, V die größte negative Scheerkraft oder V_{min} hervorruft.

Die in Fig. 169 angedeuteten Belastungsarten lassen erkennen, in welcher Art man für jeden Querschnitt des Trägers die ungünstigsten Beanspruchungen durch Biegungsmomente und Scheerkräfte zu bestimmen hat, indem man nach Fig. 167 für jede Oeffnung die aus der Belastung derselben durch p und k sich ergebenden Diagramme der Momente und Schubkräfte entwirft, und für jeden Querschnitt nur diejenigen Ordinaten in Betracht zieht, welche der entsprechenden Belastungsart gemäß der Fig. 169 zukommen.

Hierbei empfiehlt es sich, diese Diagramme unter Zugrundelegung einer

Belastung Eins (1 kg oder 1 Tonne für 1 m Länge) zu entwerfen, indem man dann nur nöthig hat, für jede Belastung durch p oder k die betreffende Ordinate mit der Maßzahl von p oder k zu multipliciren.

Es würde im vorliegenden Falle zu weit führen, die vorstehenden Untersuchungen auch auf die Fälle auszudehnen, in denen die einzelnen Stützen nicht in derselben Höhe liegen, oder die Trägheitsmomente des Trägers für verschiedene Querschnitte von verschiedener Größe sind, es muß in dieser Hinsicht auf die hier zu Grunde gelegte Arbeit von Mohr*) verwiesen werden.

§. 44. **Trägheitsmomente der Querschnitte.** Wenn nach dem Vorstehenden für einen Balken die größten Biegungsmomente M und die größten verticalen Scheerkräfte V in jedem Querschnitte ermittelt sind, so kommt es darauf an, die Dimensionen der einzelnen Querschnitte derartig zu bemessen, daß das Material mit genügender Sicherheit den einwirkenden Kräften zu widerstehen vermag. Man hat zu dem Ende die Anordnung so zu treffen, daß die größte in einem Querschnitte auftretende Spannung pro Flächeneinheit (1 qmm) einen erfahrungsmäßig zulässigen Werth s nicht übersteige. Da die Biegungsspannungen in irgend einem Punkte eines beliebigen Querschnittes im geraden Verhältnisse mit dem Abstande dieses Punktes von der neutralen Axe des Querschnittes stehen, so wird die größte Spannung in den am weitesten von der neutralen Axe entfernten Punkten des Querschnittes auftreten. Erreicht daher die Spannung in diesen Punkten, deren Entfernung von der neutralen Axe fernerhin mit e bezeichnet werden soll, den zulässigen Werth s, so hat man im Abstande gleich Eins von der neutralen Axe die Spannung $\frac{s}{e}$. Es ist nun bereits in Thl. I gezeigt, wie das in irgend einem Querschnitte des Balkens durch die äußeren Kräfte hervorgerufene Biegungsmoment M durch das Moment der Spannungen aller Querschnittselemente, bezogen auf die neutrale Axe, im Gleichgewichte gehalten werden muß, und es wurde daselbst die Formel

$$M = \frac{s}{e} W$$

angegeben, unter W eine an obiger Stelle ebenfalls als Biegungsmoment bezeichnete gewisse Function des Querschnittes verstanden. Diese Function W stellt sich dar als die Summe aller derjenigen Producte, welche aus den einzelnen Flächenelementen ∂F des Querschnittes F in die Quadrate y^2 ihrer Abstände von der neutralen Axe gebildet werden. Wegen der Analogie dieses Werthes mit den in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 besprochenen

*) Zeitschr. d. Hannov. Archit. u. Ing.-Ver. 1868.

Trägheitsmomenten der Körper, hat man jene gedachte Summe $\int \partial F \, . \, y^2$ meistens gleichfalls als das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet und es soll in der Folge diese Benennung hier beibehalten und dafür die Bezeichnung T gewählt werden. Was die Uebereinstimmung der vorgedachten Querschnittsfunction mit dem Trägheitsmomente eines Körpers hinsichtlich des analytischen Ausdruckes betrifft, so hat man nur anstatt der Massentheilchen ∂m des Körpers die Flächenelemente ∂F des Querschnittes einzuführen, und es gelten die in Thl. I, Abschn. V über die Trägheitsmomente materieller Körper gefundenen Beziehungen auch für die hier in Betracht kommenden Trägheitsmomente der Querschnitte. Es ist auch in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gezeigt worden, in welcher Weise man aus den Dimensionen einer Querschnittsfläche von bestimmter Form das zugehörige Trägheitsmoment zu berechnen hat, und es ist daselbst diese Rechnung für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen durchgeführt worden. Hinsichtlich dieser Berechnung, welche hier nicht wiederholt werden soll, ist auf Thl. I zu verweisen, und es möge nur in der Tabelle am Schlusse dieses Paragraphen eine Zusammenstellung der Ausdrücke für die Trägheitsmomente einiger der häufiger vorkommenden Balkenquerschnitte angeführt werden.

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß alle diese Trägheitsmomente unter der Form:

$$T = r^2 F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

erscheinen, unter F die Querschnittsfläche und unter r eine gewisse von der Form des Querschnittes abhängige Größe verstanden. Diese Größe r ist für verschieden geformte Querschnitte verschieden, aber für alle unter sich ähnlichen Querschnitte durch einen und denselben aliquoten Theil einer und derselben Querschnittsdimension ausgedrückt. Man hat z. B. für die kreisförmige Fläche vom Durchmesser d:

$$T = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{d^2}{16} F,$$

folglich ist hier

$$r = \frac{d}{4},$$

während für ein Rechteck von der Höhe h und Breite b, letztere in der Richtung der neutralen Axe gemessen,

$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{h^2}{12} F,$$

also

$$r = \frac{h}{6} \sqrt{3} = 0{,}289 \, h$$

ist. Man nennt diesen Halbmesser auch wohl, wie bei den Trägheitsmomenten materieller Körper, den Schwungradius oder den Trägheitshalbmesser des Querschnittes.

Die neutrale Axe des Querschnittes eines auf einfache Biegung beanspruchten Balkens geht nach den Ermittelungen in Thl. I durch den Schwerpunkt des Querschnittes und dementsprechend sind die daselbst ermittelten und in der nachstehend angeführten Tabelle enthaltenen Trägheitsmomente auf neutrale Axen bezogen, welche durch den Schwerpunkt gehen.

Fig. 170.

Die analytische Ermittelung dieser Trägheitsmomente ist nur für einfache Querschnitte leicht durchzuführen; für unregelmäßige Querschnittsformen wird man sich entweder der auch in Thl. I angegebenen angenäherten Verfahrungsart bedienen, wonach man den Querschnitt in schmale, als Trapeze zu betrachtende Streifen parallel der neutralen Axe zerlegt, oder man kann zu dem Behufe auch eine graphische Methode anwenden. Zur Erläuterung der letzteren sei ABC, Fig. 170, ein beliebig geformter Querschnitt, dessen Schwerpunkt in S gelegen sei. Soll das Trägheitsmoment für eine durch S gelegte Axe EE bestimmt werden, so theilt man den Quer-

schnitt zu jeder Seite dieser Axe in eine größere Anzahl Streifen parallel zu EE von genügend geringer Breite, um diese Streifen als Trapeze betrachten zu können, und nimmt in den Schwerpunkten $s_1, s_2 \ldots s_9$ dieser Streifen Kräfte parallel zu EE an, deren Größen mit den Flächeninhalten dieser Flächenstreifen proportional sind. Es mögen nach einem beliebig angenommenen Kräftemaßstabe diese Kräfte als die Strecken 0 1, 1 2, 2 3 . . . 8 9 auf der mit EE parallelen Kräftelinie angetragen, und der Pol o in einer Entfernung $4o = P$ von der Kräftelinie so gewählt werden, daß die beiden Strecken 0 4 und 4 9 bezw. den Flächenstücken CS und ABS zu beiden Seiten der Axe EE gleich sind. Zeichnet man nun in bekannter Weise das Seilpolygon $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_9 a_0$, so muß der gewählten Pollage o zufolge der Schnittpunkt a_0 der äußersten mit $o0$ und $o9$ parallelen Seile auf der Axe EE liegen. Nach den bekannten Eigenschaften des Seilpolygons ist nun für das Moment irgend eines Flächenstreifens, z. B. f_2, dessen Schwerpunkt in s_2 liegt, in Bezug auf EE derjenige Abschnitt $b_1 b_2$ ein Maß, welchen die beiden die Kraft f_2 einschließenden Seile $a_1 a_2 b_1$ und $a_2 a_3 b_2$ auf EE abschneiden, und zwar ist, unter y_2 den Abstand der Kraft f_2 von EE verstanden, dieses Moment durch

$$f_2 y_2 = P . b_1 b_2$$

ausgedrückt, wenn P die Poldistanz $4o$ bedeutet. Es folgt daher auch das Trägheitsmoment dieses elementaren Streifens durch

$$f_2 y_2^2 = P . b_1 b_2 . y_2 = 2 P . \triangle a_2 b_2 b_1,$$

indem y_2 als Höhe des Dreiecks $a_2 b_2 b_1$ zur Grundlinie $b_1 b_2$ anzusehen ist. Da dieselbe Betrachtung für jedes andere Element in gleicher Weise gilt, so findet man, daß das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes durch das Product aus P und der von dem Seilpolygone $a_0 a_1 a_2 \ldots a_9 a_0$ umschlossenen Fläche dargestellt ist. Nennt man diese Fläche φ, und ist F die ganze Fläche des betrachteten Querschnittes, so hat man, unter r dessen Trägheitshalbmesser verstanden, daher für den Querschnitt das Trägheitsmoment:

$$T = F r^2 = 2 P \varphi.$$

Wählt man nun die Poldistanz

$$P = 4o = \frac{F}{2} = \frac{1}{2}\, 0 9,$$

so erhält man mit diesem Werthe

$$T = F r^2 = F \varphi, \text{ d. h. } r^2 = \varphi.$$

Wenn man daher die Fläche $a_1 a_2 \ldots a_9 a_0$ in ein Quadrat verwandelt, so erhält man in der Seite desselben den Trägheitshalbmesser r in Bezug

auf die durch den Schwerpunkt S des Querschnittes gehende neutrale Axe EE.

Ist $E_1 E_1$ eine andere, im Abstande d zu EE parallele Axe, so erhält man durch dieselbe Betrachtung in der Fläche $a_1 a_2 \ldots a_9 f g a_1$ das Maß für das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf diese Axe $E_1 E_1$. Wird diese Fläche mit φ_1 bezeichnet, so hat man nach der Figur

$$\varphi_1 = \varphi + a_0 f g = \varphi + \frac{d}{2} \cdot fg.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $a_0 f g$ und $o\,0\,9$ folgt nun

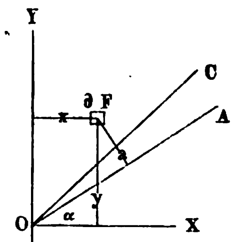
$$fg : d = 0\,9 : 4\,o = F : \frac{F}{2},$$

oder

$$fg = 2\,d,$$

so daß man den Inhalt des Dreiecks $a_0 f g = d^2$ und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf $E_1 E_1$ zu

Fig. 171.



$$T_1 = F\,(r^2 + d^2) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erhält. Dieser Satz ist auch in anderer Art schon in Thl. I gefunden worden.

Kennt man die Trägheitsmomente T_x und T_y eines Querschnittes in Bezug auf zwei zu einander senkrechte, sonst beliebige Axen OX und OY, Fig. 171, so erhält man das Trägheitsmoment T_a für eine durch O gehende, mit der X Axe den beliebigen Winkel α bildende Axe OA nach der Figur zu

$$T_a = \int \partial F \,.\, a^2 = \int \partial F\,[x^2 + y^2 - (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2],$$

oder

$$T_a = \int \partial F x^2 \sin^2\alpha + \int \partial F y^2 \cos^2\alpha - \int \partial F \,.\, 2\,x\,y \cos\alpha \sin\alpha,$$

d. h.

$$T_a = T_y \sin^2\alpha + T_x \cos^2\alpha - \sin 2\,\alpha \int x\,y \,.\, \partial F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dieser Werth wird zu einem Maximum oder Minimum für solche Größen von α, welche sich aus $\frac{\partial T_a}{\partial \alpha} = 0$ ergeben, also aus

$$2 \sin\alpha \cos\alpha\, T_y - 2 \cos\alpha \sin\alpha\, T_x = 2 \cos 2\,\alpha \int x\,y \,.\, \partial F \text{ zu}$$

$$tg\, 2\,\alpha = \frac{2 \int x\,y \,.\, \partial F}{T_y - T_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Um die Größe $\int x y \partial F$ zu entfernen, denke man noch das Trägheitsmoment T_c für eine unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigte Axe OC eingeführt, welches Moment nach (3) zu

$$T_c = \frac{1}{2} T_y + \frac{1}{2} T_x - \int x y \partial F$$

folgt, so daß man

$$2 \int x y \partial F = T_y + T_x - 2 T_c$$

setzen kann, womit die Gleichung (4) übergeht in:

$$tg\, 2\alpha = \frac{T_y + T_x - 2 T_c}{T_y - T_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

Dieser Ausdruck liefert in jedem Falle zwei Werthe für 2α, welche sich um 180° unterscheiden, und von welchen der eine einem Maximum, der andere einem Minimum entspricht, wie sich daraus ergiebt, daß

$$\frac{\partial^2 T_a}{\partial \alpha^2} = 2 \cos 2\alpha\, (T_y - T_x) + 4 \sin 2\alpha \int x y \partial F$$

mit den Werthen 2α und $2\alpha + 180°$ entgegengesetzte Vorzeichen annimmt. Diese Werthe T_{max} und T_{min} erhält man, wenn man den aus (4) gefundenen Werth von α in (3) einführt.

Man nennt die beiden, den Trägheitsmomenten T_{max} und T_{min} zugehörigen Axen die Hauptaxen des Querschnittes für den Punkt O, und es ist aus (4) ersichtlich, daß die Axen OX und OY selbst zu diesen Hauptaxen werden, sobald

$$\int x y \partial F = 0$$

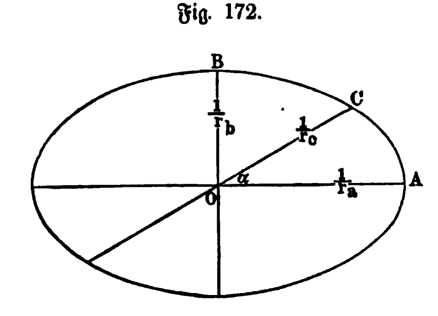
wird. Dies ist offenbar für jede Symmetrieaxe eines Querschnittes der Fall, da der Symmetrie wegen jeder positiven Ordinate einerseits dieser Axe eine gleich große negative Ordinate auf der entgegengesetzten Seite entspricht. Hieraus ergiebt sich die auch schon aus dem in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 über die Trägheitsmomente Gesagten folgende Beziehung, daß eine Symmetrieaxe eines Querschnittes für jeden ihrer Punkte eine Trägheitshauptaxe ist. Die zugehörige andere Hauptaxe findet sich dann in der in diesem Punkte zur Symmetrieaxe senkrechten Geraden.

Denkt man sich für alle möglichen durch einen beliebigen Punkt O eines Querschnittes, Fig. 172 (a. f. S.), gehenden Geraden wie OC das Trägheitsmoment $T = F r^2$ ermittelt, und auf jeder dieser Axen vom Mittelpunkte O nach jeder Seite ein Stück OC abgetragen, welches nach einem beliebig gewählten Maßstabe der Größe $\frac{1}{r}$ proportional ist, so liegen alle die

so erhaltenen Punkte C, wie leicht zu erkennen ist, auf dem Umfange einer Ellipse, deren Mittelpunkt in O liegt, und deren Halbaxen $OA = a$ und $OB = b$ durch die Größen $\frac{1}{r_a}$ und $\frac{1}{r_b}$ dargestellt sind, wenn r_a und r_b die den beiden Hauptaxen zugehörigen Trägheitshalbmesser sind, für welche man also

$$T_{max} = F r_a^2 \text{ und } T_{min} = F r_b^2$$

Fig. 172.



hat. Wählt man, um dies zu erkennen, die Hauptaxen OA und OB zu Coordinatenaxen, so ist für irgend eine Axe OC, welche mit der X Axe den Winkel α bildet, der Construction zufolge

$$OC = c = \frac{1}{r_c},$$

unter r_c den Trägheitshalbmesser des der Axe OC zugehörigen Trägheitsmomentes $T_c = F r_c^2$ verstanden. Nun ist nach (3)

$$T_c = T_y \sin^2 \alpha + T_x \cos^2 \alpha,$$

da für die Hauptaxen die Größe $\int x y \,.\, \partial F = 0$ wird. Setzt man in obiger Gleichung $T = F r^2$, so folgt

$$r_c^2 = r_b^2 \sin^2 \alpha + r_a^2 \cos^2 \alpha,$$

oder, wenn man nach der Figur $\sin \alpha = y r_c$ und $\cos \alpha = x r_c$ einführt und durch r_c^2 beiderseits dividirt:

$$1 = r_b^2 y^2 + r_a^2 x^2,$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen $\frac{1}{r_a} = a$ und $\frac{1}{r_b} = b$ zukommt.

Diejenigen Hauptaxen, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen, nennt man die Schwerpunktshauptaxen, und die zugehörige Ellipse die Centralellipse des Querschnittes (s. auch Thl. I, Abschn. V, Cap. 2).

Die Ermittelung der Schwerpunktshauptaxen und ihrer zugehörigen Trägheitsmomente ist, wie sich aus dem Folgenden (§. 46) ergeben wird, dann erforderlich, wenn die Kraftebene, in welcher der Balken in Angriff genommen wird, nicht eine Symmetrieebene desselben ist.

Trägheitsmomente.

	F	T	W	r^2	$\eta = \frac{W}{F\frac{h}{2}}$
	$b\,h$	$\frac{1}{12}\,b\,h^3$	$\frac{1}{6}\,b\,h^2$	$\frac{h^2}{12}$	0,333
	a^2	$\frac{1}{12}\,a^4$	$\frac{1}{6}\,a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,333
	a^2	$\frac{1}{12}\,a^4$	$0{,}118\,a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,236
	$2{,}598\,a^2$	$0{,}5413\,a^4$	$\frac{5}{8}\,a^3$	$0{,}209\,a^2$	0,278
	$2{,}598\,a^2$	$0{,}5413\,a^4$	$0{,}5413\,a^3$	$0{,}209\,a^2$	0,209
	$\pi\,a^2$	$\frac{\pi\,a^4}{4}$	$\frac{\pi\,a^3}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$\pi\,a\,b$	$\frac{\pi\,a^3\,b}{4}$	$\frac{\pi\,a^2\,b}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$b\,(h-h_1)$	$\frac{b}{12}\,(h^3-h_1^3)$	$\frac{b}{6}\,\frac{h^3-h_1^3}{h}$	$\frac{h^2+h\,h_1+h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3}\,\frac{h^2+h\,h_1+h_1^2}{h^2}$
	$h^2-h_1^2$	$\frac{h^4-h_1^4}{12}$	$\frac{h^4-h_1^4}{6\,h}$	$\frac{h^2+h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3}\,\frac{h^2+h_1^2}{h^2}$
	$\pi\,(a^2-a_1^2)$	$\pi\,\frac{a^4-a_1^4}{4}$	$\pi\,\frac{a^4-a_1^4}{4\,a}$	$\frac{a^2+a_1^2}{4}$	$\frac{1}{4}\,\frac{a^2+a_1^2}{a^2}$
	$b\,h+b_1\,h_1$	$\frac{b\,h^3+b_1\,h_1^3}{12}$	$\frac{b\,h^3+b_1\,h_1^3}{6\,h}$	$\frac{1}{12}\,\frac{b\,h^3+b_1\,h_1^3}{b\,h+b_1\,h_1}$	$\frac{1}{3\,h^2}\,\frac{b\,h^3+b_1\,h_1^3}{b\,h+b_1\,h_1}$
	$b\,h-b_1\,h_1$	$\frac{b\,h^3-b_1\,h_1^3}{12}$	$\frac{b\,h^3-b_1\,h_1^3}{6\,h}$	$\frac{1}{12}\,\frac{b\,h^3-b_1\,h_1^3}{b\,h-b_1\,h_1}$	$\frac{1}{3\,h^2}\,\frac{b\,h^3-b_1\,h_1^3}{b\,h-b_1\,h_1}$

§. 45. **Balkenquerschnitte.** Aus der oben angegebenen Fundamentalformel für die Biegung von Balken

$$M = s \frac{T}{e}$$

erkennt man, daß der Widerstand eines Balkens von einem bestimmten Materiale, d. h. bei einer gewissen, höchstens zulässigen specifischen Faserspannung s mit dem Werthe $\frac{T}{e}$ proportional ist. Man bezeichnet daher gewöhnlich die Querschnittsfunction

$$\frac{T}{e} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Entfernung der äußersten Faser von der neutralen Axe}} = W$$

als das Widerstandsmoment des Balkens. Wenn der Querschnitt die neutrale Axe zur Symmetrieaxe hat, d. h. wenn die Abstände e_1 und e_2 der äußersten Fasern zu beiden Seiten der neutralen Axe den gleichen Werth e haben, so sind auch die Spannungen in diesen Fasern von gleicher Größe, jedoch von entgegengesetzter Richtung, indem die concav gebogenen Fasern Druckspannungen und die convex gebogenen Fasern Zugspannungen ausgesetzt sind. Wenn das Material des Balkens von solcher Beschaffenheit ist, daß die für dasselbe zulässigen Spannungen für Zug und Druck zu gleichem Betrage angenommen werden dürfen, wie dies für Holz und Schmiedeeisen der Fall ist, so wird man den Querschnitten solche Formen geben, daß $e_1 = e_2$ ist, denn mit ungleichen Entfernungen der äußersten Fasern würden auch die Anstrengungen derselben ungleich werden, was einer möglichsten Ausnutzung des Materials widersprechen würde. Wenn jedoch das Material, wie es bei dem Gußeisen der Fall ist, für Zug und Druck verschieden große Spannungen s_z und s_d zuläßt, so wird man auch e_z und e_d verschieden anzunehmen haben, so zwar, daß

$$\frac{s_z}{e_z} = \frac{s_d}{e_d}$$

ist. Da die neutrale Axe bei einem nur auf Biegung beanspruchten Balken durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, so folgt hieraus, daß man die Querschnitte der Gußeisenträger gegen die horizontale Schwerpunktsaxe derartig unsymmetrisch machen wird, daß der Schwerpunkt von den gedrückten Fasern einen im Verhältnisse $\frac{s_d}{s_z}$ größeren Abstand e_d hat, als von den gezogenen Fasern. Dieser Fall soll in einem folgenden Paragraphen näher untersucht und hier zunächst die Gleichheit von s_z und s_d vorausgesetzt, mithin auch gleicher Abstand der neutralen Axe von den äußersten Fasern zu beiden Seiten angenommen werden.

Es leuchtet ein, daß das in einem Balken vorhandene Material dann in der möglich vortheilhaftesten Weise zur Verwendung kommen würde, wenn in jedem Elemente die für das Material gerade noch zulässige Faserspannung auftreten könnte, wie dies bei einem nur auf Zug oder nur auf Druck beanspruchten Stabe in der That der Fall ist. Eine solche Inanspruchnahme ist bei gebogenen Balken nicht möglich, da die Spannungen in den einzelnen Punkten eines Querschnittes mit deren Abständen von der neutralen Axe proportional sind, in dieser letzteren daher den Werth Null haben, und sonach nur die äußersten Fasern mit ihrer ganzen Widerstandsfähigkeit wirksam sind, während alle übrigen Fasern mit geringeren Kräften widerstehen, als sie ihrer Natur nach äußern könnten. Dächte man sich bei einem Balken von der Höhe h des Querschnittes das gesammte Material zu gleichen Theilen in den beiden äußersten Schichten vereinigt, so daß jede dieser Schichten durch einen sehr dünnen Streifen von dem Querschnitte $\frac{F}{2}$ dargestellt wäre, so würde auch alles Balkenmaterial vollständig ausgenützt werden, und man würde einen idealen Querschnitt erhalten, welcher für den gegebenen Flächeninhalt F des Querschnittes und eine gleichfalls gegebene Querschnittshöhe h die größtmögliche Widerstandsfähigkeit darbieten würde. Da hierbei in jeder der beiden äußersten Schichten im Abstande h von einander der halbe Querschnitt $\frac{F}{2}$ concentrirt zu denken wäre, so würden die beiden gleichen und entgegengesetzten Spannkräfte, jede von der Größe $s\frac{F}{2}$, ein Kräftepaar bilden, welches sich der Biegung mit einem Momente

$$s\frac{Fh}{2} = M$$

entgegensetzt, man hätte daher für diesen idealen Fall aus

$$M = sW = s\frac{Fh}{2}$$

das Widerstandsmoment:

$$W = F\frac{h}{2}.$$

Dieser ideale Zustand, welcher der größtmöglichen Widerstandsfähigkeit des Balkens entspricht, ist in der Wirklichkeit aus den angegebenen Gründen niemals erreichbar, man wird demselben aber um so mehr sich nähern, je mehr man das Material aus dem mittleren Theile des Balkens entfernt und in den von der neutralen Axe entfernteren Partieen anhäuft, wie dies z. B. bei den Balken von doppelt Tförmigem Querschnitte und bei den

Blechträgern geschieht, welche im mittleren Theile aus einer dünnen Wand und zu beiden Seiten aus massigeren Streifen bestehen. Die Grenze, bis zu welcher hierbei die Stärke der Mittelrippe vermindert werden kann, hängt außer von den Rücksichten der Herstellung namentlich von den Schubspannungen der Querschnitte ab, worüber in einem folgenden Paragraphen das Nähere angegeben werden soll.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt zunächst, daß z. B. ein kreisförmiger Querschnitt, bei welchem das Material verhältnißmäßig mehr in dem mittleren Theile angehäuft ist, als in den äußeren, von der neutralen Axe entfernteren Parthieen, weniger günstig sein wird, als ein rechteckiger Querschnitt. Um die einzelnen Querschnitte in Hinsicht dieser mehr oder minder vortheilhaften Wirksamkeit mit einander zu vergleichen, kann man passend ihr Widerstandsmoment $W = \frac{T}{e} = F\frac{r^2}{e}$ mit dem oben besprochenen idealen Werthe $F\frac{h}{2}$ vergleichen, welcher einem Querschnitte von demselben Flächeninhalte F und derselben Höhe h angehört. Das Verhältniß dieser beiden Größen

$$\eta = \frac{W}{F\frac{h}{2}} = \frac{Fr^2}{eF\frac{h}{2}} = 2\frac{r^2}{eh},$$

oder bei einem symmetrischen Querschnitte, bei welchem $h = 2e$ ist,

$$\eta = \frac{r^2}{e^2},$$

kann gewissermaßen als das Güteverhältniß der Querschnittsform angesehen werden. Man erhält beispielsweise dieses Verhältniß bei einem rechteckigen Querschnitte von der Breite b und der Höhe h zu

$$\eta = \frac{W}{F\frac{h}{2}} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh^2} = \frac{1}{3}$$

unabhängig von der Breite, während für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d sich

$$\eta = \frac{\frac{\pi}{32}d^3}{\frac{\pi}{4}d^2 . \frac{d}{2}} = \frac{1}{4},$$

also wie oben schon bemerkt, kleiner als für das Rechteck herausstellt. In der Tabelle des vorigen Paragraphen sind unter η diese Verhältnisse für die verschiedenen Querschnitte angegeben.

Bei den hölzernen Balken kommt nur der rechteckige Querschnitt in Betracht, und da diese Balken aus runden Stämmen geschnitten werden, so ist es von Interesse, zu untersuchen, welches Verhältniß man bei diesem Querschnitte der Breite zur Höhe geben muß, um aus einem Rundholze vom Durchmesser d den widerstandsfähigsten Balken zu erzielen. Setzt man $b = \nu h$, so hat man das Widerstandsmoment

Fig. 173.

$$W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \nu h^3,$$

und da nach der Fig. 173

$$d^2 = b^2 + h^2 = (\nu^2 + 1) h^2,$$

also

$$h = \frac{d}{\sqrt{\nu^2 + 1}}$$

ist, so erhält man hiermit

$$W = \frac{1}{6} \nu h^3 = \frac{d^3}{6} \frac{\nu}{(\nu^2 + 1)^{3/2}}.$$

Man erhält daher das Maximum von W durch

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0,$$

d. h.

$$(\nu^2 + 1)^{3/2} = \nu \, {}^3/_2 \, (\nu^2 + 1)^{1/2} \, 2 \nu,$$

woraus:

$$\nu^2 = {}^1/_2 \text{ und } \nu = \sqrt{{}^1/_2} = 0{,}707$$

folgt. Man hat daher:

$$h = \frac{d}{\sqrt{\nu^2 + 1}} = d \sqrt{{}^2/_3} = 0{,}816\, d$$

und

$$b = d \sqrt{{}^1/_3} = 0{,}577\, d.$$

Für schmiedeeiserne Träger wählt man nach dem Vorstehenden am vortheilhaftesten die I oder [Form, insbesondere findet die erstere in der Praxis sehr häufig Verwendung. Es mögen zunächst nur die aus einem Stücke bestehenden gewalzten Träger in Betracht genommen werden, während die aus Blechplatten und Winkeleisen zusammengenieteten Träger im §. 51 besonders behandelt werden sollen.

Für den nach zwei zu einander senkrechten Axen X und Y symmetrischen

Trägerquerschnitt, Fig. 174, ist nach der Tabelle des vorigen Paragraphen

Fig. 174.

$$T_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

und

$$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H},$$

während man für die neutrale Axe Y die Werthe

$$T_y = \frac{HB^3 - h\,[B^3 - (B - b)^3]}{12}$$

und

$$W_y = \frac{HB^3 - h\,[B^3 - (B - b)^3]}{6B}$$

hat. Da die Querschnittsfläche $F = BH - bh$ ist, so erhält man das Güteverhältniß zu

$$\eta_x = \frac{W_x}{F\frac{H}{2}} = \frac{BH^3 - bh^3}{3H^2\,(BH - bh)}$$

und

$$\eta_y = \frac{W_y}{F\frac{B}{2}} = \frac{HB^3 - h\,[B^3 - (B - b)^3]}{3B^2\,(BH - bh)}.$$

Wählt man z. B. $H = 30$ cm, $B = 12$ cm, $h = 27$ cm und $b = 11$ cm, also $B - b = d = 1$ cm, und $\frac{H - h}{2} = d_1 = 1{,}5$ cm, so erhält man mit diesen Werthen

$$T_x = \frac{12\,.\,30^3 - 11\,.\,27^3}{12} = 8957;\; W_x = \frac{8957}{15} = 597,$$

und

$$T_y = \frac{30\,.\,12^3 - 27\,(12^3 - 1^3)}{12} = 434;\; W_y = \frac{434}{6} = 72{,}3;$$

und da $F = 12\,.\,30 - 11\,.\,27 = 63$ qcm ist, so folgt:

$$\eta_x = \frac{597}{63\,.\,15} = 0{,}632$$

und

$$\eta_y = \frac{72{,}3}{63\,.\,6} = 0{,}191$$

Die geringe Größe von η_y erklärt sich nach dem Vorhergehenden dadurch, daß ein relativ sehr großer Theil des Materials, nämlich die ganze Mittelwand in der Nähe der neutralen Axe angebracht ist, wenn der Balken flach gelegt wird, so daß die neutrale Axe nach YY fällt. Man wird daher eine solche Lage des Balkens für gewöhnlich nicht wählen.

Wenn nun auch aus dem Vorstehenden folgt, daß man bei einer gewissen, durch die Umstände bedingten Höhe H des Trägers behufs einer möglichst vortheilhaften Ausnutzung des Materials die Stärke d der Mittelrippe thunlichst verringern und dafür die Breite b der Flanschen nach Möglichkeit vergrößern müsse, so muß doch bemerkt werden, daß mit Rücksicht auf die Möglichkeit des bequemen Auswalzens sowohl die Minimaldicke der Mittelrippe als auch die Maximalbreite der Flanschen innerhalb gewisser praktischer Grenzen eingeschlossen ist. Man wird etwa annehmen können, daß die Dicke d der Mittelwand mindestens noch $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ der Trägerhöhe H zu betragen habe, wobei die größere Dicke $\frac{H}{20}$ für niedrige, die kleinere $\frac{H}{30}$ für höhere Träger angenommen werden mag. Desgleichen wird die Breite B nur bei niedrigen Trägern etwa gleich der halben Höhe $\frac{H}{2}$, bei größeren Höhen dagegen nicht viel über $\frac{H}{3}$ anzunehmen sein. Wesentliche Abweichungen von diesen Verhältnissen würden, sofern sie die Herstellung überhaupt noch zulassen, den Preis der Träger pro Gewichtseinheit so bedeutend erhöhen, daß die Construction aus diesem Grunde unvortheilhaft werden würde.

Ferner muß bemerkt werden, daß man sich bei der Feststellung der Trägerprofile aus praktischen Gründen meistens nach den Calibern der in den Walzwerken vorhandenen Walzen richten wird, da die Anfertigung von besonderen Walzen für das gewünschte Profil kostspielig ist und sich nur dann wird ermöglichen lassen, wenn von einem gewissen Profile eine große Menge von Trägern gewalzt wird.

Mit Rücksicht hierauf ist es denn gebräuchlich, daß der Constructeur in jedem Falle unter den ihm zugänglichen Profilformen der Walzwerke dasjenige auswählt, welches dem vorliegenden Zwecke am besten entspricht. Da nun diese vorhandenen Walzeisenprofile von den verschiedenen Walzwerken im Laufe der Zeit und nach Maßgabe der jeweiligen Bedürfnisse hergestellt worden sind, so ist es natürlich, daß der Abstufung der einzelnen Formen meistens ein festes System nicht zu Grunde liegt, und ebenso zeigt die Erfahrung, daß diese so entstandenen Profile sehr häufig mit einer ungünstigen Verwendung des Materials verbunden, d. h. nach dem Vorstehenden, mit

einem kleinen Güteverhältnisse η behaftet sind. Man hat daher in neuerer Zeit mehrfach die Frage der Aufstellung eines geordneten Systems von Normalprofilen angeregt, und in dieser Beziehung müssen insbesondere die Bestrebungen des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine und des Vereins deutscher Ingenieure hervorgehoben werden. Die von diesen Vereinen niedergesetzte Commission hat sich über eine Anzahl von Tabellen geeinigt, welche für die verschiedenen gebräuchlichen Querschnittsformen in regelmäßigen Abstufungen solche Abmessungen angeben, wie sie einer möglichst vortheilhaften Materialverwendung sowohl als einer guten und wohlfeilen Herstellung entsprechen. Diese so entstandenen Profilformen sind unter der Bezeichnung „Normalprofile" veröffentlicht*) und zur Zeit von beinahe sämmtlichen deutschen Regierungen den betreffenden Baubehörden und Verwaltungen zur thunlichsten Berücksichtigung empfohlen.

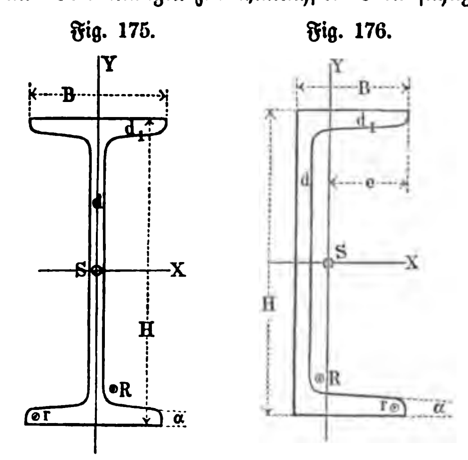


Fig. 175. Fig. 176.

Dieser Zusammenstellung sind die beiden folgenden Tabellen entnommen, welche die Dimensionen, Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Güteverhältnisse von I und [förmigen Querschnitten enthalten. Die Verhältnisse der Querschnittsdimensionen sind dabei entsprechend den Figuren 175 und 176 so gewählt, daß für I Träger, Fig. 175, bei den kleineren Höhen H unter 250 mm

$$H < 250\,\text{mm}: \quad B = 0{,}4\,H + 10\,\text{mm}; \; d = 0{,}03\,H + 1{,}5\,\text{mm},$$

und bei größeren Höhen

$$H > 250\,\text{mm}: \quad B = 0{,}3\,H + 35\,\text{mm}; \; d = 0{,}036\,H$$

angenommen worden ist. Die Halbmesser für die Abrunden sind zu $R = d$ und $r = 0{,}6\,d$ gewählt und für den Neigungswinkel α der inneren Flanschflächen hat man $tg\,\alpha = 0{,}14$ angenommen. Die unter d_1 angegebene Stärke der Flanschen ist für die Mitte derselben gedacht.

Ebenso ist für die [förmigen Querschnitte, Fig. 176,

$$B = 0{,}25\,H + 25\,\text{mm}; \; R = d_1 \text{ und } r = \frac{d_1}{2}$$

*) Deutsches Normalprofilbuch für Walzeisen, im Auftrage u. s. w. bearbeitet und herausgegeben von Dr. F. Heinzerling und O. Intze. 1881.

A. Normalprofile für I-Eisen (Fig. 175).

Für $H < 250$ mm: $B = 0{,}4\,H + 10$ mm; $d = 0{,}03\,H + 1{,}5$ mm

$R = d$; $r = 0{,}6\,d$

Für $H > 250$ mm: $B = 0{,}3\,H + 35$ mm; $d = 0{,}036\,H$

H mm	B mm	d mm	d_1 mm	F qcm	G kg	T_x cm	W_x cm	η_x	T_y cm	W_y cm	η_y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
80	42	3,9	5,9	7,61	6,0	78,4	19,6	0,646	7,35	3,5	0,219	5,6
90	46	4,2	6,3	9,05	7,1	118	26,2	0,644	10,4	4,5	0,223	5,8
100	50	4,5	6,8	10,69	8,3	172	34,4	0,642	14,3	5,7	0,213	6,0
120	58	5,1	7,7	14,27	11,1	331	55,1	0,644	25,2	8,7	0,210	6,4
140	66	5,7	8,6	18,35	14,3	579	82,7	0,645	41,3	12,5	0,206	6,6
160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	945	118	0,645	64,4	17,4	0,205	6,8
180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	1460	162	0,644	95,9	23,4	0,204	7,0
200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	2162	216	0,641	138	30,7	0,203	7,0
220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	3090	281	0,642	192	39,2	0,201	7,2
240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	4288	357	0,642	261	49,3	0,200	7,2
260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	5798	446	0,639	341	60,3	0,198	7,4
280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	7658	547	0,636	429	72,1	0,197	7,6
300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	9888	659	0,633	530	84,8	0,195	7,8
320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	12622	789	0,631	652	99,5	0,194	7,9
340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	15827	931	0,628	789	115	0,193	8,1
360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	19766	1098	0,626	956	134	0,192	8,2
380	149	13,7	20,5	107,5	83,9	24208	1274	0,624	1138	153	0,191	8,3
400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	29446	1472	0,622	1349	174	0,189	8,5
425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	37266	1754	0,621	1672	205	0,189	8,6
450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	46204	2054	0,619	2004	236	0,188	8,7
500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	69245	2770	0,614	2871	310	0,186	8,9

B. Normalprofile für ⊏ Eisen (Fig. 176).

$B = 0{,}25\,H + 25\,\text{mm};\ R = d_1;\ r = \frac{d_1}{2}.$

H mm	B mm	d mm	d_1 mm	F qcm	G kg	e cm	T_x cm	W_x cm	η_x	T_y cm	W_y cm	η_y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
30	33	5	7	5,42	4,2	1,86	6,5	4,3	0,529	5,2	2,8	0,313	1,54
40	35	5	7	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	0,520	7,3	3,6	0,332	1,97
50	38	5	7	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	0,600	10,0	4,3	0,318	2,50
65	42	5,5	7,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	0,609	15,7	5,9	0,305	3,04
80	45	6	8	11,04	8,6	2,93	107	26,7	0,605	21,7	7,4	0,298	3,60
100	50	6	8,5	13,5	10,5	3,31	207	41,4	0,613	33,1	10,0	0,295	4,14
120	55	7	9	17,04	13,3	3,76	368	61,3	0,60	49,2	13,1	0,280	4,69
140	60	7	10	20,4	15,9	4,09	609	87,0	0,620	71,2	17,4	0,285	5,00
160	65	7,5	10,5	24,1	18,8	4,49	932	117	0,607	97,4	21,7	0,277	5,38
180	70	8	11	28,0	21,9	4,90	1364	152	0,605	130	26,6	0,272	5,70
200	75	8,5	11,5	32,3	25,2	5,30	1927	193	0,598	171	32,2	0,266	5,99
220	80	9	12,5	37,6	29,3	5,66	2712	247	0,598	226	39,9	0,264	6,19
260	90	10	14	48,4	37,8	6,42	4857	374	0,594	365	56,9	0,261	6,57
300	100	10	16	58,8	45,9	7,05	8064	538	0,610	564	80,0	0,273	6,72

vorausgesetzt. Unter e ist hierbei der Abstand des Schwerpunktes S von den Enden der Flanschen zu verstehen, und es sind in beiden Tabellen mit T_x und W_x die Trägheits- und Widerstandsmomente in Bezug auf die Schwerpunktshauptaxe XX bezeichnet, während T_y und W_y dieselben Größen in Beziehung zur Schwerpunktshauptaxe YY bedeuten. Endlich ist unter G das Gewicht der Träger pro 1 m Länge, entsprechend einer Dichte des Walzeisens von 7,8 angegeben. Aus den Tabellen ersieht man, daß das Güteverhältniß für die erste Schwerpunktshauptaxe XX bei den ⌶ Trägern etwa zwischen 0,61 und 0,64 und für ⊏ Eisen zwischen 0,52 und 0,62 schwankt, während diese Größe für die Y Axe, also für die flache Lage der Träger nur die geringen Beträge zwischen 0,19 und 0,22, bezw. 0,26 und 0,33 zeigt.

Wenn ein Träger aus Gußeisen hergestellt werden soll, so hat man zu beachten, daß dieses Material gegen Druck eine größere Widerstandsfähigkeit zu äußern vermag, als gegen Zugkräfte. Man wird daher, da die Spannungen der einzelnen Elemente auch hier mit ihren Abständen von der durch den Schwerpunkt gehenden neutralen Axe proportional sind, der concaven oder gedrückten Faser einen im Verhältniß der zulässigen Spannungen größeren Abstand von der neutralen Axe zu geben haben, als der convexen oder gezogenen äußersten Faserschicht. Bezeichnet man mit $\nu = \frac{s_d}{s_z}$ dieses Verhältniß der höchstens zulässigen Spannungen, so ist der Querschnitt nach Fig. 177 so anzuordnen, daß die Abstände des Schwerpunktes S von den äußersten Fasern ebenfalls in diesem Verhältnisse stehen, d. h. daß

Fig. 177.

$$\frac{e_d}{e_z} = \frac{s_d}{s_z} = \nu$$

ist. In diesem Falle treten gleichzeitig die größten zulässigen Zug- und Druckspannungen in den betreffenden äußersten Faserschichten ein, und man erzielt in Folge dessen die bestmögliche Ausnutzung des Materials. Wenn dagegen die Schwerpunktslage dieser Bedingung nicht entspricht, so wird bei der Belastung des Balkens entweder die Zugspannung in der convexen Schicht oder die Druckspannung in der concaven Schicht zuerst den höchstens zulässigen Betrag s_z bezw. s_d erreichen, je nachdem das Verhältniß $\frac{s_z}{e_z}$ oder $\frac{s_d}{e_d}$ den kleineren Werth hat.

Man hat daher in diesem Falle die Tragfähigkeit des Balkens dadurch zu bestimmen, daß man in der allgemeinen Formel

$$M = s\,\frac{T}{e}$$

für $\frac{s}{e}$ den kleineren der beiden Werthe $\frac{s_z}{e_z}$ und $\frac{s_d}{e_d}$ der Rechnung zu Grunde legt. Häufig pflegt man das Verhältniß $\nu = \frac{s_d}{s_z} = 2$ vorauszusetzen (s. Thl. I). Nach Mohr*) kann man die zulässigen Spannungen für 1 qmm Querschnittsfläche zu

$$s_d = 10\,\text{kg und } s_z = 3^1/_3\,\text{kg},$$

also $\nu = 3$ annehmen, und erhält günstige Verhältnisse des Querschnittes, wenn man, Fig. 177,

$$d = {}^1/_{15}\,H;\;\; d_d = {}^1/_{15}\,H \;\text{ und }\; d_z = {}^2/_{15}\,H$$

annimmt, für welche Verhältnisse sich

$$H = 1{,}5\,\sqrt[3]{M} \;\text{ und }\; F = 0{,}48\,\sqrt[3]{M^2} = 0{,}21\,H^2$$

ermittelt.

Was die zulässigen Spannungen s der verschiedenen Baumaterialien anbelangt, so kann man dafür etwa die in der folgenden kleinen Zusammenstellung angeführten Werthe in Rechnung setzen, wobei es kaum der Bemerkung bedarf, daß unter besonderen günstigen oder ungünstigen Verhältnissen in entsprechendem Maße nach der einen oder anderen Seite hin Abweichungen zulässig sein werden.

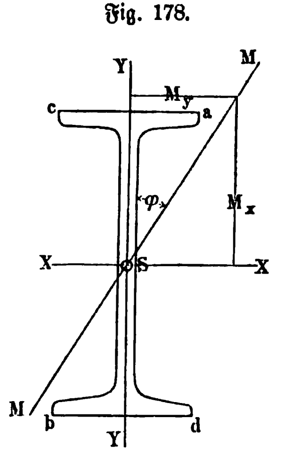
Zulässige Spannungen des Materials in Kilogrammen pro 1 qmm Querschnitt.

Material	Zugspannung	Druckspannung	Schubspannung
Schmiedeeisen	7,5	7,5	5,25
Blech	7,5	7,5	5,25
Draht	12	—	—
Gußstahl	30	30	22
Gußeisen	2,5	5	1,9
Eichen- und Buchenholz . .	1,2	0,66	—
Nadelholz	0,8	0,6	—

*) S. Technische Mechanik, bearb. u. herausgeg. vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart.

Schiefe Belastung. Die in dem Vorhergehenden zur Anwendung gebrachte Formel $M = s\,\frac{W}{e}$ beruht auf der stillschweigenden Voraussetzung, daß die eine Schwerpunktshauptaxe des Querschnittes, etwa die Y Axe, Fig. 178, in die Ebene der wirkenden Belastungen hineinfällt. Denkt man sich dagegen, daß die Belastungsebene MM gegen die Y Axe etwa um den Winkel φ geneigt sei, so kann man das wirkende Moment M in zwei Componenten §. 46.

Fig. 178.



$$M_y = M \sin\varphi \text{ und } M_x = M \cos\varphi$$

zerlegt denken, von denen das Moment M_y eine Biegung um die Y Axe und M_x eine Biegung um die X Axe anstrebt. In Folge dieser beiden Beanspruchungen werden sich die Spannungen in den äußersten Fasern bezw. zu

$$s_y = \frac{M \sin\varphi}{W_y} \text{ und } s_x = \frac{M \cos\varphi}{W_x}$$

bestimmen. Wie man aus der Figur erkennt, werden diese beiden Spannungen in der Kante a als Zugspannungen sich zu dem größten Werthe $s = s_y + s_x$ addiren, und ebenso wird in b die größte Druckspannung von demselben Betrage sich einstellen, während in den Ecken c und d die entgegengesetzt gerichteten Spannungen s_y und s_x totale Anstrengungen gleich $\pm (s_y - s_x)$ hervorrufen. Es ist von Interesse, zu untersuchen, in welchem Falle die am meisten gefährdeten Fasern in a und b der größten zulässigen Spannung ausgesetzt sind. Zu dem Ende hat man

$$s = s_y + s_x = \frac{M \sin\varphi}{W_y} + \frac{M \cos\varphi}{W_x}$$

oder, wenn man das Verhältniß $\frac{W_x}{W_y} = v$, also $W_y = \frac{W_x}{v}$ einführt:

$$s = \frac{M}{W_x}(v \sin\varphi + \cos\varphi).$$

Diese Spannung wird zu einem Maximum für $\frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$, d. h. für $v \cos\varphi = \sin\varphi$ oder $tg\,\varphi = v$, und zwar erhält man mit diesem Werthe von φ die absolut größte Faserspannung in a oder b:

$$s_{max} = \frac{M}{W_x}(tg\,\varphi \sin\varphi + \cos\varphi) = \frac{M}{W_x \cos\varphi} = \frac{M}{W_y\, v \cos\varphi}.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + tg^2 \varphi} = \sqrt{1 + v^2},$$

so kann man auch schreiben:

$$s_{max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}.$$

Mit den äußersten Werthen von v aus der Tabelle A, $v = 5{,}6$ und $8{,}9$ erhält man

$$\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}} = 1{,}015 \text{ und bezw. } 1{,}006.$$

Die größte Faserspannung wird daher für diese Träger bei schiefer Belastung nur um 1,5 bezw. 0,6 Proc. größer, als die Faserspannung

$$s = \frac{M}{W_y},$$

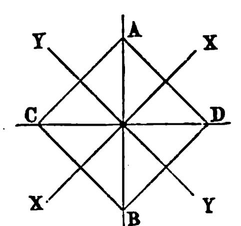
welche durch das Moment M in dem flach gelegten Träger hervorgerufen wird, d. h. wenn die Belastungsebene die Axe XX in sich aufnimmt. Man wird diese Vergrößerung der Spannung daher bei den in Tabelle A enthaltenen I Trägern vernachlässigen dürfen.

Beträchtlicher stellt sich diese durch schiefe Belastung hervorgerufene Vergrößerung der Kantenspannung bei einem geringeren Werthe von v heraus, z. B. erhält man für das erste [Eisenprofil der Tabelle B mit $v = 1{,}54$, die größte Kantenspannung

$$s_{max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{1{,}54^2}} = 1{,}192 \frac{M}{W_y},$$

und zwar stellt sich diese Spannung ein, wenn die Belastungsebene um $\varphi = arc\ tg\ 1{,}54 = 57^0$ von der Y Axe abweicht. Man hätte daher für eine derartige schiefe Belastung die Dimensionen aus der Formel $1{,}192\ M = s\ W_y$ zu bestimmen.

Fig. 179.



Am bedeutendsten wird die Spannungsvergrößerung für $v = 1$, d. h. für einen quadratischen Querschnitt, für denselben wird

$$\varphi = 45^0$$

und

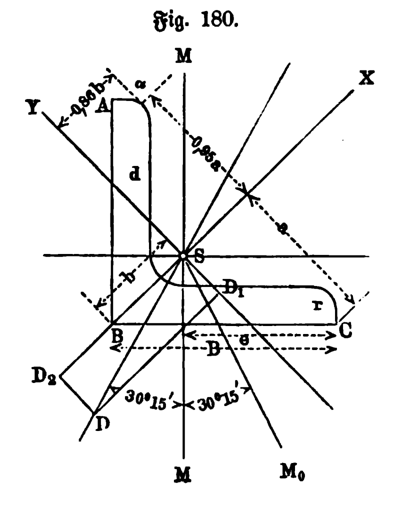
$$s_{max} = \frac{M}{W} \sqrt{2} = 1{,}414 \frac{M}{W},$$

d. h. es findet die ungünstigste Belastung bei der in Fig. 179 dargestellten Lage statt, wenn die Belastungsebene mit der Diagonalebene AB zusammenfällt.

Eine besondere Berücksichtigung verdient die schiefe Belastung bei der Anwendung der Winkeleisen. Ein Auszug aus der für gleichschenkelige Winkeleisen in den Normalprofilen angegebenen Tabelle ist in der folgenden mit C bezeichneten Zusammenstellung gegeben.

Wenn die Winkeleisen gleichschenkelig sind, so halbirt die eine Schwerpunktshauptaxe XX den rechten Winkel ABC, Fig. 180. Ist daher der eine Schenkel BC horizontal gelagert und wirkt die Belastung in der verticalen Ebene MM, so zerlegt sich das Moment M in die beiden gleichen Seitenmomente

Fig. 180.



$$M \sin 45^0 = M \cos 45^0$$
$$= 0{,}707\, M.$$

Setzt man die Abrundung der Ecke und der Schenkel so voraus, wie die Normalprofile bestimmen, d. h. nimmt man $R = d$ und $r = \frac{R}{2}$, so findet die größte Faserspannung bei A nicht in der Kante, sondern etwa in der Mitte der Abrundung in einem Punkte α statt, welcher von der X Axe den Abstand $0{,}95\, a$ und von der Y Axe denjenigen $0{,}86\, b$ hat. Es bestimmt sich daher die größte Faserspannung in diesem Punkte vermöge der beiden Seitenmomente $0{,}707\, M$ zu

$$s_{max} = 0{,}707 \left(\frac{M}{T_x}\, 0{,}95\, a + \frac{M}{T_y}\, 0{,}86\, b\right)$$
$$= 0{,}707 \left(\frac{0{,}95\, M}{W_x} + \frac{0{,}86\, M}{W_y}\right),$$

oder, wenn wieder $v = \frac{W_x}{W_y}$ eingeführt wird, zu

$$s_{max} = 0{,}707\, \frac{M}{W_x}\, (0{,}95 + 0{,}86\, v).$$

Für die Ecke B hat man dagegen, da hierfür das um die X Axe biegende Moment eine Spannung nicht erzeugt, die Spannung

$$s = 0{,}707\, \frac{M}{W_y} = 0{,}707\, v\, \frac{M}{W_x}.$$

Nimmt man beispielsweise aus der Tabelle für das Winkeleisen von 80 mm Schenkellänge und 10 mm Stärke den Werth

C. Normalprofile für gleichschenkelige ∟-Eisen (Fig. 180).

$d = 0{,}1\,B$ für $B < 100$ mm; $R = d$; $r = \frac{d}{2}$; $d = {}^1/_{11}\,B$ für $B > 100$ mm;

B mm	d mm	F cm	G kg	e mm	a mm	b mm	T_x cm	W_x cm	η_x	T_y cm	W_y cm	η_y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
20	4	1,44	1,12	1,35	1,41	0,92	0,792	0,563	0,277	0,209	0,226	0,223	2,49
25	4	1,84	1,44	1,73	1,77	1,09	1,64	0,926	0,284	0,432	0,397	0,243	2,34
30	6	3,24	2,53	2,02	2,12	1,30	4,01	1,89	0,277	1,05	0,755	0,220	2,50
40	6	4,41	3,46	2,77	2,83	1,74	10,2	3,60	0,289	2,68	1,54	0,247	2,34
50	7	6,51	5,1	3,49	3,54	2,14	23,5	6,64	0,288	6,18	2,89	0,251	2,30
60	8	8,96	7,0	4,21	4,24	2,53	47,2	11,1	0,292	12,4	4,90	0,258	2,26
70	9	11,8	9,2	4,92	4,95	2,94	84,8	17,2	0,295	22,3	7,58	0,259	2,26
80	10	15,0	11,7	5,63	5,66	3,35	141	24,9	0,293	37,1	11,1	0,262	2,24
90	11	18,6	14,5	6,35	6,36	3,75	222	34,9	0,295	58,4	15,6	0,264	2,24
100	12	22,6	17,6	7,06	7,07	4,15	333	47,1	0,295	87,7	21,2	0,265	2,22
120	13	29,5	23,0	8,52	8,48	4,93	634	74,9	0,299	167	33,8	0,270	2,21
150	16	45,4	35,4	10,7	10,6	6,14	1525	144	0,299	401	65,3	0,271	2,20

$$v = \frac{24,9}{11,1} = 2,24$$

an, so erhält man für den Punkt α die Spannung

$$s_{max} = 0,707\,(0,95 + 0,86\,.\,2,24)\,\frac{M}{W_x} = 2,03\,\frac{M}{W_x},$$

also mehr als doppelt so groß wie diejenige größte Spannung ist, die dasselbe Moment M hervorrufen würde, wenn es eine Biegung um die X Axe anstreben, d. h. wenn die Belastung die Richtung der Y Axe haben würde.

Es ist auch leicht zu ersehen, daß ein Winkeleisen, dessen einer Flansch BC horizontal gelagert ist und welches durch vertical in der Ebene MM wirkende Belastungen angegriffen wird, eine Durchbiegung in einer von der verticalen abweichenden Richtung annehmen muß. Es läßt sich nämlich die Durchbiegung f eines Balkens in einem gewissen Punkte nach den in §. 35 angegebenen Formeln allgemein durch

$$f = k\,\frac{M}{T}$$

ausdrücken. Hierin bedeutet k eine von der Länge und Unterstützungsart abhängige Constante, z. B. für die Mitte eines auf zwei Punkten frei aufliegenden Balkens von der Länge l, der in der Mitte durch K belastet ist, hat man

$$f = \frac{K}{48\,TE}\,l^3 = \frac{l^2}{12\,E}\,\frac{Kl}{4\,T} = \frac{l^2}{12\,E}\,\frac{M}{T},$$

also

$$k = \frac{l^2}{12\,E}.$$

Demgemäß wird das erwähnte Winkeleisen durch die beiden um die X Axe und Y Axe biegenden Seitenmomente

$$M \sin 45^0 = M \cos 45^0 = 0,707\,M$$

zwei Durchbiegungen nach den zu einander senkrechten Richtungen SY und SX erleiden, für welche man hat

$$f_x = SD_1 = k\,\frac{0,707\,M}{T_x}$$

und

$$f_y = SD_2 = k\,\frac{0,707\,M}{T_y},$$

so daß die aus f_1 und f_2 resultirende Gesammtbiegung

$$f = SD = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

nach einer Richtung SD erfolgt, die mit der Y Axe einen Winkel β, also

mit der Verticalen MM einen Winkel $\beta - 45^0$ einschließt, für welchen man hat:

$$tg\,\beta = \frac{f_y}{f_x} = \frac{T_x}{T_y}\,.$$

Bei den der Tabelle C zu Grunde gelegten Verhältnissen ergiebt sich für alle Querschnitte fast genau

$$\frac{T_x}{T_y} = 3{,}8,$$

so daß man

$$\beta = arc\ tg\ 3{,}8 = 75^0\,15',$$

also die Abweichung der Biegungsebene dieser Winkeleisen von der Verticalebene zu

$$DSM = \beta - 45^0 = 30^0\,15'$$

erhält.

Will man eine vertical gerichtete Durchbiegung des mit einem Schenkel horizontal gelagerten Winkeleisens erreichen, so hat man $f_x = f_y$ zu setzen und erhält, wenn jetzt M_x und M_y wieder allgemein die beiden Momente darstellen, welche um die X Axe und bezw. Y Axe zu biegen streben:

$$k\,\frac{M_x}{T_x} = k\,\frac{M_y}{T_y}\,,$$

d. h.

$$\frac{M_x}{M_y} = \frac{T_x}{T_y}\,,$$

also für die Winkeleisen der Tabelle C

$$\frac{M_x}{M_y} = 3{,}8 = tg\ 75^0\,15'.$$

Betrachtet man die beiden Momente M_x und M_y als die Seitenmomente, in welche das Belastungsmoment M bei rechtwinkeliger Zerlegung nach den Hauptaxen zerfällt, so folgt, daß dieses Moment in einer Richtung SM_0 wirksam sein müsse, deren Neigung $M_0SY = \varphi$ gegen die Y Axe durch

$$cotg\,\varphi = \frac{M_x}{M_y} = 3{,}8 \text{ zu } \varphi = 14^0\,45'$$

ausgedrückt ist, oder es muß die Ebene, in welcher das Moment M wirksam ist, gegen die Verticale um einen Winkel

$$MSM_0 = 45^0 - \varphi = 30^0\,15'$$

geneigt sein, wenn das Winkeleisen in einer verticalen Ebene sich durchbiegen soll. Denkt man sich daher dieses biegende Moment durch eine Kraft K in der Ebene SM_0 dargestellt, so ergiebt sich, daß in Folge der Abweichung dieser Kraft K von der Verticalrichtung auf das Winkeleisen ein

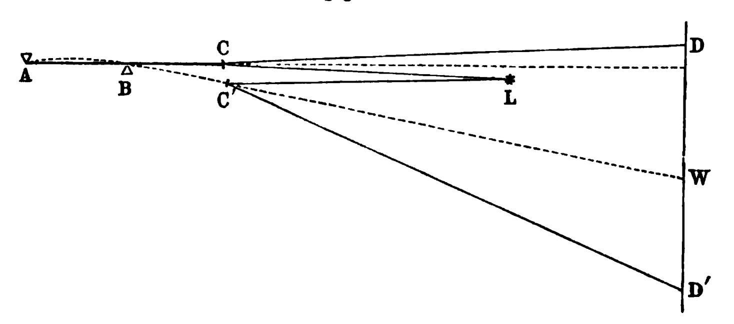
horizontaler Druck H und ein verticaler Druck V ausgeübt wird, für welche man hat

$$H = V\, tg\, 30^0\, 15' = 0{,}58\, V.$$

Man kann den Zustand daher auch dadurch kennzeichnen, daß auf das betreffende, durch eine Verticalkraft V belastete Winkeleisen noch ein horizontaler Zwang (etwa durch Führungen ꝛc.) von dem Betrage 0,58 V ausgeübt werden muß, wenn die Durchbiegung in verticaler Ebene erfolgen soll.

Die vorstehend angegebenen Resultate sind von O. Intze durch sehr schöne Versuche mit einem sinnreichen Apparate in der Versammlung deutscher Ingenieure zu Stuttgart, 1881, bestätigt worden. Der dazu dienende Apparat bestand im Wesentlichen aus einem bei A und B, Fig. 181, unterstützten Winkeleisen AC von 2 m Länge, welches an seinem freien Ende C durch ein Gewicht K belastet wurde. Die hierdurch hervorgerufene

Fig. 181.



Biegung des Stabes, welcher dadurch etwa in die punktirte Lage ABC' gelangt, wurde mit Hülfe eines Spiegels zur Anschauung gebracht, der am freien Ende C des Stabes normal zu dessen Axe befestigt war, und daher an der Neigungsveränderung theil nahm, welche dem freien Stabende in Folge der Durchbiegung mitgetheilt wurde. Ein bei L aufgestelltes Drummond'sches Kalklicht wurde von dem Spiegel nach D und bezw. D' auf eine 14 m entfernte Wand W projicirt, und auf diese Weise nicht nur die lineare Durchbiegung in vergrößertem Maßstabe, sondern auch die Abweichung der Biegungsebene von der Belastungsebene zur Anschauung gebracht, wenn der letzteren verschiedene Richtungen gegeben wurden. Hinsichtlich der näheren Erörterung dieser interessanten Versuche, welche gleichzeitig zur Ermittelung des Elasticitätsmoduls des angewandten Materials benutzt wurden, muß auf die angezeigte *) Quelle verwiesen werden.

*) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure, 1881, October.

§. 47. **Reducirte Querschnitte.** Ist $abcd$, Fig. 182, ein beliebiger, hier der Einfachheit halber rechteckig vorausgesetzter Querschnitt eines Balkens von der Breite b und Höhe $h = 2e$, so erzeugt ein in diesem Querschnitte wirksames Biegungsmoment M in der äußersten Faserschicht ab oder cd eine specifische Faserspannung s, welche nach dem Vorstehenden durch

Fig. 182.

$$s = \frac{M}{W} = \frac{Me}{T}$$

ausgedrückt ist. Die Spannung in irgend welchem anderen, von der neutralen Axe NN um y entfernten horizontalen Streifen fg ist durch $s_y = s\,\frac{y}{e}$ dargestellt, und daher die daselbst durch einen unendlich schmalen Streifen von der Höhe ∂y geäußerte Kraft durch $s_y b \partial y = sb\,\frac{y}{e}\,\partial y$ gegeben. Zieht man die Diagonalen ac und bd in dem Querschnitte, so ist $f_1 g_1 = b\,\frac{y}{e}$, und also hat man die von dem betrachteten Streifen geäußerte Spannkraft auch gleich $s \,.\, f_1 g_1 \,.\, \partial y$, d. h. gleich der Kraft, welche ein Streifen von der Breite $f_1 g_1$ und der Höhe ∂y äußern würde, der gleichmäßig über seine Fläche der Spannung s der äußersten Faser ausgesetzt wäre. Da dies für jeden beliebigen positiven oder negativen Abstand y gilt, so ersieht man hieraus, daß man die Wirkungen der ganzen Querschnittsfläche $abcd$ ersetzt denken kann durch diejenigen der mit der Spannung s gleichmäßig behafteten, in der Figur schraffirten Fläche $abmdc$, und zwar derart, daß die von der oberhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche dcm geäußerte Spannung derjenigen entgegengesetzt ist, welche von der unterhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche abm ausgeübt wird. Ist $\mu = m_1 m_2$ der Abstand der Schwerpunkte m_1 und m_2 dieser beiden Flächenstücke und f der Inhalt eines jeden derselben, so hat man das Moment des durch die beiden gedachten Spannkräfte gebildeten Kräftepaares gleich

$$\mu f s = W = M.$$

Wenn der Balkenquerschnitt, wie hier vorausgesetzt, ein Rechteck ist, hat man

$$\mu = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{h}{2} = \frac{2}{3}\,h$$

und

$$f = \frac{1}{2}\,b\,\frac{h}{2} = \frac{bh}{4},$$

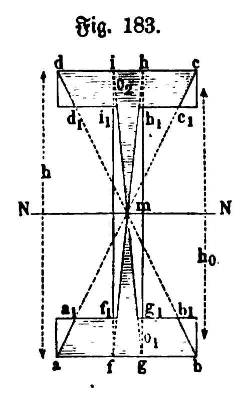
folglich das gedachte Moment

$$\frac{2}{3} h \frac{bh}{4} s = \frac{bh^2}{6} s,$$

entsprechend dem Widerstandsmomente des rechteckigen Querschnittes $W = \frac{bh^2}{6}$ (s. §. 45).

Die so erhaltene Fläche $dbmdc$ nennt man die reducirte Fläche des Querschnittes, und es ist leicht ersichtlich, wie man für jede beliebige andere Form des Balkenquerschnittes zu der reducirten Fläche desselben einfach dadurch gelangt, daß man die horizontale Breite an jeder um y von der neutralen Axe entfernten Querschicht in dem Verhältnisse $\frac{y}{e}$ verringert, unter e den Abstand derjenigen äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden, für welche die specifische Spannung gleich s angenommen ist. Hieraus ergiebt sich z. B. für den symmetrischen I förmigen Querschnitt $abcd$, Fig. 183, die reducirte Querschnittsfläche, wenn man durch die Mitte m sowohl die Diagonalen ac und bd sowie auch diejenigen fh und gi zieht, indem dann $a b b_1 a_1$ und $c d d_1 c_1$ den beiden Flanschen zugehören, während $f_1 g_1 m h_1 i_1$ für die Mittelrippe gilt.

Fig. 183.



Ist der I förmige Querschnitt, wie dies bei gußeisernen Balken zu sein pflegt, unsymmetrisch, Fig. 184 und 185 (a. f. S.), derart, daß die Abstände der äußersten Fasern e_1 und e_2 sind, und daher die Spannungen daselbst s_1 und s_2 in dem Verhältnisse $\frac{s_1}{s_2} = \frac{e_1}{e_2}$ stehen, so kann man die Reduction der Querschnittsfläche ebensowohl auf die Faserspannung s_1 wie auf diejenige s_2 vornehmen. Im ersteren Falle macht man $a'b' = ab$ im Abstande e_1 von NN, Fig. 184, und zieht von m nach a', b', f' und g' gerade Linien, während man, wenn der Reduction die Spannung s_2 in ab, Fig. 185, zu Grunde gelegt werden soll, $d'c' = dc$ im Abstande e_2 von NN zu machen, und von m durch d', c', h' und i' zu ziehen hat. Die reducirten Flächen sind in beiden Figuren durch Schraffirung hervorgehoben.

Aus diesen Figuren ersieht man, daß bei Balken mit I förmigen Querschnitten, wie Fig. 183, die mittlere Wand viel weniger ausgenutzt wird, als die von der neutralen Axe entfernteren Flanschen. Es wird daher vortheilhaft sein, das zur Ausführung des Trägers zu verwendende Material

möglichst an den günstigeren Stellen, d. h. zur Bildung der Flanschen anzubringen, und der Mittelwand nur die durchaus erforderliche Dicke d zu geben. In welcher Weise diese Dicke zu bestimmen ist, wird sich aus den folgenden Paragraphen ergeben.

Fig. 184.

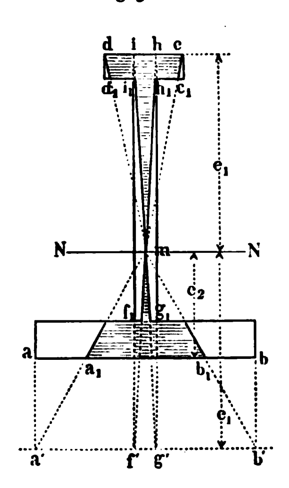
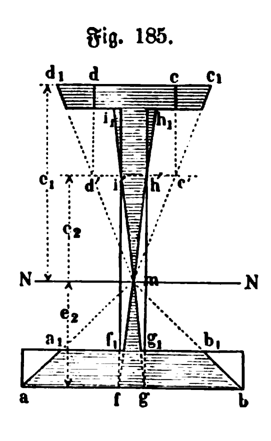
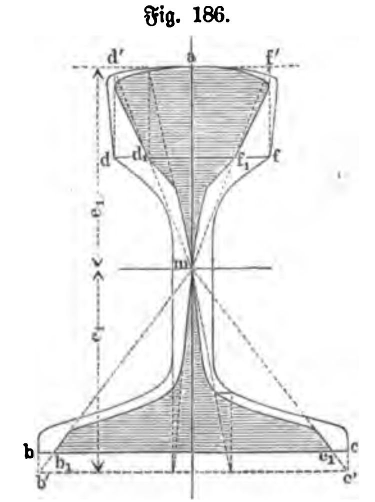


Fig. 185.



Wenn die Stärke d der Mittelwand nur gering ist, wie dies z. B. bei den später näher zu betrachtenden Blechträgern der Fall ist, so kann man annähernd genug den Theil $f_1\, g_1\, m\, h_1\, i_1$ der reducirten Querschnittsfläche als klein vernachlässigen und für den Fall, daß auch die Dicke d_1 der Flanschen nur unbedeutend ist im Vergleiche zur Höhe h des Querschnittes, darf man den Querschnitt $b\, d_1$ eines Flanschen für die reducirten Querschnittsflächen $a\, b\, b_1\, a_1$ bezw. $c\, d\, d_1\, c_1$, Fig. 183, setzen. Jeder dieser Flanschen äußert demnach eine Spannkraft gleich $s\, b\, d_1$, und da man diese Kräfte in den Mitten der Flanschen, also im Abstande $h_0 = h - d_1$ von einander annehmen darf, so erhält man das Widerstandsmoment für einen solchen Querschnitt zu

Fig. 186.



$$W = s\, b\, d_1\, h_0.$$

Für Blech- und Fachwerksträger (s. unten) kann man in den meisten Fällen von dieser angenäherten Formel Gebrauch machen.

Aus dem Angeführten ergiebt sich auch leicht die Construction, welche dazu dienen kann, für irgend welchen beliebigen Querschnitt, z. B. den einer Eisenbahnschiene abc, Fig. 186, die reducirte Fläche $a d_1 m b_1 c_1 f_1$ zu bestimmen. Man hat dazu nur nöthig, eine genügende Anzahl von Breiten, wie z. B. df in dem Verhältnisse $\frac{y}{e_1}$ zu reduciren, indem man df auf die Horizontale durch a gleich $d'f'$ projicirt und die Geraden md' und mf' zieht, welche die zugehörige reducirte Breite $d_1 f_1$ zwischen sich einschließen. Ebenso macht man wieder $b'c' = bc$ im Abstande e_1 von der neutralen Axe und zieht von m nach b' und c', um $b_1 c_1$ zu erhalten u. s. f.

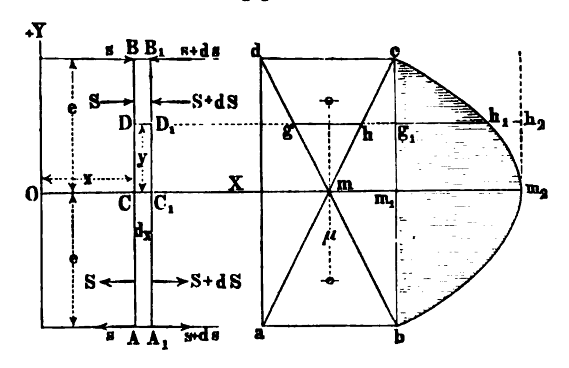
Horizontale und verticale Schubspannungen. Bisher wurden ausschließlich die Wirkungen der biegenden Momente M auf die Balken betrachtet, wodurch in den einzelnen Elementen irgend eines Querschnittes gewisse auf dieser Querschnittsebene normale Zug- und Druckspannungen s erzeugt werden, als deren Resultat ein Kräftepaar auftritt, welches mit dem biegenden Momente im Gleichgewichte ist. Nun wirkt aber in jedem Balkenquerschnitte auch eine gewisse verticale Scheerkraft V, deren Ermittelung für die verschiedenen Belastungsfälle der Balken im Vorhergehenden gezeigt wurde. Diese Verticalkraft V ist bestrebt, den Balken in dem betreffenden Querschnitte in zwei Theile zu trennen, derart, daß sie das eine Stück an dem anderen entlang der Querschnittsebene vertical zu verschieben trachtet. Einer solchen Trennung widersteht das Material vermöge seiner Cohäsion, und zwar dadurch, daß in den einzelnen Elementen des besagten Querschnittes verticale, also in die Querschnittsebene hineinfallende Reactionen rege werden, welche für jedes der beiden Balkenstücke solche Richtung haben, daß sie der auf dieses Balkenstück einwirkenden Verticalkraft V das Gleichgewicht halten. Die so in dem Querschnitte auf das diesseits desselben gelegene Balkenstück ausgeübten Reactionen sind daher denjenigen genau gleich und entgegengerichtet, welche in denselben Punkten auf das jenseits des Querschnittes befindliche Balkenstück wirken, so daß in jedem Querschnitte diese tangentialen Spannungen als innere Kräfte sich ebenso gegenseitig aufheben, wie dies auch für die auf beide Seiten des Querschnittes wirkenden normalen Zug- und Druckspannungen s gilt. Man nennt diese, in die Schnittfläche hineinfallenden tangentialen Kräfte die Schubspannungen, und es sollen dieselben fernerhin, bezogen auf die Flächeneinheit (1 qmm), mit σ bezeichnet werden, zum Unterschiede von den normalen Schub- und Druckspannungen s. Ebenso soll, dem Früheren entsprechend, eine Schubkraft positiv heißen, wenn sie die Richtung der vertical aufwärts gedachten

§. 48.

positiven Y Axe hat, und umgekehrt. Die X Axe soll hier wie früher vom Anfangspunkte nach rechts gerichtet positiv genannt werden.

Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, stellen sich nicht nur die zum Gleichgewichte mit V erforderlichen verticalen Schubkräfte in den Querschnittsflächen ein, sondern auch in horizontalen sowie in schräg geneigten Schnitten des Balkens treten Schubkräfte auf, so daß man in irgend welchem Punkte im Innern eines Balkens Schubspannungen nach allen möglichen Richtungen parallel mit der Belastungsebene des Balkens anzunehmen hat. Senkrecht zu dieser Belastungsebene kommen keinerlei Spannungen vor, wenn, wie hier immer stillschweigend geschehen soll, in diese Belastungsebene

Fig. 187.



Schwerpunktshauptaxen der Querschnitte hineinfallen. Es sollen im Folgenden speciell die verticalen Schubspannungen mit σ_v bezeichnet werden, während der Buchstabe σ_h für die horizontalen, also die mit der geraden Balkenaxe parallelen Schubspannungen gewählt werden mag. Zur Ermittelung der einzelnen Schubspannungen kann folgende Betrachtung dienen.

In dem Querschnitte AB eines Balkens, Fig. 187, im Abstande x vom Anfangspunkte, für welchen die reducirte Querschnittsfläche durch $abmcd$ gegeben sein mag, findet, unter M das Biegungsmoment für den Querschnitt AB verstanden, in den äußersten Fasern bei A und B die Spannung

$$s = \frac{M}{W} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

statt, wenn $W = \frac{T}{e}$ das Widerstandsmoment des Querschnittes ist. Wenn ferner f die reducirte Fläche $abm = cdm$ zu jeder Seite der neutralen Axe ist, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die ganze auf eine Hälfte des Querschnittes zu jeder Seite der neutralen Axe wirkende normale Spannkraft

$$S = f s = \frac{f}{W} M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

setzen.

Dieselben Gleichungen gelten für den um ∂x entfernten Querschnitt $A_1 B_1$, für welchen f und W dieselben Werthe haben, für welchen jedoch das von x abhängige Moment der biegenden Kräfte durch $M + \partial M$ ausgedrückt ist. Also hat man für diesen Querschnitt $A_1 B_1$:

$$s + \partial s = \frac{M + \partial M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$S + \partial S = f(s + \partial s) = \frac{f}{W}(M + \partial M) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus (4) und (2) erhält man durch Subtraction den Ueberschuß der auf den Querschnitt $A_1 B_1$ zu jeder Seite der neutralen Axe wirkenden Zug- oder Druckspannung:

$$\partial S = f \partial s = \frac{f}{W} \partial M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Ueberschuß ∂S strebt die obere Hälfte $C B_1$ des betrachteten unendlich kleinen Balkenstückes von der Länge ∂x auf der neutralen Faserschicht $C_1 C$ von rechts nach links zu verschieben, und es muß, damit diese Verschiebung nicht eintrete, der untere Balkentheil in der Berührungsfläche $C C_1$ eine gleiche, von links nach rechts gerichtete Reaction auf den oberen Balkentheil ausüben, d. h. es müssen in $C C_1$ Schubspannungen erregt werden, welche auf den oberen Balkentheil von C nach C_1 gerichtet sind. Selbstredend gilt die gleiche Betrachtung in Hinsicht auf eine Verschiebung des unteren Balkentheiles, dessen von links nach rechts angestrebte Verschiebung durch eine von dem oberen Balkentheile geäußerte Schubspannung im Sinne von C_1 nach C und im Betrage ∂S verhindert werden muß. Hieraus geht hervor, daß in der horizontalen Fläche $C C_1$ eine Schubkraft im Betrage ∂S erregt wird. Die Größe dieser Anhaftungsfläche $C C_1$ ist bei einer Breite des Balkens $= b$ durch $b \partial x$ gegeben, und daher hat man, wenn σ die Spannung in $C C_1$ pro Flächeneinheit bezeichnet, den ganzen Betrag der Schubkraft gleich $\sigma b \partial x$ zu setzen, woraus

$$\partial S = \sigma b \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

folgt. Aus (5) und (6) ergiebt sich nun einfach

$$\sigma b \partial x = \frac{f}{W} \partial M,$$

und da bekanntlich

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \text{ und } W = \mu f$$

ist, so erhält man

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{V}{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

In dieser Formel bedeutet σb die Schubspannung für eine Längeneinheit in der Richtung der Axe, und man ersieht daraus, daß diese Spannung, also auch die specifische Schubspannung σ in der neutralen Axe des Balkens proportional mit der verticalen Scheerkraft V, proportional mit der Größe der reducirten Querschnittsfläche f, und umgekehrt proportional mit dem Widerstandsmomente $W = \frac{T}{e}$ des Querschnittes ist.

Beispielsweise hat man für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h

$$f = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4} \text{ und } W = \frac{bh^2}{6},$$

daher ist für denselben die Schubkraft in der neutralen Axe pro Längeneinheit des Balkens

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3}{2h} V.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die horizontale Schubkraft σ_y in einem Längenschnitte DD_1, welcher nach der einen oder anderen Seite von der neutralen Axe um $CD = y$ entfernt ist, durch dieselbe Formel (7) ausgedrückt ist, wenn man nur darin unter f den Querschnitt desjenigen Stückes $ghcd$ der reducirten Fläche versteht, welcher auf der einen Seite des betreffenden Längenschnittes gelegen ist. Wenn man nämlich für diesen Längenschnitt dieselbe Betrachtung anstellt, wie hier für den Schnitt OC_1 in der neutralen Axe geschehen, so findet sich, daß der einzige Unterschied darin besteht, daß nunmehr die Spannkraft S des einerseits der Schnittfläche gelegenen Theiles, gleichviel ob DB oder DA, durch $S = s.dcgh$ ausgedrückt ist. Man kann daher den Ausdruck (7) ganz allgemein für die horizontale Schubspannung in irgend welchem Längenschnitte anwenden, wenn man unter f denjenigen Theil der algebraisch gedachten reducirten Querschnittsfläche versteht, welcher einerseits von dem Längenschnitte gelegen ist.

Aus (7) ergiebt sich daher, daß die horizontale Schubkraft zu Null wird nicht nur für alle Punkte desjenigen Querschnittes, in welchem $V = 0$, also M ein Maximum ist, sondern auch für die äußersten Punkte aller Querschnitte, weil für dieselben f, in dem gedachten Sinne genommen, verschwindet.

Man erhält ein anschauliches Bild von der Vertheilung der horizontalen Schubkräfte, wenn man in der Figur senkrecht zu bc in allen Punkten

Ordinaten aufgetragen denkt, welche nach einem beliebig gewählten Maßstabe die horizontalen Schubspannungen darstellen, die in der Höhe dieser Punkte auftreten. Dadurch erhält man als Begrenzung der in der Figur schraffirten Fläche eine Curve $c m_2 b$, welche für den rechteckigen Querschnitt eine Parabel mit dem Scheitel in m_2 ist. Hiervon überzeugt man sich leicht dadurch, daß, wenn $m_1 m_2$ die Schubkraft in m und $g_1 h_1$ diejenige in $g h$ darstellt, man nach (7)

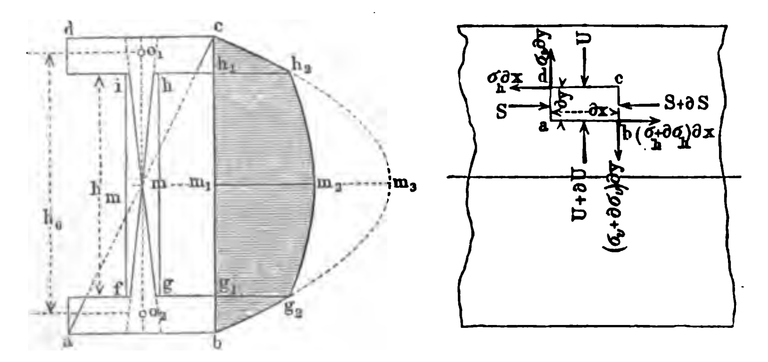
$$m_1 m_2 : g_1 h_1 = d c m : d c h g,$$

also

$$m_1 m_2 : h_1 h_2 = d c m : g h m = e^2 : y^2$$

hat. Ganz in derselben Weise erkennt man, daß das Diagramm der Schubspannungen für einen I förmigen Querschnitt $a b c d$, Fig. 188, sich aus

Fig. 188. Fig. 189.



den beiden Parabeln $b m_3 c$ und $g_2 m_2 h_2$ zusammensetzt, welche den Rechtecken $a b c d$ und bezw. $f g h i$ entsprechen. Man ersieht auch, daß der mittlere Parabelbogen $g_2 m_2 h_2$ um so flacher ausfällt, je dünner die Mittelwand $g h$ ist, so daß man bei den Blechträgern mit genügender Genauigkeit die Schubkraft für alle Punkte der Mittelwand gleich dem größten Werthe $m_1 m_2$ in der neutralen Axe annehmen darf.

Denkt man sich, Fig. 189, im Innern eines Balkens an beliebiger Stelle ein unendlich kleines Parallelepiped von der Grundfläche $a b c d$ mit der horizontalen Seite ∂x und der verticalen Höhe ∂y und von der Länge senkrecht zur Bildebene gleich Eins, so muß dasselbe unter dem Einflusse sämmtlicher auf dasselbe wirkenden Kräfte im Gleichgewichte stehen. Diese Kräfte sind zunächst die auf die vier Seitenflächen wirkenden Normalkräfte und die in diesen vier Flächen thätigen horizontalen und verticalen Schubkräfte. Die Normalkräfte S und $S + \partial S$ auf die Flächen $a d$ und $b c$ heben sich gegenseitig auf, da sie nur um die gegen S verschwindend kleine Größe ∂S

verschieden sind, und dasselbe gilt für die beiden auf cd und ab wirkenden verticalen Spannungen U und $U + \partial U$.

Bezeichnet man nun mit σ_h die horizontale Schubspannung pro Flächeneinheit der Flächen dc, und mit σ_v die verticale specifische Schubspannung in ad, so sind die totalen Tangentialspannungen in diesen Flächen durch $\sigma_h \partial x$ und bezw. $\sigma_v \partial y$ dargestellt. Die entsprechenden Spannungen in den zusammenstoßenden Flächen ab und bc werden sich dann durch $(\sigma_h + \partial \sigma_h) \partial x$ und $(\sigma_v + \partial \sigma_v) \partial y$ ausdrücken lassen. Diese vier Schubspannungen müssen nun unter sich ebenfalls im Gleichgewichte sein, da das Eigengewicht des Parallelepipeds $\gamma \partial x \partial y$ als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung zu vernachlässigen ist. Für den Eckpunkt b als Mittelpunkt der statischen Momente gilt daher die Gleichung

$$\sigma_h \partial x . \partial y = \sigma_v \partial y . \partial x,$$

oder

$$\sigma_h = \sigma_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung besagt also, daß **in jedem Punkte des Balkens die horizontalen und verticalen Schubspannungen pro Flächeneinheit von gleicher Größe sind.**

Demgemäß wird sich auch in jedem Querschnitte die verticale Schubspannung in den verschiedenen Abständen von der neutralen Axe nach demselben Gesetze vertheilen, wie im Vorstehenden für die horizontalen Spannungen gezeigt und an den Figuren 187 und 188 erläutert ist. Es hat daher in jedem Querschnitte auch die verticale Schubspannung in der neutralen Axe einen größten Werth, während sie in den davon entferntesten Faserschichten gleich Null ausfällt. Ist z. B. in Fig. 187 die specifische Schubspannung in der neutralen Axe durch $m_1 m_2$ dargestellt, so ist im Punkte D im Abstande y von der neutralen Axe die verticale Schubspannung ebenso wie die horizontale durch die Ordinate $g_1 h_1$ des Schubkraftdiagramms daselbst gegeben. Ein horizontaler Streifen des Querschnittes an dieser Stelle von der Breite b und Höhe ∂y wird daher eine verticale Kraft äußern von der Größe

$$b \partial y . g_1 h_1 = b z \partial y,$$

wenn mit z die Ordinate $g_1 h_1$ des Schubkraftdiagramms bezeichnet wird. Es ist daraus deutlich, wie bei constanter Breite b die ganze von dem Querschnitte geäußerte verticale Schubkraft

$$\int_{-e}^{+e} b z \partial y$$

durch den Inhalt des Schubkraftdiagramms $b c m_2$ gemessen wird. Diese gesammte verticale Schubkraft des Querschnitts hat nun, wie oben erwähnt

wurde, der Verticalkraft V des Querschnitts das Gleichgewicht zu halten, so daß der Ausdruck folgt:

$$V = \int_{-e}^{+e} b\, z\, \partial y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für den rechteckigen Querschnitt z. B. von der Breite b und Höhe $h = 2e$, für welchen, wie oben gezeigt worden, die Begrenzung der Schubkraftordinaten eine Parabel $b\, m_2 c$ ist, hat man den Inhalt derselben bekanntlich

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\, \partial y = \frac{2}{3} h \,.\, m_1 m_2 = \frac{2}{3} h\, \sigma_0,$$

folglich erhält man die Schubkraft σ_0 in der neutralen Axe aus (9) durch

$$V = b\, \frac{2}{3} h\, \sigma_0 \text{ zu } \sigma_0 = \frac{3}{2h} \frac{V}{b}$$

übereinstimmend mit dem oben aus (7) ermittelten Werthe.

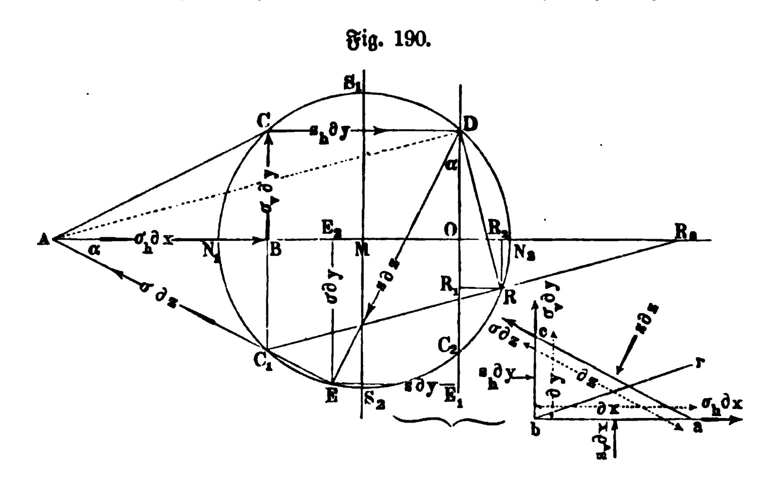
Spannungsmaxima. Wie schon oben bemerkt wurde, stellen sich im Innern eines Balkens Schubkräfte nicht nur in verticaler und horizontaler, sondern nach jeder beliebigen, mit der Belastungsebene parallelen Richtung ein. Diese Kräfte werden für verschiedene Neigungen der gedachteu Schnittebene verschieden groß ausfallen, und es ist daher von Interesse, diejenigen Richtungen kennen zu lernen, nach welchen die Schubspannungen ihre absolut größten Werthe annehmen. Die Ermittelung dieser Spannungsmaxima ist schon in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 auf analytischem Wege vorgenommen, es soll hier der Anschaulichkeit halber die Untersuchung graphisch in der von Culmann*) angegebenen Art angeführt werden. §. 49.

Es sei $a\,b\,c$, Fig. 190 (a. f. S.), der Durchschnitt eines kleinen dreiseitigen Prismas von einer Länge senkrecht zur Zeichnung gleich Eins, dessen Basis $a\,b = \partial x$ horizontal, und dessen Seite $b\,c = \partial y$ vertical gerichtet sein mag. Die dritte Seite $a\,c = \partial z$ soll unter dem beliebigen Winkel α gegen die Horizontale $a\,b$ geneigt sein. Es handelt sich darum, für diese unter dem willkürlich gewählten Winkel α geneigte Schnittfläche $a\,c$ die normale Spannung s und die Schubspannung σ zu ermitteln. Die beiden anderen Prismaflächen $b\,c$ und $a\,b$ sind gewissen Normalspannungen s_h und s_v und ebenso gewissen Schubspannungen σ_v und σ_h ausgesetzt, von welchen s_h aus dem bekannten Biegungsmomente M des Balkens in $b\,c$ und $\sigma_h = \sigma_v$ aus der gleichfalls bekannten Verticalkraft V nach dem Vorstehenden leicht zu ermitteln sind. Die Spannung s_v dagegen ist nicht

*) Culmann, Die graphische Statik.

bekannt; dieselbe hängt von der Art ab, in welcher die verticale Belastung an dem Trägerquerschnitte angreift, und man kann in den gewöhnlichen Fällen eine solche Anordnung voraussetzen, vermöge deren die Spannung s_v auf ab zu Null wird. Wenn diese Annahme*) gemacht wird, so ist die Aufgabe, aus den drei bekannten Kräften $s \partial y$, $\sigma_h \partial x$ und $\sigma_v \partial y$ die Spannungen s und σ, oder die totalen Kräfte $s \partial z$ und $\sigma \partial z$ zu ermitteln, einfach auf die Verzeichnung des betreffenden Kräftepolygons zurückgeführt.

Fig. 190.



Trägt man nämlich in $ABCD$ die drei Kräfte $\sigma_h \partial x$, $\sigma_v \partial y$ und $s_h \partial y$ ihrer Richtung und Größe nach an einander an, so erhält man in der Schlußlinie DA die Resultirende aus den beiden die Fläche ac angreifenden Kräften $\sigma \partial z$ und $s \partial z$, und diese Kräfte selbst, wenn man durch A eine Parallele AE mit ac und durch D eine zu AE senkrechte Gerade zieht. Dann ist nach dem gewählten Kräftemaßstabe

$$DE = s \partial z \text{ und } EA = \sigma \partial z.$$

Projicirt man den Punkt E auf AB und auf die Verticale DO durch D nach E_2 und E_1, so ist leicht zu erkennen, daß

*) Diese Voraussetzung trifft, wie eine nähere, hier nicht weiter durchzuführende Untersuchung ergiebt, dann zu, wenn die Belastung den Querschnitt in einer solchen Weise angreift, daß die Vertheilung nach demselben Gesetze erfolgt, welches vorstehend für die Vertheilung der verticalen Schubkraft auf die Querschnittsfläche gefunden wurde. Danach würde bei Blechträgern annähernd eine gleichmäßig auf die Mittelwand vertheilte Uebertragung stattfinden müssen, wie sie der wirklichen Ausführung auch meistens entspricht. S. Ritter, Lehrb. der Ingenieurmechanik.

$$EE_2 = \sigma \partial z . \sin \alpha = \sigma \partial y$$

und

$$EE_1 = s \partial z . \sin \alpha = s \partial y$$

ist. Verbindet man jetzt A mit C, so hat man auch $CAB = \alpha$, denn für diesen Winkel ist wegen der Gleichheit von σ_h und σ_v:

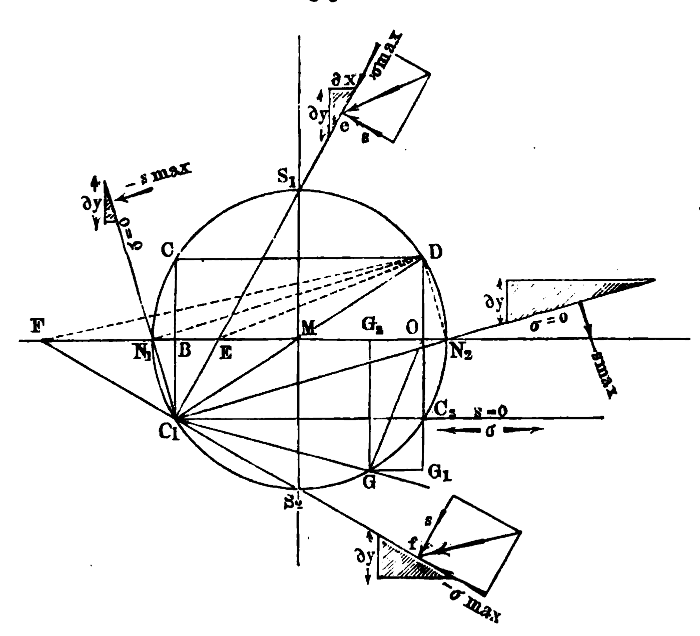
$$tg\ CAB = \frac{\sigma_v \partial y}{\sigma_h \partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha.$$

Verlängert man daher CB bis zum Durchschnitte C_1 mit AE, so ist auch $BC = BC_1$. Die drei Punkte D, C und C_1 liegen daher auf einem Kreise, für welchen wegen des rechten Winkels bei C die Gerade DC_1 ein Durchmesser ist, und welcher Kreis wegen des rechten Winkels bei E auch diesen Punkt E in sich aufnimmt. Man muß bemerken, daß dieser Kreis von der Neigung α der Fläche ac ganz unabhängig ist, und jederzeit für den Punkt b construirt werden kann, indem man, wenn ∂y gleich der Längeneinheit vorausgesetzt wird, $BC = BC_1$ gleich der horizontalen Schubspannung σ_h und CD gleich der horizontalen Zug- oder Druckspannung s_h nach einem beliebigen Kräftemaßstabe anträgt. Unter dieser Voraussetzung, ∂y gleich Eins, erhält man alsdann nach eben diesem Maßstabe in EE_1 die specifische Normalspannung s und in EE_2 die specifische Schubspannung σ für diejenige ebene Schnittfläche, welche parallel mit EC_1 durch den betrachteten Punkt b hindurchgelegt gedacht wird.

Der Kreis durch D, C und C_1 zum Mittelpunkte M giebt daher ohne Weiteres die Normal- und Schubspannung jeder beliebigen durch das Element b gelegten Schnittfläche in den Ordinaten, welche in Bezug auf die Axen OA und OD demjenigen Punkte E entsprechen, in welchem der Kreisumfang durch eine Parallele mit der betreffenden Schnittfläche getroffen wird, die man durch den Punkt C_1 führt. Will man z. B. für eine durch das Element bc, oder was damit gleichbedeutend ist, durch den Punkt b gelegte Schnittfläche br die Spannungen finden, so legt man durch C_1 eine mit br parallele Gerade, welche den Kreis in R schneidet, und erhält in den Ordinaten $RR_1 = s_r$ und $RR_2 = \sigma_r$ die specifischen Spannungen für die Schnittfläche br. Man erkennt auch, daß die Normalspannung RR_1 dieser Schnittfläche und diejenige EE_1 der Fläche ac auf entgegengesetzten Seiten der Axe DO gelegen sind, wodurch ein entgegengesetzter Sinn der Spannungen angedeutet ist. Während nämlich die Normalspannung auf die Fläche ac eine in das Prisma abc hinein gerichtete, durch DE angezeigte Pressung ist, wird die Fläche br durch eine von dem Prisma bcr fort gerichtete, durch DR angegebene Zugspannung angegriffen. In welcher Richtung eine Spannung überhaupt wirkt, davon kann man in

jedem Falle sich Rechenschaft geben, wenn man aus dem Kräftepolygone die Resultirende der beiden Spannkräfte aufsucht. Diese Resultirende ist z. B. für die Fläche ac der Richtung und Größe nach durch DA gegeben, daher müssen die Einwirkungen, welche auf die Fläche ac von der äußeren Umgebung ausgeübt werden, in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne in den Richtungen von D nach E und von E nach A erfolgen. Ebenso erhält man für die Fläche br, welche als Begrenzung des Prismas bcr zu denken ist, die auf dieselbe von den sie begrenzenden Körpertheilchen aus-

Fig. 191.



geübte Einwirkung durch DR_0 dargestellt, d. h. die beiden Spannungen wirken in der Richtung von D nach R und von R nach R_0 u. s. f.

Man erkennt auch aus der Figur, daß den zwei Endpunkten N_1 und N_2 des horizontalen Durchmessers bezw. die größte und kleinste horizontale Ordinate ON_1 und ON_2 zugehören, woraus man schließt, daß der Richtung der Fläche $C_1 N_1$ das Maximum der normalen Spannung $s_{max} = ON_1$ und der Fläche $C_1 N_2$ das Minimum $s_{min} = ON_2$ zukommt. Ebenso gehören den Flächen $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ die absolut größten Schubspannungen $\sigma_{max} = \sigma_{min} = MS_1 = MS_2$ an. In Fig. 191 sind diese vier dem betrachteten Punkte im Balken zugehörigen charakteristischen

Flächen $C_1 N_1$, $C_1 N_2$, $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ besonders dargestellt. Man ersieht hieraus zunächst, da der Radius des Kreises durch

$$MN_1 = MC = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

ausgedrückt ist, daß der Fläche $C_1 N_1$ eine Normalspannung (negative)

$$-s_{max} = ON_1 = -N_1 O = -\frac{s}{2} - \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad \ldots \ldots (1)$$

und der Fläche $C_1 N_2$ eine solche von

$$+s_{max} = ON_2 = MN_2 - MO = -\frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot (2)$$

zukommt, während **für beide Flächen** die Schubspannung **gleich Null** ist. Da die beiden Geraden $C_1 N_1$ und $C_1 N_2$ auf einander senkrecht stehen, so giebt jede derselben die Richtung der gesammten Druckkraft für die der anderen entsprechende Schnittfläche an.

Ebenso hat man die absolut größten den Flächen $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ entsprechenden Schubkräfte durch die Längen MS_1 und MS_2 dargestellt, so daß man allgemein schreiben kann:

$$\sigma_{max} = \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Die Richtungen dieser Schubkräfte ergeben sich nach dem Obigen mit Rücksicht darauf, daß die gesammte Spannung für die Schnittfläche $C_1 S_1$ durch die Richtung von D nach E und für die Schnittfläche CS_2 durch die Richtung von D nach F dargestellt ist, woraus die in der Figur bei e und f durch Pfeile angedeuteten Spannungsrichtungen unzweifelhaft sich ergeben. Die Figur zeigt übrigens, daß die **Flächen für die größten Schubspannungen $C_1 S_1$ und $C_2 S_2$ ebenfalls auf einander senkrecht stehen, und die rechten Winkel halbiren, welche von den Flächen $C_1 N_1$ und $C_1 N_2$ der größten positiven und negativen Normalspannungen gebildet werden.**

Setzt man für die Fläche ac eine verticale Lage voraus, so erhält man selbstredend in CD die Spannung s und in CB die Schubkraft σ, während für eine horizontale Schnittfläche die Spannungen durch die Ordinaten des Punktes C_2, also $s = 0$ und $\sigma = OC_2$ gefunden werden. Diese letztere Spannung ist in der Figur durch einen Doppelpfeil $\longleftarrow \sigma \longrightarrow$ bezeichnet, um anzudeuten, daß die Spannungen in den beiden Balkentheilen, welche sich in dieser horizontalen Fläche berühren, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, wie dies auch die Figur ergiebt, denn bei der geringsten Rei-

gung der Horizontalen $C_1 C_2$ in dem einen oder anderen Sinne rückt der Durchschnitt dieser Geraden mit der Axe $N_1 N_2$ auf der linken oder rechten Seite aus der Unendlichkeit in endliche Entfernung heran, dadurch andeutend, daß die resultirende Wirkung auf diese Schnittfläche von D aus nach links oder nach rechts hin gerichtet ist.

Eine zweite Schnittfläche, für welche ebenfalls die Normalspannung s zu Null wird, erhält man in der Richtung des Durchmessers $C_1 D$, und es bilden daher, wie schon bemerkt, die Flächen $C_1 D$ und $C_1 C_2$ die Grenzen für die positiven und negativen Werthe von s, indem für jede in den Winkel $DC_1 C_2$ fallende Richtung s eine Zugspannung, für jede in den Nebenwinkel $DC_1 F$ fallende s eine Druckspannung bedeutet.

Wenn man für irgend eine Fläche, z. B. $C_1 G$, deren normale Spannung $s = G G_1$ mit ihrer Schubspannung $\sigma = G G_2$ zu einer Mittelkraft zusammensetzt, so erhält man in dem von O aus nach dem Schnittpunkte G gezogenen Radiusvector $O G$ die totale Anstrengung t der Fläche pro Flächeneinheit. Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß dieser Radius seinen größten Werth in ON_1 übereinstimmend mit s_{max} erreicht, man wird daher bei der Bestimmung der Querschnittsdimensionen diese größte Normalspannung zu Grunde zu legen haben, welche nach (1) und (2) für jeden Punkt allgemein durch

$$s_{max} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ausgedrückt werden kann. Hierin bedeutet s die Zug- oder Druckspannung und σ die Schubspannung des betreffenden Punktes, welche beide jederzeit leicht aus M und V ermittelt werden können. Von den beiden durch (4) gelieferten Werthen hat man den absolut größeren der Querschnittsbestimmung zu Grunde zu legen, indem man diesen Werth gleich dem für das Material höchstens zulässigen Spannungscoefficienten setzt.

Es kann bemerkt werden, daß dieser größte Werth der Spannung normal zu der Fläche gerichtet ist, da die Schubspannungen für die Richtungen CN_1 und CN_2 gleich Null sind.

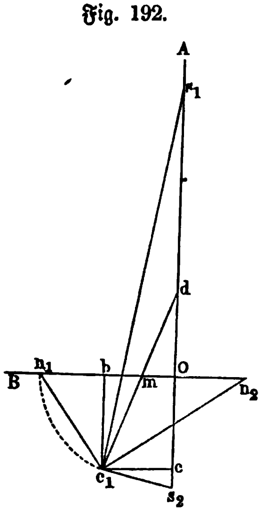
Man erhält von der Art, wie die Spannungen im Innern eines Balkens wirken, eine anschauliche Darstellung durch die Verzeichnung der sogenannten Spannungstrajectorien, das sind Linien, welche die Richtungen derjenigen Flächen in jedem Punkte angeben, die den größten Werthen der Spannungen ausgesetzt sind. Denkt man sich, um eine solche durch irgend einen Punkt a in dem Querschnitte f eines Balkens gehende Linie zu zeichnen, für diesen Punkt die Richtung der Fläche, in welcher s ein Maximum wird, nach Anweisung der Fig. 191 gefunden, und bestimmt man in derselben Art für denjenigen Punkt a_1, in welchem die gefundene Richtung

einen benachbarten Querschnitt f_1 trifft, wiederum die Richtung der Fläche für s_{max}, und fährt so fort, so erhält man ein Polygon $a\,a_1 \ldots$, welches bei sehr geringen Abständen der Querschnittsflächen $f f_1$ in eine Curve, die gesuchte Spannungstrajectorie für s_{max} übergeht. In den zur Richtung der Fläche für s_{max} Senkrechten ist auch nach dem Vorigen die Richtung der Flächen für s_{min} gefunden, während die Winkelhalbirenden zugleich die Richtungen der Schubkraftmaxima ergeben.

Zur Bestimmung dieser Richtungen für irgend einen Punkt ist es nach Fig. 191 erforderlich, die in diesem Punkte zur Wirkung kommende horizontale Zug- oder Druckspannung s und die Schubkraft σ zu kennen, in welchem Falle die folgende einfache Construction zum Ziele führt, deren Richtigkeit aus dem Vorhergehenden sich leicht ergiebt.

Man trägt auf einem rechtwinkeligen Axenkreuze $A\,O\,B$, Fig. 192, auf der verticalen Axe $O\,A$ nach beiden Seiten $O\,d = O\,c = \sigma$, und horizontal $O\,b = s$ an, und verbindet d mit dem durch die Ordinaten $O\,b$ und $O\,c$ gegebenen Punkte c_1, um im Durchschnittspunkte m den Mittelpunkt des in Betracht kommenden Kreises vom Halbmesser $m\,c_1$ zu finden. Es ist nicht nöthig, diesen Kreis selbst zu zeichnen, sondern es genügt, $m\,n_1 = m\,c_1$ zu machen, um in $c_1\,n_1$ die Flächenneigung für $-\,s_{max}$, und in der dazu Senkrechten $c_1 n_2$ diejenige für $+\,s_{max}$ sowie in den Winkelhalbirenden $c_1\,s_1$ und $c_1\,s_2$ die Richtungen der größten Schubspannungen σ_{max} zu erhalten. Hierbei ist es nicht nöthig, die Spannungen s und σ für jeden Punkt immer von Neuem zu berechnen, vielmehr genügt es, diese Größen nur für einen Punkt zu bestimmen, indem man sich dann mit Vortheil für die übrigen Punkte des Diagramms für die Momente M und die verticalen Scheerkräfte V bedienen kann, wie an einem Beispiele hier gezeigt werden mag.

Fig. 192.



Es sei $A\,B$, Fig. 193 (a. f. S.), ein bei A und B frei aufruhender, gleichmäßig über seine Länge l mit dem Gewichte $q\,l$ belasteter Balken von rechteckigem Querschnitte mit der Höhe h und Breite b, so findet man die größte Zug- oder Druckspannung in der Mitte $C\,C_1$ zu

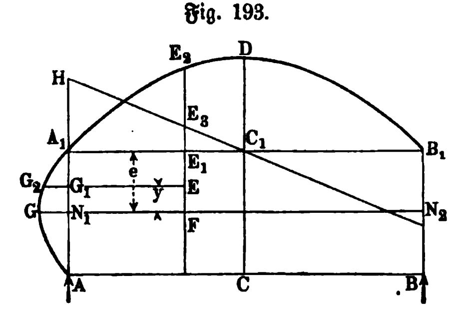
$$s = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{8}\,q\,l^2}{\frac{1}{6}\,b\,h^2} = \frac{3}{4}\,\frac{q\,l^2}{b\,h^2},$$

und die Schubspannung an den Enden bei N_1 oder N_2 nach §. 48 (7) zu

$$\sigma = \frac{f}{bW} V = \frac{1/_4\, b\, h}{b\, 1/_6\, b\, h^2} q \frac{l}{2} = {}^3/_4 \frac{q\, l}{b\, h}.$$

Denkt man sich nun nach einem beliebigen Kräftemaßstabe diese Größen $s = C_1 D$ und $\sigma = N_1 G$ aufgetragen, und construirt durch A, G und A_1 einen Parabelbogen mit dem Scheitel in G, so ist nach dem vorigen Paragraphen die Schubspannung in irgend einem Punkte G_1 des Endquerschnittes durch $G_1 G_2$ gegeben. Will man daher für irgend einen Punkt wie E in demselben Abstande von der neutralen Axe $N_1 N_2$ wie G_1 die Schubkraft finden, so hat man nur $G_1 G_2$ in dem Verhältnisse zu reduciren, in welchem die Verticalkraft im Querschnitte durch E kleiner ist, als diejenige in A, d. h. also im Verhältnisse von $E_1 E_3 : A_1 H$ oder von $C_1 E_1 : C_1 A_1$, welche Reduction durch eine sehr einfache Hülfsconstruction jederzeit leicht ausführbar ist.

Fig. 193.

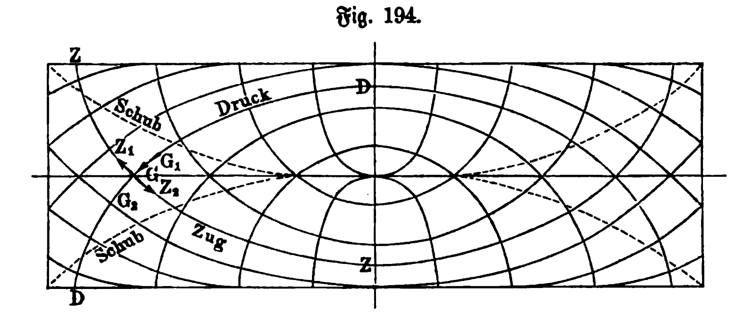


Denkt man ferner durch A_1, D und B_1 ebenfalls eine Parabel mit dem Scheitel in D gezeichnet, so sind deren Ordinaten nach dem früher über die Momentendiagramme Angeführten den Biegungsmomenten M der zugehörigen Querschnitte, folglich auch den Normalspannungen s in den äußersten Fasern daselbst proportional. Da nun $C_1 D$ dieser äußersten Faserspannung in der Mitte gleich gemacht wurde, so erhält man in $E_1 E_2$ die Spannung der äußersten Faser in dem Querschnitte durch E, und in E selbst daher eine in dem Verhältnisse $\frac{FE}{FE_1} = \frac{y}{e}$ verringerte Zugspannung. In dieser Weise sind in Fig. 194 die Trajectorien*) für einen auf zwei Stützen ruhenden, gleichmäßig belasteten Balken von rechteckigem Querschnitte gezeichnet worden. Die beiden Curvensysteme für $\pm s_{max}$ schneiden sich nach dem Vorstehenden überall unter rechten Winkeln. Da nun in den Flächen für s_{max} nach dem Obigen die Schubkraft gleich Null ist, so folgt,

*) Unter den Spannungstrajectorien werden, wie bereits bemerkt, die Linien verstanden, welche für jeden ihrer Punkte die Richtung der größten Druck-, Zug- oder Schubspannung durch ihre Tangente daselbst angeben.

daß in jeder Curve des einen Systems, wie z. B. derjenigen DGD, in irgend einem Elemente G_1G_2 nur eine normal zu diesem Elemente wirkende Spannung thätig sein kann, d. h. eine Spannung, welche nach der Tangente Z_1Z_2 der durch diesen Punkt G hindurchgehenden Curve ZGZ des anderen

Fig. 194.



Systems gerichtet ist. Man hat sich daher diese beiden Curvensysteme als solche zu denken, in welchen lediglich Spannungen nach der Richtung dieser Curven auftreten, etwa wie bei Seilcurven, wenn, wie in Z diese Spannungen Zugspannungen sind, oder wie bei Gewölben, wenn, wie in der Curve D Druckspannungen auftreten. Beispielsweise mag man sich vorstellen, daß in dem Punkte G drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, von denen die eine, in der Richtung von G_1 nach G_2 wirkende, in den beiden von G ausgehenden Seilstücken GZ_1 und GZ_2 Zugspannungen hervorruft, deren Resultante zusammen mit der in der Richtung G_1G_2 wirkenden Kraft das Element GG_1 comprimirt.

Verzahnte Balken. Bei den gewöhnlichen hölzernen und eisernen Trägern, welche aus einem einzigen Stücke bestehen, ist der Einfluß der Schubspannungen σ im Vergleiche mit den Biegungsspannungen in der Regel so gering, daß man die ersteren unbeachtet lassen darf. Dies ist nicht mehr zulässig, sobald die Träger aus mehreren mit einander verbundenen Theilen zusammengesetzt sind, wie dies bei manchen Holzconstructionen, z. B. den verzahnten Trägern, und bei den aus Blechplatten und Winkeleisen bestehenden Blechträgern der Fall ist. Bei den letzteren erfordert auch die Feststellung der immer nur geringen Dicke der Mittelwand eine Untersuchung, um die Schubspannung in dieser Mittelwand nicht übermäßig groß werden zu lassen. §. 50.

Hölzerne Balken, welche für eine gegebene Tragweite und Belastung nicht in genügender Stärke aus einem Stamme geschnitten werden können, stellt man zuweilen wohl aus mehreren übereinander gelegten Balken von recht-

eckigem Querschnitte her, welche mit einander so zu vereinigen sind, daß **die ganze Verbindung gegen die biegenden Momente wie ein einziger aus einem Stücke bestehender Träger sich verhält.**

Wenn man zwei Balken A und B, Fig. 195, von rechteckigem Querschnitte einfach über einander legt und durch eine Kraft K belastet, so nimmt jeder Balken eine Biegung unabhängig von derjenigen des anderen an, und indem man sich vorzustellen hat, daß jeder Balken das halbe Biegungs-

Fig. 195. Fig. 196.

moment aufnimmt, d. h. die Hälfte der Last K trägt, bestimmen sich die Breite b und Höhe h für den Querschnitt jedes der beiden Balken durch

$$\frac{1}{2} M = \frac{1}{2} \frac{K l}{4} = s \frac{b h^2}{6},$$

oder

$$K = \frac{4}{3} s b h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denkt man sich jedoch die beiden Balken so mit einander vereinigt, daß eine Verschiebung des einen gegen den anderen ebensowohl wie eine Trennung der Balken von einander ausgeschlossen ist, so tritt die Biegung nach Fig. 196 wie diejenige eines einfachen Balkens von der Breite b und Höhe $2h$ des Querschnittes ein, so daß jetzt die Bedingung

$$M = \frac{K l}{4} = s \frac{b (2h)^2}{6},$$

oder

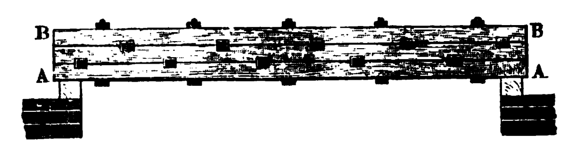
$$K = \frac{8}{3} s b h^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gilt. Der Balken in Fig. 196 hat daher bei gleichen Dimensionen die doppelte Tragfähigkeit von derjenigen der einfach über einander gelegten Balken in Fig. 195. Ebenso findet sich, daß ein aus drei, vier oder allgemein n Einzelbalken vereinigter Träger, Fig. 197, die drei, vier oder allgemein n fache Tragfähigkeit der einfach über einander liegenden Balken von gleichen Dimensionen besitzt.

Um dieses Resultat zu erzielen, muß die Art der Vereinigung zunächst eine Verschiebung der einzelnen Balken auf einander verhindern, was man

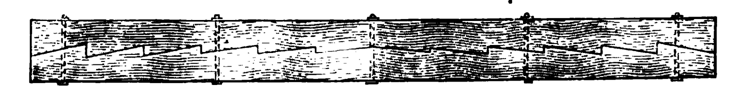
entweder durch zwischen die Balken eingeschobene Keile oder Dübel (Fig. 196 und 197) erreicht, verdübelte Träger, oder dadurch, daß man die

Fig. 197.



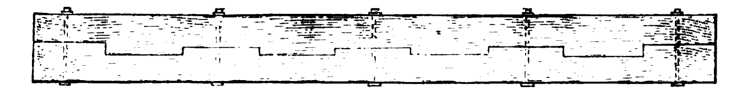
Balken nach den Figuren 198 und 199 mit schrägen oder geraden gegen einander passenden Zähnen versieht, welche sich einer Verschiebung entgegensetzen. Außerdem pflegt man durch übergeschobene Bänder, Fig. 196, oder durchgezogene Schraubenbolzen, Fig. 197, eine Trennung der Balken

Fig. 198.



zu verhindern, welche sich deshalb einstellen würde, weil bei gleicher Gestalt der elastischen Linien in den Mittellinien beider Balken die unterste Faserschicht des oberen Balkens größere Krümmungshalbmesser annimmt, als die oberste Faserschicht des unteren Balkens. Durch die Einschnitte für die Dübel

Fig. 199.



und Zähne sowie durch die Bolzenlöcher werden natürlich die Balken entsprechend geschwächt, wodurch der Gewinn an Tragfähigkeit wieder herabgezogen wird und worauf bei der Berechnung gerücksichtigt werden muß. Auch wirft man diesen Balken vor, daß das Holz in den Einschnitten in Folge von Feuchtigkeit einer schnellen Fäulniß ausgesetzt ist, wodurch die Widerstandsfähigkeit der Zähne gegen Verschiebung bedenklich beeinträchtigt wird. Aus diesem Grunde und wegen der heutzutage wohlfeilen Herstellung eiserner Bauconstructionen wendet man verzahnte und verdübelte Träger nur noch selten und nur etwa da an, wo durch die besonderen Verhältnisse die Verwendung von Holz bedingt ist. Bei eisernen Trägern verwendet man Verzahnungen niemals und Dübel oder Keile nur selten, indem man sich zur Verbindung bei Schmiedeeisen fast ausschließlich der Nieten, bei Gußeisen der Schraubenbolzen bedient.

Die zwischen zwei auf einander liegenden Balken angebrachten Zähne müssen der an der Vereinigungsstelle auftretenden horizontalen Schubkraft widerstehen, welche letztere nach §. 48, Gleichung (7) durch

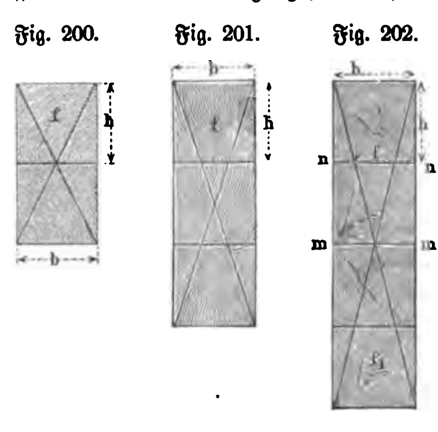


Fig. 200. Fig. 201. Fig. 202.

$$\sigma = \frac{1}{b}\,\frac{f}{W}\,V$$

zu bestimmen ist. Hierin bedeutet f den einerseits der Berührungsfläche gelegenen Theil der reducirten Querschnittsfläche, deren Widerstandsmoment mit W bezeichnet ist. Demgemäß hat man, unter b die Breite und h die Höhe des Querschnittes von jedem einzelnen Balken verstanden, den Werth von $\frac{f}{W}$ bei einem:

a) zweifachen Balken, Fig. 200,

$$\frac{f}{W} = \frac{\frac{1}{2}\,b\,h}{\frac{1}{6}\,b\,(2\,h)^2} = \frac{3}{4\,h} = \frac{3}{2\,H};$$

b) dreifachen Balken, Fig. 201,

$$\frac{f}{W} = \frac{(1 - \frac{1}{9})\,\frac{1}{2}\,b\,.\,\frac{3}{2}\,h}{\frac{1}{6}\,b\,(3\,h)^2} = \frac{4}{9\,h} = \frac{4}{3\,H};$$

c) vierfachen Balken, Fig. 202, in der Fuge $m\,m$:

$$\frac{f}{W} = \frac{b\,h}{\frac{16}{6}\,b\,h^2} = \frac{3}{8\,h} = \frac{3}{2\,H},$$

und in der Fuge $n\,n$:

$$\frac{f}{W} = \frac{\frac{3}{4}\,b\,h}{\frac{16}{6}\,b\,h^2} = \frac{9}{32\,h} = \frac{9}{8\,H}.$$

Der durch obige Formel $\sigma = \frac{1}{b}\,\frac{f}{W}\,V$ bestimmten Schubspannung muß das Holz durch seine Scheerfestigkeit in allen Punkten widerstehen können, und man hat selbstredend bei dieser Untersuchung diejenigen Stellen ins Auge zu fassen, für welche V ein Maximum ist, also die Endpunkte des auf zwei Stützen aufliegenden Balkens. Dieser Schubkraft wird das Holz bei den gewöhnlichen Ausführungen meistens widerstehen können. Es mag hierbei bemerkt werden, daß die Schubspannungen um so größer ausfallen

müssen, je größer die Verticalkraft V, d. h. je größer die Belastung K und je kleiner die Länge l des Balkens ist, über welche sich doch die Schubkraft vertheilt. Die Zähne müssen aber auch eine bestimmte Tiefe $cd = \delta$, Fig. 203, erhalten, so daß der specifische Druck auf die verticale Stoßfläche cd das für die Druckfestigkeit zulässige Maß s_d nicht übersteigt. Bezeichnet $\lambda = ac$ die Länge eines Zahnes, so ist die von dem letzteren aufzunehmende Schubkraft durch $\lambda b \sigma$ ausgedrückt, und da die diesen Druck aufnehmende Fläche cd die Größe δb hat, so erhält man die auf die letztere entfallende Druckkraft pro Flächeneinheit durch

Fig. 203.

$$\lambda b \sigma = \delta b s \text{ zu } s = \frac{\lambda}{\delta} \sigma = n \sigma,$$

wenn das Verhältniß $\frac{\lambda}{\delta}$ der Länge zur Höhe eines Zahns durch n ausgedrückt wird. In der Regel wird dieses Verhältniß zwischen 5 und 10 angenommen.

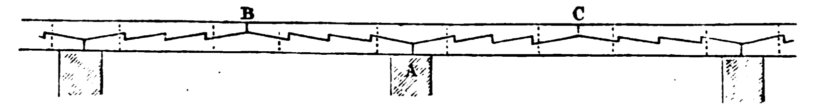
Da die Hölzer durch die Zähne um so mehr geschwächt werden, je größer deren Tiefe δ ist, so erscheint es zweckmäßig, den Zähnen nur die durch die Größe des Schubes bedingte, also an verschiedenen Stellen wegen der Veränderlichkeit der Schubkraft eine verschieden große Höhe zu geben. Insbesondere wird es sich empfehlen, in der Mitte zwischen den Stützen, wo das Moment M ein Maximum und die Verticalkraft $V = 0$ ist, den Zähnen nur eine geringe Höhe δ zu geben, und diese Höhe nach den Enden hin dem Wachsthum von V entsprechend zu vergrößern. Liegt der Balken an diesen Enden frei auf Stützen, so ist die Verschwächung durch hohe Zähne an diesen Stellen nicht bedenklich, da das Biegungsmoment daselbst bis zu Null abnimmt. Wenn jedoch der Träger an den Enden eingemauert ist, oder wenn er als continuirlicher Balken über die Stützen hinwegreicht, so hat man an diesen Stellen mit Rücksicht auf die daselbst auftretenden Biegungsmomente eine beträchtliche Verschwächung durch tiefe Zähne möglichst zu vermeiden.

Bei schrägen Zähnen ist natürlich deren Richtung derjenigen der wirkenden Schubkraft entsprechend anzuordnen, also sind von dem Querschnitte des Maximalmomentes aus, wo die Schubkraft Null ist, nach beiden Seiten entgegengesetzte Richtungen anzunehmen, wie in Fig. 198. Wenn diese Stelle des Maximalmomentes ihren Platz ändert, wie dies in §. 36 für mobile Belastungen gezeigt worden ist, so werden gerade Zähne nach Fig. 199 den schrägen vorzuziehen sein, da die ersteren nach beiden Seiten wirksam sind.

Bei langen verzahnten Trägern, besonders bei continuirlichen über mehrere Stützen wegreichenden, wird man oft genöthigt sein, jeden der einzelnen Balken

aus mehreren Hölzern darzustellen; dabei wird man die Stoßfugen möglichst an solchen Stellen anzuordnen haben, wo das zu stoßende Stück einer Pressung ausgesetzt ist, also z. B. in Fig. 204 das untere Holz über der Zwischenstütze A, das obere in den Mitten B und C der Oeffnungen.

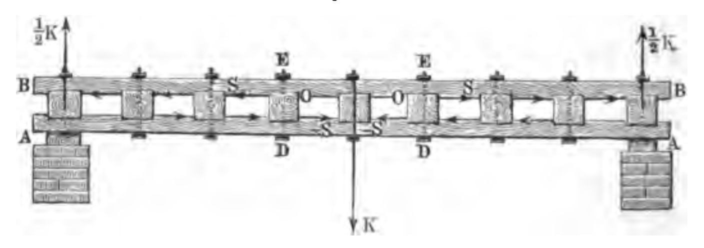
Fig. 204.



Jedenfalls wird man bei einer größeren Anzahl von mit einander zu verbindenden Hölzern niemals zwei derselben in demselben Querschnitte, sondern immer in gehöriger Abwechselung zusammenstoßen und für die Tragfähigkeit des aus n einfachen Balken bestehenden Trägers nur $n - 1$ Balken in Rechnung bringen.

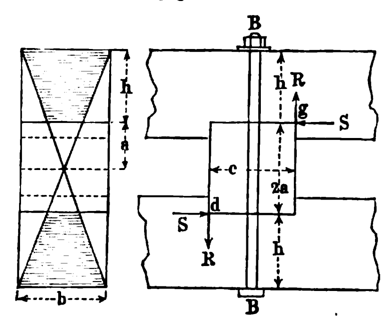
In ähnlicher Art, wie die verzahnten und verdübelten Balken sind auch die nach Fig. 205 aus zwei Längshölzern und zwischengelegten Holzklötzen O

Fig. 205.



durch Schrauben ED zusammengebolzten Träger zu beurtheilen, wobei die Holzklötze O die Schubkraft aufzunehmen haben und gewissermaßen als Dübel anzusehen sind. Bezeichnet hier wieder, Fig. 206, b die Breite und h die Höhe eines der Längshölzer an der durch einen Klotz verschwächten Stelle und $2a$ die Höhe dieses Klotzes, so hat man hier die halbe reducirte Querschnittsfläche nach der Figur zu

Fig. 206.



$$f = \frac{b}{2}(a + h) - \frac{b}{2}\frac{a}{a + h}a = \frac{bh}{2}\frac{2a + h}{a + h},$$

und das Widerstandsmoment

$$W = {}^1/_{12}\, b\, \frac{8(a+h)^3 - 8a^3}{a+h} = {}^2/_3\, b\, \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{a+h},$$

woraus die Schubspannung pro Längeneinheit

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3h}{4} \frac{2a+h}{3a^2h + 3ah^2 + h^3} V$$

folgt. Ist λ die Entfernung zweier Klötze und σ die in der Mitte eines Klotzes wirkende specifische Schubkraft, so ist der Klotz einem Schube jedes der Längshölzer von der Größe

$$S = \lambda b \sigma$$

ausgesetzt. Diese beiden nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte S erzeugen in den Ecken d und g zwei verticale Reactionen R von solcher Größe, daß, unter c die Länge eines Klotzes verstanden,

$$Rc = Sa$$

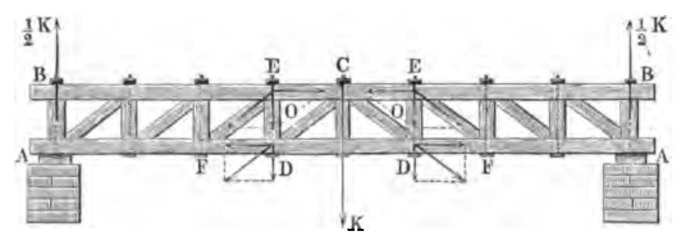
ist, und daher müssen die Schraubenbolzen dem Zuge

$$R = S\frac{a}{c}$$

durch ihre absolute Festigkeit widerstehen.

Um diesem Bestreben zum Drehen der Klötze oder Bolzen kräftig entgegen zu wirken, ordnet man wohl nach Fig. 207 zwischen den Längsbalken

Fig. 207.



noch Streben CD und EF an, und setzt auch wohl Kreuz- oder Gegenstreben ein, so daß der Zwischenraum zwischen je zwei Bolzen durch ein sogenanntes Andreaskreuz ausgefüllt ist. Derartige Constructionen sind wie die Fachwerke zu beurtheilen, über welche weiter unten das Nähere angegeben ist.

Beispiel. Ein verzahnter Balken von 6 m freier Länge dient als Unterzug unter den Balken einer Etage, durch welche eine gleichmäßig vertheilte Last von 1200 kg auf jeden laufenden Meter der Trägerlänge übertragen wird. Wie stark müssen die beiden, den Träger bildenden Hölzer werden, wenn denselben eine Breite von 0,20 m gegeben wird?

Das größte Biegungsmoment stellt sich hier in der Mitte zu

$$M = q \frac{l^2}{8} = 1200 \frac{36}{8} = 5400 \text{ mkg}.$$

Nimmt man an, daß die Bolzen 20 mm stark sind, also nur eine wirksame Breite von 200 — 20 = 180 mm verbleibt, und setzt man voraus, daß in der Mitte des Balkens eine Verschwächung durch Zähne nicht stattfindet, so erhält man die Höhe $2h$ des verzahnten Trägers durch

$$M = sW = s \frac{1}{6} 0{,}180 \, (2h)^2,$$

woraus mit $s = 1$ kg pro Qradratmeter

$$2h = \sqrt{\frac{M}{s \,.\, 0{,}03}} = \sqrt{\frac{5400}{1 \,.\, 1000\,000 \,.\, 0{,}03}} = 0{,}424 \text{ m}$$

folgt. Giebt man daher jedem der beiden Balken eine Höhe von 0,212 m und den Zähnen eine Tiefe $\delta = 0{,}024$ m, so hat man für die Träger an den Enden das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{12} 0{,}180 \frac{0{,}424^3 - 0{,}024^3}{0{,}212} = 0{,}005391$$

und die reducirte Querschnittsfläche jeder Querschnittshälfte

$$f = \frac{1}{2} \cdot 0{,}180 \left(0{,}212 - \frac{0{,}012}{0{,}212} 0{,}012\right) = 0{,}09 \,.\, 0{,}211 = 0{,}019.$$

Da ferner für die Enden des Trägers

$$V = q \frac{l}{2} = 1200 \,.\, 3 = 3600 \text{ kg}$$

ist, so erhält man die Schubspannung daselbst pro Quadratmeter zu

$$\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} Q = \frac{1}{0{,}180} \frac{0{,}019}{0{,}005391} 3600 = \frac{68\,400}{0{,}970} = 70516 \text{ kg}$$

oder pro 1 qmm $\sigma = 0{,}07$ kg, eine Beanspruchung, welche das Holz noch mit Sicherheit verträgt. Giebt man den Zähnen eine Länge $\lambda = 0{,}200$ m, macht man also

$$n = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{0{,}200}{0{,}024} = 8{,}33,$$

so werden die Hirnenden der Zähne mit

$$s = n\sigma = 8{,}33 \,.\, 0{,}07 = 0{,}56 \text{ kg}$$

gedrückt.

§. 51. **Blechbalken.** Da bei allen der Biegung unterworfenen Balken das Material um so vortheilhafter ausgenutzt wird, in je größerer Entfernung von der neutralen Axe dasselbe angebracht ist, so ist man bei allen größeren Trägern, wie sie für Brücken und Ueberdachungen ausgeführt werden, dazu übergegangen, das den Zug bezw. Druck vornehmlich aufnehmende Material in zwei zu beiden Seiten der neutralen Axe angeordneten Längsbändern oder sogenannten Gurtungen (Streckbäumen) unterzubringen. Diese Gurtungen, welche gewissermaßen den Flanschen der I förmigen Träger entsprechen, sind durch zwischen denselben anzubringende Füllungsglieder

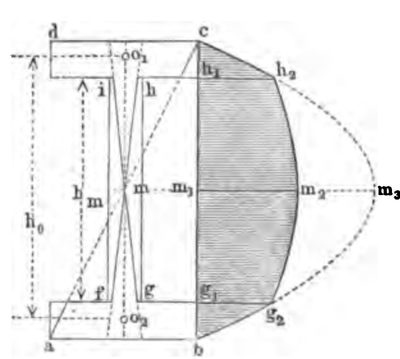
derart mit einander in Verbindung zu bringen, daß das ganze System sich wie ein einziger Balken gegen die Biegung verhält, und jede Gurtung dadurch verhindert ist, sich selbständig wie ein einfacher Balken durchzubiegen.

Das einfachste und zuerst hierzu angewandte Füllungs- oder Zwischenglied besteht in einer verticalen Blechwand AB, Fig. 208, welche aus Eisenblechtafeln von 6 bis 25 mm Stärke zusammengesetzt und oben und unten mittelst Winkeleisen mit den aus gewalzten Eisenplatten bestehenden

Fig. 208.



Fig. 209.



Gurtungen C und D vernietet ist. Bezeichnet man mit h_m die Höhe und d die Dicke dieser mittleren Blechwand, und mit b die Breite und d_g die Dicke des als Rechteck zu denkenden Querschnittes einer jeden Gurtung, so ist der ganze Trägerquerschnitt durch

$$F = h_m d + 2 b d_g = F_m + 2 F_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben, wenn man mit F_m den Querschnitt der Mittelwand und mit F_g den einer jeden Gurtung bezeichnet.

Nach dem in §. 47 Gesagten ist die halbe reducirte Querschnittsfläche $f_m = mhi$ der Mittelwand eines I förmigen Querschnittes, Fig. 209, bei geringer Dicke der Mittelwand gegen diejenige $f_g = dchi$ einer Gurtung nur gering, so daß in allen Fällen der Praxis f_m gegen f_g vernachlässigt und

$$f = f_g = F_g = b d_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gesetzt werden kann.

Nimmt man demgemäß an, daß eine Gurtung in allen Punkten ihres Querschnittes einer und derselben Spannung ausgesetzt ist, so hat man den Schwerpunkt aller dieser Spannungen in demjenigen o des Gurtungsquerschnittes anzunehmen und erhält daher das Widerstandsmoment des Querschnittes zu

$$W = F_g \,.\, o_1 o_2 = b\, d_g\, (h_m + d_g) = b\, d_g\, h_0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn man die Entfernung $o_1 o_2 = h_m + d_g$ zwischen den Mitten der Gurtungsquerschnitte mit h_0 bezeichnet.

Mit Hülfe dieser Formeln bestimmt sich nun für irgend welchen Querschnitt des Blechbalkens, welcher dem Biegungsmomente M und der Verticalkraft V ausgesetzt ist, die größte Biegungsspannung in den Gurtungen zu

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M}{b\, d_g\, h_0} = \frac{M}{F_g\, h_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und die Schubspannung in der neutralen Axe pro Flächeneinheit, wenn man in (7) des §. 48 für b die Dicke d der Mittelwand setzt:

$$\sigma = \frac{1}{d}\, \frac{f}{W}\, V = \frac{1}{d}\, \frac{b\, d_g}{b\, d_g\, h_0}\, V = \frac{V}{d\, h_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Gleichung gemäß hat man die Dicke d der Blechwand zu bestimmen, indem man für σ die höchstens zulässige Schubspannung des Eisens und für V die größte Verticalkraft einsetzt.

Die Schubspannung nimmt zwar von der neutralen Axe nach den äußersten Fasern hin bis auf Null ab, doch lehrt die Figur, daß diese Abnahme von der Mitte m bis an die Stelle $h\, i$ hin, wo die Gurtung sich an die Mittelwand anschließt, nur sehr gering ist, da der die Schubspannungen der Mittelwand darstellende Parabelbogen $h_2\, m_2\, g_2$ sehr flach ist. Man kann daher mit genügender Genauigkeit die Schubspannung in $h\, i$ gleich derjenigen nach (5) bestimmten in der neutralen Axe voraussetzen.

Um nun auch den Gurtungsquerschnitt F_g zu bestimmen, hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der größte Werth des Biegungsmomentes M mit dem größten Werthe der Verticalkraft V in demselben Querschnitte zusammentrifft oder nicht.

Der letztere Fall stellt sich ein bei einem auf zwei Stützen frei aufruhenden, dazwischen belasteten Träger, der erste Fall bei einem an den Enden eingeklemmten Balken, sowie bei einem an dem einen Ende eingemauerten Consolträger. Es mögen diese beiden Fälle hier gesondert betrachtet werden.

Liegt ein Blechbalken von der Länge l frei auf zwei Stützen auf, und ist derselbe etwa durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung $q\, l$ angegriffen, so tritt das größte Biegungsmoment $M = \frac{q\, l^2}{8}$ in der Mitte auf, während die größte Verticalkraft in den Querschnitten durch die Stützen wirkt, wo sie durch $V = q\, \frac{l}{2}$ dargestellt ist. In Folge des Momentes tritt in den Gurtungen des mittleren Querschnittes eine Biegungsspannung nach (4) von

$$s = \frac{M}{W} = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{F_g h_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

auf, während in diesem Querschnitte die Schubspannung in allen Punkten gleich Null ist. Die Schubspannung erreicht dagegen ihr Maximum in den Querschnitten durch die Stützen nach (5) im Betrage

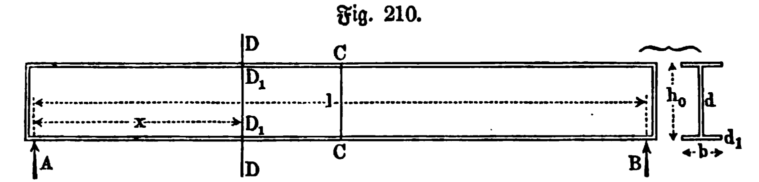
$$\sigma = \frac{V}{d h_0} = \frac{1}{2} \frac{q l}{d h_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

während in diesen Querschnitten die Biegungsspannung gleich Null ist. Man kann daher bei einer angenommenen oder vorgeschriebenen Höhe h_0 des Trägers aus (5) die Dicke d der Mittelwand und aus (4) die Größe F_g des Gurtungsquerschnittes in der Mitte berechnen, indem man in beiden Formeln für σ bezw. s die für das Material höchstens zulässigen Werthe einsetzt.

Nach der Gleichung (4) würde der mit M proportionale Querschnitt F_g der Gurtung von dem für die Balkenmitte berechneten Werthe nach den Enden hin bis auf Null abnehmen dürfen, vorausgesetzt, daß in dem Balken überhaupt nur Biegungsspannungen vorkämen. Wegen der Schubspannungen ist eine derartige Verminderung des Gurtungsquerschnittes aber nicht angängig, ohne die Materialbeanspruchung übermäßig zu steigern, wie die folgende Untersuchung zeigt, für welche zunächst ein überall gleicher Querschnitt F_g der Gurtung vorausgesetzt sein mag.

Gesetzt, der auf zwei Stützen A und B ruhende gleichmäßig belastete Balken, Fig. 210, sei so angeordnet, daß den vorstehenden Formeln (6) und (7) gemäß sowohl die äußerste Biegungsspannung in der Mitte CC, als

Fig. 210.



auch die Schubspannung in der Mittelwand bei A und B gerade den noch zulässigen Werth s_1 für das Material erreicht, so daß man also hat

$$s_1 = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{F_g h_0} = \frac{1}{2} \frac{q l}{d h_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

In irgend welchem anderen Querschnitte DD im Abstande x von A wird offenbar die größte Spannung an denjenigen Stellen D_1 eintreten, in welchen die Mittelwand sich an die Gurtung anschließt, denn eine in dieser Anschlußfläche liegende Faser wird als zur Gurtung und zur Mittelwand gehörig, sowohl der Biegungsspannung s der ersteren wie auch der Schub-

spannung σ der letzteren unterworfen sein. Die maximale Anstrengung dieser Faser bestimmt sich daher nach (4) in §. 49 dem absoluten Werthe nach zu

$$s_{max} = \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Hierin bedeuten s und σ die gedachten, in dem Querschnitte x bei D_1 und D_1 auftretenden Biegungs- und Schubspannungen. Man findet dieselben durch

$$s = \frac{M_x}{W} = \frac{q\,\frac{l}{2}\,x - q\,\frac{x^2}{2}}{F_g\,h_0} = \frac{q}{2\,F_g\,h_0}\,(l - x)\,x$$

und

$$\sigma = \frac{V_x}{d h_0} = \frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{d\,h_0}.$$

Hieraus erhält man mit Rücksicht auf (8) auch

$$s = 4\,\frac{l\,x - x^2}{l^2}\,s_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

und

$$\sigma = \frac{l - 2\,x}{l}\,s_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

so daß man mit diesen Werthen aus (9) die gesuchte größte Anstrengung der Faser in dem Querschnitte x bei D_1 erhält:

$$s_{max} = s_1\left[2\,\frac{l\,x - x^2}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{l - 2\,x}{l}\right)^2 + \left(2\,\frac{l\,x - x^2}{l^2}\right)^2}\right].$$

Den Werth der Wurzel findet man durch Ausrechnung zu:

$$\sqrt{\left(1 - 2\,\frac{l\,x - x^2}{l^2}\right)^2} = 1 - 2\,\frac{l\,x - x^2}{l^2},$$

und daher erhält man

$$s_{max} = s_1\left(2\,\frac{l\,x - x^2}{l^2} + 1 - 2\,\frac{l\,x - x^2}{l^2}\right) = s_1.$$

Diese Rechnung besagt also, daß, wenn der Gurtungsquerschnitt der gemachten Voraussetzung gemäß überall dieselbe Größe hat, die absolut größte Spannung in allen Querschnitten ebenfalls denselben Werth s_1 annimmt, und zwar in denjenigen Fasern, in welchen die Mittelwand sich an die Gurtungen anschließt. Es geht hieraus hervor, daß es nicht gestattet ist, den Querschnitt der Gurtungen nach den Stützen hin zu verkleinern, weil sonst, wie man leicht erkennt, die vorstehende

Rechnung für jeden Querschnitt x in den Punkten D_1 eine Spannung $s_{max} > s_1$ liefern müßte, indem nunmehr bei der Zusammensetzung der Biegungsspannung s und der Schubspannung σ, wie sie durch (9) dargestellt ist, ein größerer Werth von s erscheint, als der unter der Annahme gleicher Gurtungsquerschnitte in (10) berechnete.

Wenn der Balken anderenfalls nicht frei aufliegt, sondern an den Enden eingespannt ist, so stellen sich die größte Biegungsspannung s und die größte Schubspannung σ in einem und demselben Querschnitte, nämlich an der Befestigungsstelle ein. Es genügt daher jetzt nicht mehr, wie im vorhergehenden Falle geschehen, den Gurtungsquerschnitt lediglich unter Berücksichtigung der Biegungsspannung s, und die Mittelwand mit Rücksicht auf die Schubspannung σ allein so festzustellen, daß jede dieser Spannungen höchstens den zulässigen Betrag s_1 annimmt. Man muß hier vielmehr die maximale Spannung in Betracht ziehen, welche sich in dem Querschnitte an der Befestigungsstelle und zwar wieder da einstellt, wo die Gurtung sich an die Mittelwand anschließt, indem an diesem Punkte die größte Biegungsspannung s mit der größten Schubspannung σ zusammentrifft. Diese größte resultirende Spannung s_{max} findet man wieder nach (9) zu

$$s_{max} = \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2},$$

in welchen Ausdruck man in jedem besonderen Falle

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M}{F_g h_0} \text{ und } \sigma = \frac{V}{d h_0}$$

einzuführen hat, so daß man erhält

$$s_{max} = \frac{M}{2 F_g h_0} + \sqrt{\left(\frac{V}{d h_0}\right)^2 + \left(\frac{M}{2 F_g h_0}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Aus der Belastungsart sind M und V für die Befestigungsstelle immer bekannt, und wenn noch die Trägerhöhe h_0 gegeben ist, so kann man aus der Gleichung (12), wenn $s_{max} = s_1$ gesetzt wird, von den beiden Größen F_g und d die eine bestimmen, wenn die andere beliebig angenommen wird. Da man hierbei hinsichtlich der Wahl der einen Größe noch vollkommen frei ist, so kann man noch eine andere Bedingung stellen, z. B. diejenige, die Verhältnisse so zu wählen, daß das Gewicht des Balkens, d. h. der Querschnitt $F = 2 F_g + h d$ ein Minimum wird. Um diese Aufgabe zu lösen, hätte man diesen Ausdruck für F nach d zu differentiiren, nachdem darin zunächst aus (12) der Gurtungsquerschnitt F_g als Function von d eingeführt worden ist, und in bekannter Weise zu verfahren.

In welchem Betrage die Anstrengung des Materials in dem vorliegenden Falle durch das Zusammentreffen der größten Schub- und der größten

Biegungsspannung vergrößert wird, ist aus der Gleichung (9) ersichtlich. Gesetzt, man hätte den Trägerquerschnitt so bestimmt, daß die größte Biegungsspannung s an der Befestigungsstelle ebensowohl wie die größte Schubspannung σ daselbst gleich dem zulässigen Werthe s_1 wäre, so fände man mit $s = \sigma = s_1$ aus (9):

$$s_{max} = s_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\right) = 1{,}618\, s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Das Material würde daher an der mehrfach gedachten gefährdeten Stelle, wo die Mittelwand sich an die Gurtung anschließt, eine im Verhältnisse 1,618 mal zu große Anstrengung zu erleiden haben, und man hätte deshalb, um die Anspannung an dieser Stelle jedenfalls nicht über s_1 wachsen zu lassen, bei der Berechnung des Gurtungsquerschnittes nach (4) und der Stärke d der Mittelwand nach (5) nicht den Werth s_1, sondern nur

$$\frac{1}{1{,}618}\, s_1 = 0{,}62\, s_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

als zulässig in Rechnung zu bringen.

Es ist klar, daß bei den Verbindungen der einzelnen Platten und Eckeisen mit einander durch Vernietung die an der betreffenden Stelle auftretenden Spannungen ebenfalls durch die Nietbolzen aufgenommen werden müssen. Danach ist auch ersichtlich, daß eine in horizontaler Richtung angeordnete Nietreihe, wie sie beispielsweise die Verbindung der Eckeisen mit der Mittelwand oder mit den Deckplatten der Gurtungen bewirkt, nur durch die horizontale Schubkraft beansprucht wird, welche nach §. 48 pro Längeneinheit durch

$$b\sigma = \frac{f}{W}\, V$$

zu bestimmen ist. Wird daher unter δ der Durchmesser der Nietbolzen und unter s' die zulässige Abscheerungsspannung verstanden, so erhält man die Anzahl n der Nietbolzen für jede Längeneinheit der Fuge durch

$$n\, \frac{\pi \delta^2}{4}\, s' = \frac{f}{W}\, V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

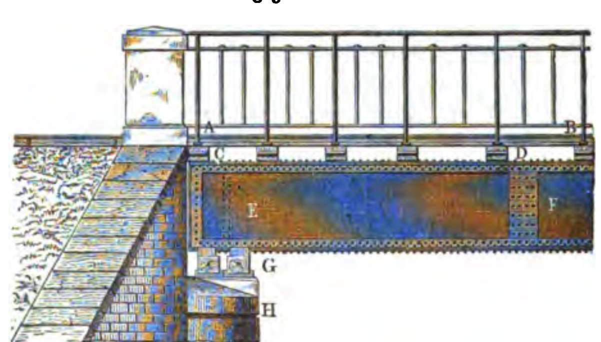
Dagegen sind die Nieten für verticale Nietfugen, wie sie z. B. bei dem Zusammenstoßen der die Mittelwand bildenden Platten entstehen, einer Einwirkung sowohl der horizontalen Biegungsspannung s wie auch der verticalen Schubspannung σ, also einer totalen Spannung gleich $\sqrt{s^2 + \sigma^2}$ ausgesetzt.

Ueber die Verhältnisse, welche für die Nietungen gelten, muß auf das in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 darüber Gesagte verwiesen werden. In Betreff der Gurtungsquerschnitte hat man bei den einer Zugspannung ausgesetzten Gurtungen die durch das Nietloch beanspruchte Querschnitts-

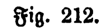
fläche $d_1 \delta$ als eine Verschwächung in Abzug zu bringen, während bei den gedrückten Gurtungen eine Schwächung durch die Nietlöcher nicht stattfindet, da die gut passenden Nietbolzen die Druckübertragung ebenso gut übernehmen, wie das Material der Gurtung. Jedenfalls wird man dafür sorgen, daß in irgend welchem Querschnitte jede Gurtung durch höchstens ein Nietloch verschwächt wird. Zu den Gurtungsquerschnitten werden bei der praktischen Ausführung der Rechnung außer den Durchschnitten der horizontalen Deckplatten auch die Querschnitte der beiden Winkeleisen gerechnet, welche diese Deckplatten mit der Mittelwand verbinden.

Eine einfache Blechträgerbrücke für Eisenbahnen ist theilweise in Fig. 211 dargestellt. Die ganze Bahn AB ruht hier mittelst Querschwellen CD... auf sechs I förmigen Blechträgern wie EF von 1 bis 1,5 m Höhe, welche unter sich selbst wieder durch mehrere Querbalken von Eisenblech verbunden

Fig. 211.



sind. Die Hauptträger liegen auf Holzschwellen G, die durch eiserne Stühle auf den Pfeilern H ruhen. Bei einer von Etzel entworfenen Eisenbahnbrücke über die Aar unweit Olten in der Schweiz hat man auch bogenförmige Blechträger angewendet. Diese Brücke besteht aus drei Oeffnungen von 31,5 m Spannung und 5,1 m Bogenhöhe, und jede Oeffnung wird durch fünf Blechbögen von 0,9 m Höhe und fünf unmittelbar unter der 7,2 m breiten zweigleisigen Bahn liegenden geraden Blechbalken von 0,6 m Höhe überspannt.


Fig. 212.



Anstatt der Blechwand hat man auch die Füllung zwischen den Gurtungen durch ein aus Diagonalstangen AB, CD..., Fig. 212, zusammengesetztes Gitterwerk gebildet, indem man diese Diagonalstäbe nicht nur mit den Eckeisen der

Gurtungen, sondern auch unter sich in den Kreuzungspunkten E, F, G ... vernietet. Die Wirkungsweise dieser Gitter kann in ähnlicher Art untersucht werden, wie die der weiter unten näher behandelten Fachwerksträger.

Beispiele: 1. Für eine Eisenbahnbrücke sollen die 3,6 m langen Querträger als Blechbalken construirt werden, und es sind die Dimensionen entsprechend einer Belastung des Querträgers gleich 24 000 kg zu ermitteln. Setzt man die Belastung als gleichmäßig über die Trägerlänge vertheilt voraus, so ist das größte Biegungsmoment für die Mitte durch

$$M = 24\,000\,\frac{3{,}6}{8} = 10\,800\,\text{mkg}$$

gegeben. Nimmt man für den Querträger eine ganze Höhe $h = \frac{l}{10} = 0{,}36$ m an und stellt als Abstand der Gurtungsschwerpunkte etwa die Höhe $h_0 = 0{,}32$ m in Rechnung, so erhält man mit einer zulässigen Spannung $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nach (6) die Größe des wirksamen Querschnittes für jede Gurtung:

$$F_g = \frac{M}{s\,h_0} = \frac{10\,800}{6\,000\,000\,.\,0{,}32} = 0{,}005625\,\text{qm} = 5625\,\text{qmm}.$$

Bildet man die Gurtung nach Fig. 213 aus einer Deckplatte von der Breite $b = 160$ mm und zwei gleichschenkeligen Eckeisen von $b_1 = 60$ mm Schenkellänge und $d_1 = 12$ mm Schenkelstärke, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Verschwächung durch ein 20 mm weites Nietloch die erforderliche Dicke d der Deckplatte durch

Fig. 213.

$$F_g = 5625 = 2\,(60 + 48)\,12 - 20\,.\,12 + (160 - 20)\,d$$

zu

$$d = \frac{5625 - 2352}{140} = 23{,}3\,\text{mm}$$

Dieser Querschnitt ist mit Rücksicht auf das oben Gesagte den Gurtungen überall zu geben.

Da die verticale Schubkraft an den Enden 12 000 kg beträgt, so ermittelt sich die geringste Stärke d_m der Blechwand, unter der Annahme einer höchstens zulässigen Schubspannung von 4 kg pro Quadratmillimeter, nach (7) zu

$$d_m = \frac{V}{\sigma\,h_0} = \frac{12\,000}{4\,000\,000\,.\,0{,}32} = 0{,}0094\,\text{m},$$

wofür man rund 10 mm annehmen wird.

Die Anstrengung der Nieten, welche die Eckeisen mit der Mittelwand verbinden, ist, wie diejenige der Zähne oder Dübel der verzahnten Balken, an den Enden des Balkens am größten. Nimmt man daher daselbst für die Nietbolzen 25 mm Durchmesser, also einen Querschnitt von 491 qmm an, und setzt eine Schubspannung von 4 kg als zulässig voraus, so vermag jeder Niet, da er in zwei Querschnitten abgescheert werden würde, mit einer Kraft von 2 . 4 . 491 = 3928 kg zu widerstehen. Da nun die Schubkraft an den Enden für eine Längeneinheit, d. h. etwa für $\lambda = 1$ mm Trägerlänge durch

$$\sigma\, d_m \lambda = \lambda \frac{V}{h_0} = 0{,}001 \frac{12\,000}{0{,}32} = 37{,}5 \text{ kg}$$

bestimmt ist, so kann daselbst die Entfernung zweier Nieten zu

$$\frac{3928}{37{,}5} = 104{,}7 \text{ mm}$$

angenommen werden. Nach der Mitte hin dürfen die Nieten wegen der geringeren Schubkraft weiter von einander entfernt gesetzt werden. Dasselbe gilt auch für diejenigen Nieten, welche die Gurtungsdeckplatten mit den Eckeisen verbinden, da diese Nieten einer in dem Maße geringeren Schubkraft ausgesetzt sind, in welchem die Größe f in der allgemeinen Formel (5) für die Deckplatte allein kleiner ist, als für die ganze Gurtung. Da einer der vorstehend berechneten Nietbolzen für die Eckeisen von 25 mm Stärke seine ganze Kraft auf die geringe Druckfläche von $10 \times 25 = 250$ qmm der Mittelwand zu übertragen hat, so erkennt man hieraus die Zweckmäßigkeit einer Vergrößerung dieser besagten Druckfläche, wie man sie etwa durch Unterlagsplatten erreichen kann, die an den Enden des Trägers zwischen den Eckeisen und der Mittelwand angebracht werden.

2. Ein Fußgängerbankett soll zur Seite einer eisernen Brücke durch an dem betreffenden Hauptträger befestigte Consolen von 1,6 m Ausladung unterstützt werden. Welche Dimensionen haben diese als Blechbalken auszuführenden Consolträger zu erhalten, wenn die auf einen entfallende gleichmäßig vertheilte Last 1000 kg beträgt, und die Consolen an der Befestigungsstelle eine Höhe von 0,32 m erhalten sollen.

Hier tritt das größte Biegungsmoment $M = 1000 \cdot \frac{1{,}6}{2} = 800$ mkg mit der größten Verticalkraft $V = 1000$ kg gleichzeitig an der Befestigungsstelle auf, und man hat daher, wenn die höchste Materialspannung den Werth $s_1 = 6$ kg per Quadratmillimeter nicht übersteigen soll, und $h_0 = 0{,}3$ m gesetzt wird, nach (12):

$$6 \,.\, 1000\,000 = \frac{800}{0{,}6\, F_g} + \sqrt{\left(\frac{1000}{d_m 0{,}3}\right)^2 + \left(\frac{800}{0{,}6\, F_g}\right)^2}$$

Nimmt man auch hier wegen der Witterungseinflüsse die Dicke d_m der Mittelwand gleich 0,010 m, so schreibt sich diese Gleichung auch

$$\left(6\,000\,000 - \frac{8000}{6 F_g}\right)^2 = \frac{1\,000\,000^2}{9} + \left(\frac{8000}{6 F_g}\right)^2,$$

woraus

$$36 - \frac{1}{9} = \frac{2 \,.\, 6 \,.\, 8}{6 \,.\, 1000\, F_g},$$

oder

$$F_g = \frac{0{,}016}{35{,}889} = 0{,}000446 \text{ qm} = 446 \text{ qmm}.$$

Wollte man die Dimensionen nach (14) unter Zugrundelegung einer Anstrengung $s = \sigma = 0{,}62\, s_1 = 0{,}62 \,.\, 6 = 3{,}72$ kg berechnen, so erhielt man mit diesem Werthe aus (4)

$$F_g = \frac{M}{s\, h_0} = \frac{800}{3{,}72 \,.\, 1000\,000 \,.\, 0{,}3} = 716 \text{ qmm},$$

und aus (5)

$$d_m = \frac{V}{\sigma\, h_0} = \frac{1000}{3{,}72 \,.\, 1000\,000 \,.\, 0{,}3} = 0{,}0009 \text{ m},$$

oder noch nicht 1 mm. Diese Anordnung würde, abgesehen davon, daß sie nicht ausführbar ist, ökonomisch vortheilhaft sein, weil bei derselben der Gesammtquerschnitt, also das Trägergewicht, wesentlich kleiner ausfallen würde ($F = 2 . 716 + 300 . 0{,}9 = 1702$ qmm), als bei der oben für eine Stärke $d_m = 10$ mm ermittelten Construction, für welche der Trägerquerschnitt an der Befestigungsstelle durch

$$F = 2 . 446 + 300 . 10 = 3892 \text{ qmm}$$

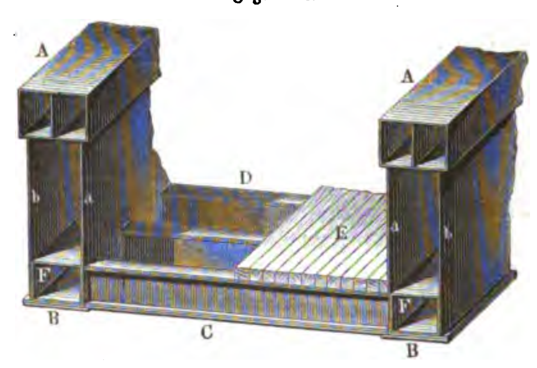
folgt. Mit Rücksicht auf das Kosten des Eisens pflegt man indessen die Blechstärken bei Brücken nicht unter 10 mm anzunehmen.

§. 52. **Röhrenträger.** Um bei größeren Brücken den Blechbalken auch gegen seitliche Ausbiegungen, wie sie durch Erschütterungen und durch den Winddruck angestrebt werden, eine größere Widerstandsfähigkeit zu geben, ist zuerst von R. Stephenson die kasten- oder röhrenförmige Gestalt der Träger angewendet worden, und es sind daraufhin die sogenannten Röhrenbrücken von R. Stephenson und W. Fairbairn entstanden.

Bei den Fairbairn'schen Ausführungen wird die Brücke von zwei parallelepipedischen Röhrenbalken getragen, während Stephenson die ganze Brücke zu einer parallelepipedischen Röhre gestaltete, in deren Innerem die Fahrbahn sich befand.

Eine einfache, durch zwei Röhrenträger AB getragene Brücke zeigt Fig. 214. Jeder der Träger ist hierbei aus zwei verticalen Blechwänden

Fig. 214.

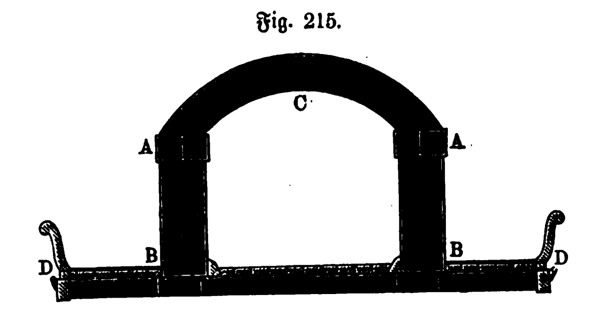


a und b gebildet, welche als Gurtungen oben und unten mit den Röhren A und B von viereckigem Querschnitte verbunden sind. Der unteren Gurtung B hat man dabei durch eine Bodenplatte und der oberen A durch eine eingenietete Zwischenwand die nöthige Versteifung gegeben. Die Brückenbahn E liegt hierbei auf einzelnen I förmigen Blechträgern C, D, welche beiderseits mit den inneren Wänden der Hauptträger vernietet sind. Auch verbindet man wohl die beiden Hauptträger, wie aus Fig. 215 ersichtlich, ober-

halb zur größeren Versteifung durch eiserne Bögen wie C, und ordnet seitlich der Hauptträger auf consolartig auskragenden Blechträgern BD besondere Fußwege an.

Die Construction einer Röhrenbrücke von Stephenson, welche die Fahrbahn ganz umschließt, ist aus Fig. 216 zu ersehen. Die ganze Brücke

Fig. 215.



besteht aus einem hohlen Parallelepipede $ABCD$, welches aus Blechstücken von 1,2 bis 4 m Länge, 0,6 m Breite und 10 bis 20 mm Dicke mittelst 25 mm starker Bolzen zusammengenietet ist. Zur Erhöhung der Tragfähigkeit ist diese Röhre sowohl mit einem doppelten Boden wie auch mit einer doppelten Decke versehen, und die dadurch gebildeten Hohlräume AB und EF sind durch verticale Scheidewände in Zellen getheilt, um ein Einknicken der breiten horizontalen Platten zu verhindern. Auch den hohen Tragwänden, wie BD, hat man dadurch noch eine besondere Steifigkeit ertheilt, daß die in verticalen Stoßfugen zusammenstoßenden Blechplatten auf beiden Seiten mit ⊥ förmigen Laschen zusammengenietet worden sind, welche innen und außen vorstehende verticale Versteifungsrippen bilden. Die Figur zeigt auch die Quer- und Langschwellen für eine durch die Röhre zu führende Eisenbahn. Ueberdies sind noch diejenigen Stellen der Röhre, wo dieselbe aufruht, von innen mit gußeisernen Rahmen abgesteift und ebenso sind die Wände der unteren Zellenreihe daselbst durch gußeiserne Träger gestützt.

Fig. 216.



Es gehören zu diesen Stephenson'schen Röhrenbrücken insbesondere die Conway-Brücke und die Britannia-Brücke. Die erstere besteht aus zwei

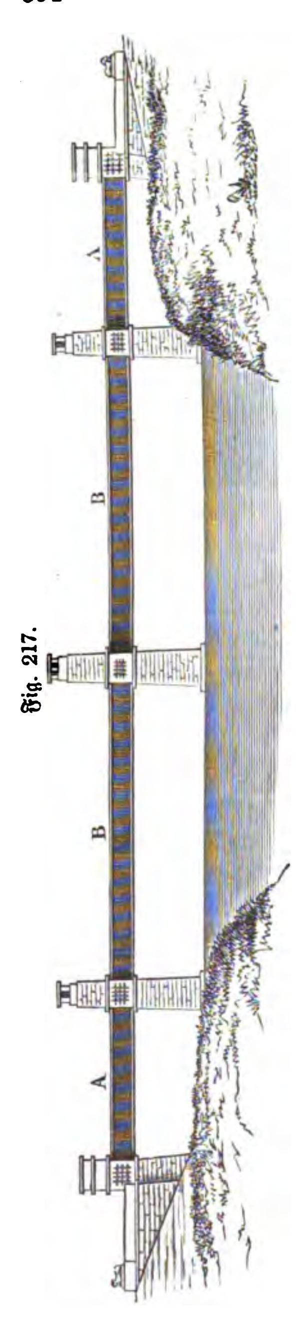


Fig. 217.

neben einander liegenden Röhren, wovon jede 129 m lang, 4,5 m breit, 6,85 m hoch an den Enden und 7,75 m hoch in der Mitte ist, und ein Gewicht von 1470 Tonnen (à 1000 kg) hat. Die Britannia-Brücke, welche wie die Telford'sche Kettenbrücke, über den Menai-Meeresstrom führt, besteht aus vier Brückenöffnungen *ABBA*, Fig. 217, zwei von je 140 m und zwei von je 70 m Länge, und hat im Ganzen eine Länge von 460 m. Die Breite dieser Brücke ist 4,5 m, die Höhe derselben an den Enden 6,94 m und in der Mitte 9,14 m. Zu jeder Röhre waren nöthig 2875 Tonnen ebenes Eisenblech, 604 Tonnen Winkeleisen, 425 Tonnen ⊥ Rippen, 340 Tonnen (882 000 der Zahl nach) Nieten, und außerdem noch 1016 Tonnen gußeiserne Rahmen u. s. w., so daß eine Röhre im Ganzen 5260 Tonnen wiegt.

Damit diese langen Röhrenbalken bei wechselnder Temperatur sich ungehindert ausdehnen und wieder zusammenziehen können, ruhen ihre Enden nicht unmittelbar auf den Pfeilern, sondern durch Vermittelung einer größeren Anzahl gußeiserner Walzen (bei der Britannia-Brücke 24 Paar von 0,15 m Durchmesser und 0,60 m Länge), welche sich zwischen einer auf dem Pfeiler befestigten gußeisernen Sohlplatte und einer eben solchen am Röhrenträger von unten befestigten Lagerplatte bewegen können.

Man hat auch den Röhrenträgern eine kreisrunde oder elliptische Querschnittsgestalt gegeben, namentlich hat Brunel cylindrische Blechröhrenträger für die Chepstow-Eisenbahnbrücke angewendet, an welchen die Brückenbahn aufgehangen ist. Die Kreisform des Querschnittes gewährt jedoch keine vortheilhafte Benutzung des Materials (s. §. 45), auch haben die Versuche von Fairbairn gezeigt, daß sich die Röhrenträger mit kreisrundem Querschnitte leicht zusammendrücken, wobei sie an den Enden breiter und niedriger, in der Mitte höher und

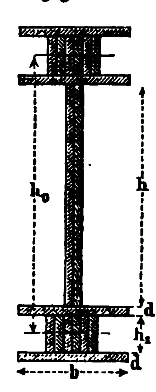
schmaler werden. Diesen Mangel einer Veränderung der Querschnittsform zeigen auch die Träger von elliptischen Querschnitten, wenn auch in geringerem Maße als die von kreisrunder Querschnittsgestalt.

Anmerkung. Bei den Festigkeitsversuchen, welche Hodgkinson an Röhren von kreisförmigen, elliptischen und rectangulären Querschnitten angestellt hat, wurde nicht nur bestätigt, daß die letzteren unter übrigens gleichen Umständen mehr Stärke besitzen als die ersteren, sondern auch noch dargethan, daß die an beiden Enden aufliegende und in der Mitte belastete Röhre von oben herein, also durch Zerdrücken und nicht durch Zerreißen zerbricht. Es hat daher das Schmiedeeisen mit dem Holze die Eigenschaft gemein, daß es gegen Zerreißen mehr widersteht, als gegen Zerdrücken, während es bei dem Gußeisen umgekehrt ist. Deshalb versieht man auch die Decke der Röhre mit mehr Zellen, als den Boden.

Die Tragfähigkeit eines Röhrenträgers läßt sich wie diejenige eines Blechträgers von I förmigem Querschnitte berechnen, indem man als den Gurtungsquerschnitt denjenigen der den Boden und die Decke bildenden Zellenwandungen und als Entfernung der Gurtungsschwerpunkte den Abstand der Mitten dieser Zellen ansieht.

Ist h die Höhe der Blechwände oder der Röhre im Lichten, und h_1 die lichte Höhe der Zellen, sowie b die Breite der Gurtungen und n die Anzahl der verticalen Zellenwände, und nimmt man alle Blechstärken gleich d an, so hat man einen Gurtungsquerschnitt nach Fig. 218 zu

Fig. 218.



$$F_g = 2bd + nh_1 d = (2b + nh_1)d, \;.\;.\; (1)$$

den Abstand der Mitte der Gurtungen von einander

$$h_0 = h + h_1 + 2d \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

und den ganzen Querschnitt des Röhrenträgers

$$F = 2F_g + F_m = 2(2b + nh_1 + h)d, \;\; (3)$$

daher das Gewicht der ganzen Röhre von der Länge l bei dem specifischen Gewichte γ gleich

$$G = F\gamma l \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

Ist dann noch die Belastung durch die Brückenbahn und die bewegliche Last pro Längeneinheit gleich k, so hat man bei voller Belastung der Brücke das Moment für die Mitte durch

$$M = \frac{ql^2}{8} = (k + F\gamma)\frac{l^2}{8}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

woraus der Gurtungsquerschnitt durch

$$M = (k + F\gamma)\frac{l^2}{8} = s_1 F_g h_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6)$$

zu

$$F_g = \frac{k + F\gamma}{s_1 h_0} \frac{l^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

und die Durchbiegung in der Mitte zu

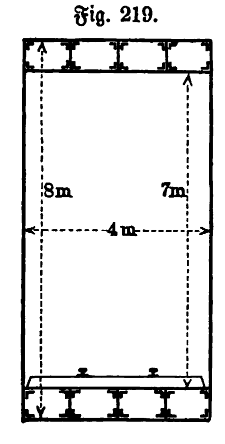
$$a = \frac{5}{384} \frac{(k + F\gamma)\, l^4}{E F_g h_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

folgt.

Die Anwendung der Röhrenträger zu größeren Brücken findet heute nicht mehr statt, da die Verwendung des Materials bei denselben wenig vortheilhaft ist. Da nämlich bei fast allen Brücken die durch die Querträger aufgenommene Last auf die Hauptträger in einzelnen Punkten concentrirt übertragen werden muß, so erfordern die Blechwände an diesen Stellen Verstärkungen und es findet eine ungünstige mehr oder minder auf Biegung wirkende Beanspruchung der Construction zwischen den Anheftungspunkten der Querträger statt. Derselbe Uebelstand haftet den nach Fig. 212 ausgeführten engmaschigen Gitterträgern an, außerdem ist bei den letzteren die Untersuchung der Inanspruchnahme der einzelnen Gitterstäbe wegen deren vielfacher Vernietung mit einander eine schwierige und unzuverlässige. Diese Uebelstände sind vermieden bei den im Folgenden zu behandelnden Fachwerksconstructionen, welche in neuerer Zeit ganz allgemein für alle größeren Spannweiten die Blech-, Röhren- und engmaschigen Gitterbalken verdrängt haben. Nur für Zwischenconstructionen, z. B. für Schwellenträger und Querträger der Eisenbahnbrücken, sowie auch für Constructionen mit möglichst gleichmäßig vertheilter Belastung, z. B. kleine Chausseebrücken, Unterzüge in Speichern und Fabrikräumen 2c. finden die Blechträger noch häufigere Verwendung.

Beispiel. Für eine eingeleisige Eisenbahn soll eine Röhrenbrücke von 80 m Spannweite ausgeführt werden. Der Röhrenträger, Fig. 219, solle eine äußere Höhe $H = 8$ m, eine innere Höhe $h = 7$ m, daher eine Höhe der Zellen in dem Boden und der Decke von $h_1 = 0{,}5$ m, sowie eine Breite von 4 m erhalten. Wenn jede der beiden Gurtungen durch drei Zwischenwände in vier Zellen getheilt wird, und für die verticalen Blechwände wegen der Schubspannungen eine Blechstärke von 15 mm angenommen wird, so sind die Querschnittsdimensionen der Gurtungen unter der Bedingung zu ermitteln, daß die Verkehrslast $k = 4000$ kg pro laufenden Meter beträgt und die höchste Spannung den Betrag $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nicht übersteigt.

Fig. 219.



Zur Ausbildung der Gurtungen sind im Innern der Zellen 16 Winkeleisen erforderlich, deren Schenkellänge zu 60 mm bei einer Stärke von 12 mm angenommen werde. Nach Abzug eines Nietloches für

die 20 mm dicken Rietbolzen verbleibt für jedes dieser Winkeleisen ein wirksamer Querschnitt von

$$(60 + 60 - 12 - 20)\,12 = 1056 \text{ qmm} = 0{,}001056 \text{ qm},$$

daher für 16 Winkeleisen

$$16 \,.\, 0{,}001056 = 0{,}0169 \text{ qm}.$$

Bezeichnet man mit d die gesuchte Stärke der Zellenwände, so hat man den wirksamen Querschnitt einer Gurtung

$$F_g = (2 \,.\, 4 + 5 \,.\, 0{,}5)\, d + 0{,}0169 = 10{,}5\, d + 0{,}0169,$$

und den Querschnitt des ganzen Trägers

$$F = 2\, F_g + 2 \,.\, 7 \,.\, 0{,}015 = (21\, d + 0{,}2438) \text{ qm}.$$

Nimmt man das specifische Gewicht 7,5 des Eisens mit Rücksicht auf Nieten und Versteifungen um 20 Proc. größer, also zu $1{,}2 \,.\, 7{,}5 = 9$ an, so erhält man das Trägergewicht pro laufenden Meter zu:

$$G = (21\, d + 0{,}2438)\, 9000 \text{ kg} = rot\; 189\,000\, d + 2200 \text{ kg}.$$

Das Maximalmoment in der Mitte findet sich, wenn man noch für die Schienen und Schwellen 200 kg für den laufenden Meter rechnet, zu:

$$M = (4000 + 200 + 2200 + 189\,000\, d)\, \frac{80^2}{8} = 5120\,000 + 151\,200\,000\, d.$$

Man erhält daher nach (6)

$$5\,120\,000 + 151\,200\,000\, d = 6\,000\,000 \,.\, (10{,}5\, d + 0{,}0169)\;7{,}5,$$

oder

$$5{,}120 - 0{,}7605 = 472{,}5\, d - 151{,}2\, d;$$

woraus

$$d = \frac{4{,}3595}{321{,}3} = 0{,}0136 = rot\;\; 14 \text{ mm}$$

folgt.

Mit diesem Werthe ergiebt sich nun

$$F_g = 10{,}5 \,.\, 0{,}014 + 0{,}0169 = 0{,}1639 \text{ qm}$$

und

$$G = 189\,000 \,.\, 0{,}014 + 2200 = 4846 \text{ kg};$$

folglich erhält man nach (8) die Durchbiegung der belasteten Brücke in der Mitte bei einem Elasticitätsmodul $E = 20000$ (für Millimeter) zu:

$$a = \frac{5}{384}\, \frac{4200 + 4846}{20000 \,.\, 1000^2 \,.\, 0{,}1639 \,.\, 7{,}5}\, 80^4 = \frac{9{,}046 \,.\, 64}{18 \,.\, 163{,}9} = 0{,}196 \text{ m}.$$

Fachwerke. Um bei der Ausführung größerer Träger das Material möglichst vollständig auszunutzen, was nach dem früher Bemerkten nur bei gleichmäßiger Anstrengung aller Fasern eines Stückes durch Zug- oder Druckkräfte, nicht aber bei Biegungen möglich ist, sind die Fachwerke entstanden. Ein Fachwerksträger besteht im Allgemeinen aus zwei Stäben oder Stangen, den sogenannten Gurtungen, Längsbändern oder Streckbäumen, welche durch ein System von Zwischenstäben derart zu einem steifen Träger verbunden sind, daß in Folge der Belastung in allen Stäben nur Kräfte hervorgerufen werden, welche nach den Längsaxen §. 53.

dieser Stäbe gerichtet sind, die letzteren daher nur auf einfachen Zug oder Druck, nicht aber auf Biegung beanspruchen. Um dies zu erreichen, müssen die einzelnen Glieder der Construction unter sich zu Dreiecken derartig verbunden sein, daß in den Ecken dieser Dreiecke, den sogenannten **Knotenpunkten**, eine gewisse Drehbarkeit der einzelnen Dreiecksseiten gegen einander wie um Charniere ermöglicht ist. Nur unter dieser Voraussetzung kann jedes einzelne Glied unter Einfluß der auf dasselbe wirkenden Zug- oder Druckkraft eine Längenänderung annehmen, ohne einen Zwang in Form einer Biegung auf die Nachbarglieder auszuüben, wie dies in dem Falle einer steifen, nicht drehbaren Verbindung in den Ecken der Fall sein müßte. Bei sehr vielen Constructionen bildet man in der That die Knotenpunkte zu Charnieren aus, in welchen ein Drehbolzen die in diesem Knoten zusammentreffenden Glieder vereinigt. Bei größeren Spannweiten und Kräften dagegen würde sich oft die erforderliche Haltbarkeit durch einen einzigen Bolzen praktisch nicht erreichen lassen, in welchen Fällen man daher zu einer steifen Verbindung durch mehrere Nieten gezwungen ist. Hierdurch werden allerdings auf die in einem Knotenpunkte zusammentreffenden Glieder durch die Längenänderung eines derselben biegende Einwirkungen ausgeübt, doch fallen dieselben im Verhältnisse zu der Gesammtanstrengung um so geringer aus, je größer die Längen der einzelnen Glieder und des ganzen Fachwerkes sind. Man kann daher bei allen größeren Constructionen von diesen Biegungen, deren Bestimmung sich übrigens der Rechnung entziehen würde, absehen, und es soll im Folgenden immer eine drehbare, charnierartige Verbindung in den Knotenpunkten vorausgesetzt werden. Jedenfalls muß bei der Ausführung des Fachwerkes sorgsam darauf Bedacht genommen werden, daß in jedem Knotenpunkte die geometrischen Axen der sämmtlichen von demselben ausgehenden Glieder oder Stäbe sich thatsächlich genau in einem Punkte schneiden.

Aus der gegebenen Bedingung, daß kein Glied einer anderen als einer axial gerichteten Kraft ausgesetzt sein soll, ergiebt sich weiter, daß die äußeren angreifenden Kräfte, also die Belastungen und Auflagerreactionen immer in den **Knotenpunkten zum Angriffe** gebracht werden müssen. Wenn zuweilen auch ein Glied, z. B. eine Stange, zwischen ihren Endpunkten von einer Kraft ergriffen wird, so ist es doch nöthig, daß die Richtung der Stange mit derjenigen dieser Kraft zusammenfällt, daß also beispielsweise eine Gewichtsbelastung in dieser Weise nur an einer verticalen Stange (Hängestange) angreifen darf, während horizontale oder geneigte Glieder nur in den End- oder Knotenpunkten belastet werden dürfen. Man erreicht bei den Fachwerksträgern für Brücken diese Belastungsart dadurch, daß man das Gewicht der Fahrbahn nebst der mobilen Belastung durch kleinere Quer- oder Zwischenträger aufnimmt, von welchen jeder an den beiden Enden mit

den correspondirenden Knotenpunkten von zwei parallelen Hauptfachwerksträgern in Verbindung steht, sei es, daß diese Querträger direct auf den Hauptträgern ruhen, oder daß durch verticale Pfosten oder Hängeeisen die Last der Querträger auf die Knotenpunkte übertragen wird. Hierbei hängt es von den örtlichen Verhältnissen, namentlich von der Höhenlage der Fahrbahn ab, ob die Belastung auf die Knotenpunkte der oberen oder der unteren Gurtung übertragen wird. Bei den Dachstühlen wird die durch das Eigengewicht der Deckfläche gebildete Belastung durch die Sparren auf die sogenannten Pfetten übertragen, welche, entsprechend den Querträgern der Brücken, direct die Knotenpunkte und zwar hier ausschließlich diejenigen des oberen Streckbaumes belasten, während unter Umständen auch noch durch verticale Hängeeisen das Gewicht von etwa zu tragenden Zwischendecken auf die Knotenpunkte übertragen wird.

Das Eigengewicht der das Fachwerk bildenden einzelnen Stangen wird natürlich bei allen nicht verticalen Gliedern immer eine Biegung derselben anstreben, doch wird diese Anstrengung im Verhältnisse zu der durch die Last der ganzen Construction erzeugten als gering zu vernachlässigen sein, da die einzelnen Glieder meistens nur geringe Längen erhalten. Man pflegt daher auch das Eigengewicht der Fachwerksconstruction als in den Knotenpunkten vereinigt zu denken, wie es im Folgenden immer geschehen soll. In Betreff der Vertheilung der Last pflegt man dieselbe, sowohl das Eigengewicht der Construction wie auch die zufällige oder Verkehrslast, als über die Horizontalprojection des Bauwerkes gleichmäßig vertheilt zu denken, und es sollen im Folgenden wieder unter p und k diese specifischen Belastungen und unter $q = p + k$ die Totalbelastung pro Längeneinheit des Fachwerksträgers verstanden werden. Hierbei muß bemerkt werden, daß eine gleichmäßige Vertheilung der Verkehrslast zwar bei den Brücken streng genommen nicht stattfindet, indem hierbei die Lasten der Fahrzeuge sich in den Berührungspunkten der Räder mit der Bahn concentriren, doch ist dieser Umstand nur für kleinere Brücken von einiger Bedeutung, in welchen Fällen man daher auch die jeweilige Lastvertheilung der Rechnung zu Grunde zu legen hat.

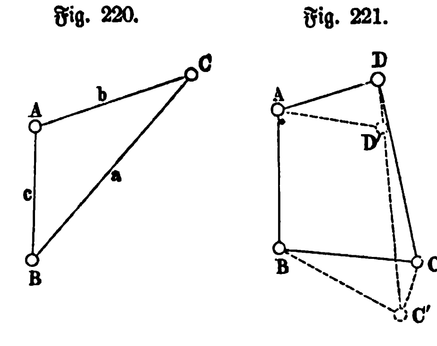


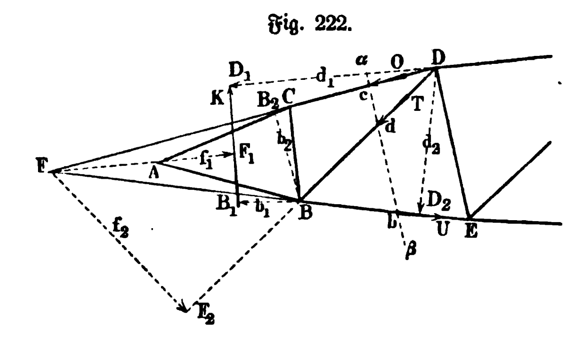
Fig. 220. Fig. 221.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, warum die einzelnen Glieder eines Fachwerkes Dreiecke bilden müssen, denn nur in diesem Falle ist die relative Lage der einzelnen Knotenpunkte A, B und C, Fig. 220, durch

die Längen a, b und c der einzelnen Stücke unverrückbar festgestellt, und eine Formänderung des Dreiecks kann nur in Folge elastischer Verlängerungen und Verkürzungen dieser Stücke eintreten. Bei mehr als drei Seiten, z. B. bei dem Vierecke $ABCD$, Fig. 221 (a. v. S.), dagegen ist vermöge der Drehbarkeit in den Eckpunkten die gegenseitige Lage der letzteren zu einander vollkommen unbestimmt, und es kann diese Construction sehr viele andere Lagen, wie z. B. $ABC'D'$, annehmen.

Um nun ein Fachwerk hinreichend fest auszuführen, damit es den auf dasselbe wirkenden äußeren Kräften, welche in jedem Falle der Ausführung gegeben sind, mit genügender Sicherheit widerstehen kann, hat man für jedes Constructionsglied diejenige Anstrengung, Zug- oder Druckspannung, zu ermitteln, welcher dieses Glied in dem für dasselbe ungünstigsten Belastungszustande ausgesetzt ist. Kennt man diese Anstrengung, so ist es nach den in Thl. I, Abschn. IV angegebenen Regeln leicht, die Querschnittsdimensionen für das Element so zu bestimmen, daß dasselbe die gefundene Spannung mit Sicherheit zu äußern vermag. Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird,

Fig. 222.



tritt diese ungünstigste Anstrengung der einzelnen Glieder keineswegs für alle verschiedenen Stücke bei derselben Belastung ein, und es ist daher nöthig, vor der gedachten Ermittelung der betreffenden Anstrengung in einem Gliede denjenigen Belastungszustand des ganzen Fachwerkes festzustellen, für welchen jene Anstrengung den größtmöglichen Werth erreicht. Ist diese Belastung festgestellt, so gelangt man zur Kenntniß der gesuchten Spannung im Allgemeinen in folgender Weise.

Gesetzt $A, B, C, D, E \ldots$, Fig. 222, seien die Knotenpunkte irgend eines wie vorstehend beschriebenen Fachwerkes, welches in der Ebene der Zeichnung ganz beliebigen äußeren Kräften, etwa Belastungen und Auflagerreactionen, ausgesetzt sein mag, und es handele sich darum, die innere Spannkraft zu bestimmen, welche beispielsweise in der Stange BD durch diese Belastungen hervorgerufen wird. Man denkt sich dann durch einen beliebigen ebenen

oder gekrümmten Schnitt, etwa in der Richtung $\alpha\beta$, das ganze Fachwerk in zwei Theile zerlegt, und betrachtet z. B. in der Figur denjenigen $Acdb$. Wenn man an den Schnittstellen c, d und b der durchschnittenen Glieder solche Kräfte O, T, U angebracht denkt, welche der Richtung und Größe nach genau mit denjenigen inneren Spannkräften übereinstimmen, die vor der Durchschneidung von dem anderen Theile des Fachwerkes $cDEbd$ auf das betrachtete Stück $Acdb$ ausgeübt wurden, so wird offenbar an dem Gleichgewichtszustande des letzteren nichts geändert. Man hat daher lediglich die Gleichgewichtsbedingungen für den betreffenden Fachwerkstheil $Acdb$ zu untersuchen, welcher außer den Spannungen O, T und U noch gewissen äußeren, auf dieses Stück wirkenden Kräften ausgesetzt ist. Diese letzteren Kräfte können nach dem Vorangehenden nur in den Knotenpunkten wie A, B, C angreifen und sämmtlich in der Zeichnungsebene liegen; dieselben lassen sich, als bekannte Kräfte, jederzeit zu einer Mittelkraft zusammensetzen, welche im Allgemeinen nicht durch einen Knotenpunkt gehen wird, und welche in der Figur etwa durch K der Richtung und Größe nach vorgestellt sein mag.

Es handelt sich also jetzt einfach darum, die drei der Richtung nach bekannten Kräfte O, T und U ihrer Größe nach so zu bestimmen, daß sie mit der bekannten Kraft im Gleichgewichte sind; mit anderen Worten, die Kraft K nach den drei Richtungen von O, T und U zu zerlegen. Diese Aufgabe ist immer in bestimmter Weise zu lösen, vorausgesetzt, daß nicht etwa drei der Kräfte sich in einem Punkte schneiden, was hier nicht vorausgesetzt werden soll.

Die gedachte Aufgabe kann nach Thl. I analytisch dadurch gelöst werden, daß man die Summe der verticalen und die Summe der horizontalen Componenten aller Kräfte, sowie die Summe von deren Momenten um einen beliebigen Punkt einzeln gleich Null setzt, und die drei dadurch erhaltenen Gleichungen, in denen O, T und U als Unbekannte vorkommen, nach diesen Größen auflöst. Diese Lösung, die immer zum Ziele führt, ist zwar nicht schwierig, aber umständlich in der Ausführung, da die Auflösung der drei Gleichungen wegen der in ihnen vorkommenden trigonometrischen Functionen zu Unbequemlichkeiten der Rechnung führt.

Man kann aber noch in einfacherer Art zur Bestimmung der gesuchten Spannungen O, T und U gelangen, und zwar ebensowohl durch Rechnung wie auf graphischem Wege. Wählt man nämlich zum Momentenmittelpunkte den Durchschnitt von zweien der unbekannten drei Kräfte, so ist hierfür das Moment dieser beiden Kräfte gleich Null, und man erhält eine Gleichung zwischen der dritten Kraft und der Mittelkraft K der äußeren Kräfte, woraus die dritte Kraft ohne Weiteres folgt. So z. B. erhält man

für die Spannkraft O die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnittspunkt B von T und U:

$$K.BB_1 = O.BB_2, \text{ also } O = K\frac{b_1}{b_2},$$

wenn die Abstände BB_1 mit b_1 und BB_2 mit b_2 bezeichnet werden. In gleicher Weise liefert der Durchschnittspunkt D zwischen O und T für U die Gleichung:

$$K.DD_1 = U.DD_2, \text{ oder } U = K\frac{d_1}{d_2}$$

und endlich der Durchschnittspunkt F zwischen O und U für T die Gleichung:

$$K.FF_1 = T.FF_2, \text{ also } T = K\frac{f_1}{f_2}.$$

Man erhält also jede der gesuchten Kräfte direct proportional mit der Mittelkraft K, und zwar ist das Verhältniß durch zwei Gerade wie b_1 und b_2, d_1 und d_2, f_1 und f_2 gegeben, welche man entweder unmittelbar aus der Zeichnung abgreifen oder auch leicht aus den Längen und Neigungen der einzelnen Constructionsglieder durch Rechnung bestimmen kann. Diese Methode der statischen Momente ist zuerst von Ritter aufgestellt und in dessen Werke*) consequent durchgeführt worden, worauf wegen des Näheren verwiesen werden mag. Bei der Führung des Schnittes $\alpha\beta$ hat man nur darauf zu achten, daß man nicht mehr als drei Constructionsglieder durchschneidet, deren Spannungen noch unbekannt sind.

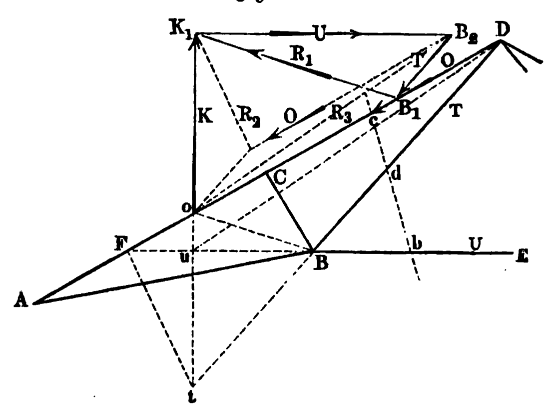
Die Feststellung der Richtungen dieser Spannkräfte, d. h. die Bestimmung, ob dieselben die Constructionstheile auf Zug oder Druck beanspruchen, ist immer leicht aus ihrer Drehungsrichtung zu bewirken. Beispielsweise sucht die Kraft K das abgeschnittene Stück in der Figur um den Punkt B rechtsum zu drehen, folglich muß die Kraft O im linksdrehenden Sinne auf das betrachtete Stück ACB wirken, d. h. Cc auf Druck beanspruchen. Ebenso findet in Bb ein Zug statt wegen des linksdrehenden Sinnes, welchen U in Bezug auf D haben muß, und BD wird auf Druck in Anspruch genommen, da die Kraft K um den Punkt F linksdrehend wirkt, folglich zum Gleichgewichte eine rechtsdrehende Spannung T in d erfordert.

Will man die unbekannten Spannkräfte auf graphischem Wege bestimmen, so ist die Ermittelung nicht minder einfach. Es sei wieder durch einen Schnitt bc, Fig. 223, ein Stück $ACBbdc$ von einem beliebigen Fachwerke

*) Elementare Theorie u. Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen von Aug. Ritter, 1863.

getrennt und die Resultirende aller äußeren Kräfte durch K dargestellt. Vier Kräfte, wie K, O, T und U können nur im Gleichgewichte sein, wenn irgend zwei von ihnen eine Mittelkraft geben, welche mit der Mittelkraft der beiden anderen in derselben Geraden gleich und entgegengesetzt ist. Denkt man sich daher die gegebene Kraft K mit einer der unbekannten Spannungen, z. B. O, zu einer Resultirenden zusammengesetzt, welche bekanntlich durch den Schnittpunkt o geht, so muß diese Resultirende auch den Durchschnitt B der beiden anderen Spannungen T und U in sich aufnehmen, da deren Mittel-

Fig. 223.

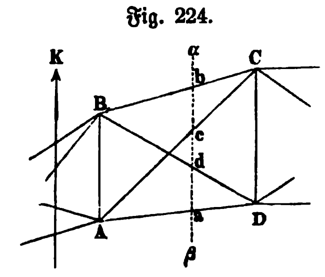


kraft durch diesen Punkt B geht, und beide Mittelkräfte nach dem eben Gesagten in einander fallen. Daraus ergiebt sich ohne Weiteres die folgende Construction. Man zerlegt K in zwei Seitenkräfte, von denen die eine in die Richtungslinie der zu suchenden Spannung, etwa O, hineinfällt, während die andere von dem Durchschnitte o dieser Spannung mit der gegebenen Kraft K nach dem Durchschnitte B der beiden anderen Spannungen T und U gerichtet ist. Trägt man beispielsweise von dem Durchschnittspunkte o zwischen K und O die Strecke $oK_1 = K$ auf, und zieht durch K_1 eine Parallele K_1B_1 zu oB, so erhält man in oB_1 die von K in dem Stücke CD erzeugte Kraft, welcher in der Schnittstelle c eine entgegengesetzte Kraft B_1o das Gleichgewicht hält, d. h. das Glied CD wird durch die Kraft $O = B_1o$ gedrückt. Das Dreieck oB_1K_1 liefert ferner in der dritten Seite B_1K_1 die andere Componente R_1, welcher die beiden Spannkräfte U und T das Gleichgewicht halten müssen; man hat daher nur nöthig, diese Kraft $B_1K_1 = R_1$ nach den Richtungen von U und T zu zerlegen, indem man durch K_1 eine Parallele mit BE und durch B_1 eine Parallele mit BD zieht. Man erhält dann $U = K_1B_2$ als eine in BE wirkende Zugspannung, während $T = B_2B_1$ als Druckspannung in der Strebe DB sich ergiebt. Man

gelangt natürlich zu denselben Resultaten, wenn man die Kraft K nach der Richtung von T oder U und der entsprechenden Verbindungslinie tF und bezw. uD zerlegt, in welchen Verbindungslinien zwei andere Mittelkräfte R_2 und R_3 wirken. Die betreffenden Constructionen sind in der Figur punktirt angegeben. Man wird natürlich in jedem einzelnen Falle die am bequemsten ausführbare Zerlegung vornehmen.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß das Fachwerk sich in zwei Theile durch einen Schnitt zerlegen lasse, welcher nur drei Constructionsglieder trifft. Diese Bedingung ist aber nicht immer erfüllt, es kommen vielmehr, wie die folgenden Beispiele zeigen werden, vielfach Constructionen vor, bei denen der Schnitt mehr als drei Glieder trennt. Wenn in einem solchen Falle, für welchen etwa n die Anzahl der Schnittstellen ist, die vorliegende Aufgabe zu bestimmten Werthen für die gesuchten Spannkräfte führen soll, so muß es möglich sein, durch anderweite Bedingungen die Spannungen in $n - 3$ Gliedern festzustellen, da durch die vorstehend angegebene Ermittelung immer nur die Feststellung von drei Bestimmungsstücken (Kraftgrößen) geschehen kann. Ist eine solche anderweite Feststellung der Spannungen in einzelnen Gliedern nicht möglich, so muß die Aufgabe überhaupt als unbestimmt angesehen werden. Ein solcher Fall liegt z. B. vor in Fig. 224, in welcher das Trapez $ABCD$ durch zwei diagonale Glieder AC und BD durchsetzt ist. Irgend ein durch dieses Trapez geführter Schnitt wie $\alpha\beta$ trifft vier Glieder in a, b, c, d und es ist klar, daß die drei allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte in einer Ebene unzureichend sind zur Bestimmung der vier unbekannten Kräfte an den Schnittstellen. Man würde demnach auch, wenn man etwa nach der obigen Methode der statischen Momente den Durchschnitt zweier der Kräfte als Momentenmittelpunkt annehmen wollte, eine Momentengleichung erhalten, welche noch die beiden anderen Kräfte als Unbekannte enthielte, folglich eine Bestimmung derselben nicht zuließe. Dieser Fall hat ein besonderes Interesse wegen seines häufigen Vorkommens bei Fachwerksträgern für Brücken, bei denen in Folge der Bewegung der Last gewisse Glieder abwechselnd gezogen und gedrückt werden. Wenn man in solchen Fällen die beiden Diagonalglieder AC und BD ihrer Anordnung zufolge mit der Fähigkeit begabt denkt, nur Zugkräften aber keinen Druckkräften widerstehen zu können, so wird dadurch die erwähnte Unbestimmtheit gehoben, indem diejenige Diagonale, von welcher bei der vorausgesetzten Belastungsart eine Druckwirkung erfordert würde, als

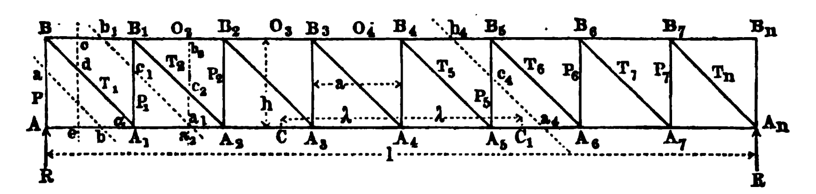
Fig. 224.



nicht vorhanden angesehen werden muß, und man es daher nur mit drei Gliedern zu thun hat, deren Spannungen nach dem Vorangehenden immer in bestimmter Art ermittelt werden können. Das Nähere über die Wirkung solcher sogenannter Gegenstreben wird in dem Nachfolgenden aus den einzelnen Beispielen sich ergeben, welche nunmehr näher ins Auge gefaßt werden sollen.

Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen. §. 54. Eine für Brückenbauten und ähnliche Ausführungen häufige Construction stellen die Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen, Parallelträger, dar. Ein solcher Träger besteht in seiner einfachsten Anordnung aus zwei horizontalen Streckbäumen oder Gurtungen AA_n und BB_n, Fig. 225, welche in

Fig. 225.



gleichen Abständen durch eine Anzahl verticaler Ständer oder Pfosten A_1B_1, A_2B_2 ... mit einander verbunden sind. In die so entstehenden rechteckigen Felder sind ferner diagonale Stangen A_1B, A_2B_1, A_3B_2 ... eingesetzt, welche Streben oder Bänder genannt werden, je nachdem sie gedrückt oder gezogen werden. Zwei solcher Träger, welche, an den Enden bei A und A_n auf festen Pfeilern aufruhend, parallel neben einander die zu überbrückende Oeffnung überspannen, tragen die Last der Brückenbahn in oben besprochener Art mit Hülfe von Querträgern, die in den unteren oder oberen Knotenpunkten A, A_1, A_2 ... bezw. B, B_1, B_2 ... auf den Hauptträgern aufruhen. Es möge zunächst eine Belastung der unteren Knotenpunkte A vorausgesetzt werden. Ist die ganze der Rechnung zu Grunde zu legende Spannweite oder horizontale Entfernung AA_n der beiden Stützen durch l ausgedrückt, so soll die Länge a jedes Trägerfeldes, bei n Feldern also $a = \frac{l}{n}$, als Einheit angenommen werden, indem die auf ein solches Feld entfallende totale Belastung durch q bezeichnet werde, welche sich zusammensetzt aus dem Eigengewichte p und der Verkehrslast k eines Brückenfeldes von der halben Breite der Brücke. Es ist ersichtlich, daß jeder Knotenpunkt zwischen den Stützen eine Belastung gleich q, dagegen jeder der Endpunkte A und A_n nur eine Belastung gleich $\frac{q}{2}$ empfängt, wenn, wie

zunächst angenommen werden soll, die ganze Brücke gleichförmig mit der Verkehrslast nk bedeckt ist. Für diesen Fall bestimmen sich die Druckkräfte auf die Stützen A und A_n und die denselben gleichen und entgegengesetzten Reactionen der Pfeiler zu je $\frac{nq}{2}$. Man kann indessen bemerken, daß von jeder Pfeilerreaction ein Theil gleich $\frac{q}{2}$ direct durch die in A und A_n wirkende Belastung im Gleichgewichte gehalten wird, so daß man sich vorzustellen hat, der Träger werde an jedem Ende durch eine vertical aufwärts gerichtete Reaction

$$R = \frac{n-1}{2} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

angegriffen. Diese Reactionen und die Belastungen q der $n-1$ zwischenliegenden Knotenpunkte sind daher als die einzigen äußeren Kräfte für den Träger anzusehen, wenn von der Einwirkung des Winddruckes abgesehen wird. Um die diesen äußeren Kräften das Gleichgewicht haltenden inneren Kräfte der einzelnen Fachwerksglieder zu bestimmen, denkt man sich in der im vorigen Paragraphen angegebenen Art den Träger an den entsprechenden Stellen durch Schnitte in zwei Theile zerlegt. Hiernach erhält man dann die Spannkräfte in folgender Art, wobei bemerkt werden soll, daß mit P die Kräfte in den Pfosten, mit T die in den Diagonalen und mit O die in den oberen, mit U die in den unteren Gurtungstheilen bezeichnet werden sollen.

Ein Schnitt nach ab schneidet von dem Träger das Dreieck aAb ab, auf welches als einzige äußere Kraft die Pfeilerreaction

$$R = \frac{n-1}{2} q$$

wirkt, welcher Kraft daher die in a wirkende Druckkraft

$$-R = -\frac{n-1}{2} q$$

das Gleichgewicht hält; mit anderen Worten, der Endpfosten AB wird durch eine Kraft

$$P = R = \frac{n-1}{2} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

auf Druck beansprucht. In dem Gurtungstheile AA_1 findet keinerlei Spannung statt, da eine horizontale Kraft nicht vorhanden ist, welche aufgehoben werden müßte.

Ein Schnitt nach cde liefert zwei Kräfte O_1 in c und T_1 in d, welche sich durch die Momentengleichungen in Bezug auf A_1 und B_1 als Drehpunkte bestimmen, und zwar folgt für A_1 als Momentenmittelpunkt:

$$R a + O_1 h = 0;\ O_1 = -R\frac{a}{h} = -\frac{a}{h}\frac{n-1}{2}q \ldots (3)$$

wenn mit h die verticale Entfernung der Schwerpunkte beider Gurtungen bezeichnet wird. Das negative Zeichen in (3) deutet darauf hin, daß die Spannkraft O_1 in c nach links gerichtet, die Gurtung $B B_1$ also gedrückt ist. In gleicher Weise erhält man für den Mittelpunkt der Momente in B_1:

$$R a = T_1 a \sin \alpha,$$

woraus

$$T_1 = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{n-1}{2 \sin \alpha} q \ldots \ldots (4)$$

folgt, wenn $\alpha = B A_1 A$ die Neigung der Diagonalen gegen den Horizont bedeutet.

Weiter ergiebt ein Schnitt $a_2 c_2 b_2$ für den Mittelpunkt der Momente in A_2 aus

$$R 2a - q a = O_2 h;\ O_2 = \frac{R 2a - q a}{h} = \frac{M_2}{h},$$

wenn man das Biegungsmoment des Balkens in A_2 $R 2a - q a$ mit M_2 bezeichnet, oder man hat allgemein

$$O_\nu = \frac{M_\nu}{h} \ldots \ldots \ldots (5)$$

Es ist ohne Weiteres klar, daß die Spannung U_2 in dem unteren Gurtungsstücke $A_1 A_2$ der Spannung O_1 in $B B_1$ der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist, wie man durch einen Schnitt nach $a_1 c_1 b_1$ erkennt, wenn man B_1 als Momentenmittelpunkt annimmt, wodurch man aus

$$R a = U_2 h;\ U_2 = R\frac{a}{h} = -O_1 = -\frac{M_1}{h}$$

erhält. Dies geht auch schon daraus hervor, daß von den fünf das Stück $A A_1 a_1 c_1 b_1 B$ angreifenden Kräften R, O_1, P_1, U_2 und q (in A_1) die beiden O_1 und U_2 horizontal, die übrigen drei vertical gerichtet sind, und aus dieser Betrachtung folgt daher auch für die Kraft P_1 in dem Pfosten $A_1 B_1$:

$$P_1 = R - q = V_1, \ldots \ldots \ldots (7)$$

wenn mit V_1 die verticale Scheerkraft in A_1 bezeichnet wird.

Da die letztere Betrachtung für jedes andere Balkenfeld, also z. B. für den Schnitt $a_4 c_4 b_4$, in gleicher Weise gilt, und man dafür

$$U_6 = -O_5 = -\frac{M_5}{h} \text{ und } P_5 = R - 5q = V_5$$

erhält, so kann man allgemein schreiben:

$$U_{\nu+1} = -O_\nu = \frac{M_\nu}{h} = q\,\frac{a}{h}\,\nu\,\frac{n-\nu}{2}\,^{*)}, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$P_\nu = R - \nu q = V_\nu = q\,\frac{n-1-2\nu}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Aus der Anstrengung der Pfosten ergiebt sich nun ohne Weiteres wieder die Spannkraft der Diagonalen, denn es ist klar, daß in irgend einem Knotenpunkte der **nicht belasteten** Gurtung, wie z. B. in B_5, die verticale Componente der Strebenkraft $T_6 \sin\alpha$ gerade gleich der Kraft P_5 in dem daselbst sich anschließenden Pfosten sein muß. Man hat daher

$$T_6 = \frac{P_5}{\sin\alpha},$$

oder allgemein

$$T_\nu = \frac{P_{\nu-1}}{\sin\alpha} = \frac{V_{\nu-1}}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Demgemäß erhält man nach (9) für das letzte Feld die Spannung im Pfosten $A_7 B_7$ zu

$$P_{n-1} = R - (n-1)\,q = -\frac{n-1}{2}\,q = -R,$$

während in dem Endpfosten $A_n B_n$ die Kraft gleich Null ist. Ebenso ist die Spannung in dem letzten Stücke der oberen Gurtung $B_7 B_n$ nach (5) gleich Null, während die Strebenkraft in $A_n B_7$ zu

$$T_n = \frac{P_7}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

sich ergiebt. Aus (5) und (8) erkennt man zunächst, daß die Spannung in den Gurtungen in der Mitte, wo das Moment M ein Maximum ist, den größten Werth und zwar oben links und unten rechts von dem mittleren Pfosten $A_4 B_4$ annimmt. Da ferner in diesem Pfosten die Verticalkraft V ihre Richtung umkehrt, indem dieselbe links von $A_4 B_4$ aufwärts und rechts von $A_4 B_4$ abwärts gerichtet ist, so folgt aus (9) und (10) auch ein entgegengesetzter Sinn für die Kräfte in den Pfosten und Streben zu beiden Seiten dieses mittleren Querschnittes. Während z. B. die Diagonale $A_4 B_3$ durch die Kraft

*) Das Biegungsmoment M_ν in dem um ν Felder vom Auflager entfernten Knotenpunkte bestimmt sich bei voller Belastung des Trägers zu

$$M_\nu = R\,\nu\,a - q\,[a + 2a + 3a + \cdots (\nu-1)\,a] = q\,\frac{n-1}{2}\,\nu\,a - q\,\frac{\nu-1}{2}\,\nu\,a$$

$$= q\,a\,\nu\,\frac{n-\nu}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8^a)$$

$$T_4 = \frac{R - 3q}{sin\,\alpha} = \frac{q}{2\,sin\,\alpha}$$

gezogen wird, ist die folgende Diagonale $A_5 B_4$ einer ebenso großen Druckkraft

$$T_5 = \frac{R_1 - 4q}{sin\,\alpha} = -\frac{q}{2\,sin\,\alpha} = -T_4$$

ausgesetzt. Der mittlere Pfosten $A_4 B_4$ wird durch die verticale Componente von T_5 mit $\frac{q}{2}$ gezogen, indem dieser Pfosten im Gleichgewichte ist, unter dem Einflusse der im unteren Knotenpunkte A_4 angreifenden Belastung q und der in A_4 und B_4 nach oben wirkenden gleichen verticalen Componenten der Diagonalspannungen T_4 und T_5, von denen diejenige von T_4 direct durch die Last q aufgenommen wird, während die Componente von T_5 erst durch Vermittelung des Pfostens auf den Lastpunkt übertragen wird, daher in dem Pfosten eine Spannung $\frac{q}{2}$ hervorruft. Wenn man annimmt, daß die Belastung q nicht in den unteren Knotenpunkten A, sondern in den oberen B angreift, so findet sich sogleich, daß dadurch in den Spannungen der einzelnen Fachwerksglieder nur insofern eine Aenderung eintritt, als jeder der inneren Pfosten noch außerdem einer zusätzlichen rückwirkenden Pressung im Betrage q ausgesetzt ist, während für die Endpfosten AB und $A_n B_n$ diese Vermehrung natürlich nur den Betrag $\frac{q}{2}$ hat. Demgemäß bestimmt sich z. B. in dem Pfosten AB die rückwirkende Pressung in dem Falle der Belastung des oberen Streckbaumes zu $P = R + \frac{q}{2} = \frac{n}{2}\,q$, während sie in dem letzten Stiele $A_n B_n$ nun nicht gleich Null, sondern gleich $\frac{q}{2}$ anzunehmen ist. Ebenso ist der mittlere Pfosten $A_4 B_4$ in diesem Falle nicht einer Zug-, sondern einer Druckspannung $\frac{q}{2}$ ausgesetzt. Für die Kräfte in den Gurtungen und Diagonalen jedoch macht es gar keinen Unterschied, ob der obere oder untere Streckbaum zur Aufnahme der Belastung dient, oder ob die Brückenbahn zwischen beiden an den verticalen Pfosten befestigt ist. In dem letzteren Falle gelten offenbar für die Pfostenstücke oberhalb der Fahrbahn diejenigen Spannungen, welche vorstehend unter Zugrundelegung einer Belastung des unteren Streckbaumes gefunden wurden, während für die unterhalb der Fahrbahn befindlichen Stücke der Pfosten für jeden inneren Stiel noch eine rückwirkende Pressung von q und für jeden Endstiel von $\frac{q}{2}$ hinzuzufügen ist, wie dies einer Belastung der oberen Gurtung entsprechen würde.

Aus dem Bemerkten ergiebt sich, daß bei der in der Figur angenommenen Anordnung die Stiele links von der Mitte gedrückt und rechts von der Mitte gezogen werden, und daß umgekehrt die Diagonalen links von der Mitte als Zugbänder und rechts von der Mitte als Druckstreben wirken, welches Verhalten man so ausdrücken kann, daß bei einem Träger wie der vorliegende ist, in jeder Hälfte die Diagonalen gezogen werden, wenn sie nach dem zugehörigen Stützpunkte hin ansteigen, dagegen einer Pressung unterliegen, wenn sie nach der Mitte hin, also von dem zugehörigen Stützpunkte weg, ansteigen.

Derjenige Querschnitt, in welchem dieser Wechsel zwischen Zug- und Druckkräften in den Pfosten und Diagonalen eintritt, ist nach dem Vorhergehenden dadurch charakterisirt, daß in ihm die Verticalkraft V ihr Zeichen ändert oder durch Null geht, also in ihm auch das größte Moment M_{max} stattfindet. Dieser Querschnitt ist in der Mitte des Trägers nur dann gelegen, wenn, wie im Vorstehenden immer vorausgesetzt wurde, der Balken über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist. Wenn man dagegen eine nur theilweise Beschwerung des Trägers durch die mobile Belastung annimmt, so fällt dieser Querschnitt des Maximalmomentes nicht mehr mit der Mitte zusammen. Es ist vielmehr in §. 36 gezeigt worden, daß bei dem Auffahren der mobilen Last auf den Träger etwa in der Richtung von A nach A_n, der gedachte Querschnitt für $V = 0$ oder $M = M_{max}$ aus der Trägermitte der ankommenden Last entgegengeht, bis er mit dem Anfangspunkte derselben in C in einem Abstande λ links von der Mitte zusammentrifft, um dann beim weiteren Fortschreiten der Last mit dieser zugleich nach der Mitte A_4 und über diese hinaus bis zum Abstande $\lambda = A_4 C_1$ sich zu bewegen und schließlich nach der Mitte zurückzukehren, sobald die ganze Trägerlänge mit der Last gleichmäßig bedeckt ist. Hieraus folgt daher, daß auch derjenige Querschnitt, in welchem ein Wechsel zwischen Zug- und Druckspannung der Füllungstheile eintritt, je nach der Bewegung der Last seine Lage innerhalb der Strecke $C C_1$ verändert, oder daß die Pfosten und Diagonalen zu jeder Seite der Mitte in einem Abstande λ ebensowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen werden.

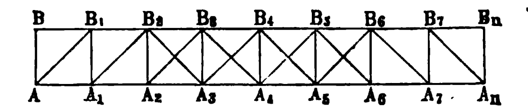
Einen derartigen Wechsel in der Anstrengung der Diagonalen bald auf Zug bald auf Druck muß man nun mit Rücksicht auf die Verbindungen in den Knotenpunkten thunlichst vermeiden, und man pflegt die Anordnung so zu treffen, daß sämmtliche Diagonalen entweder nur auf Druck oder nur auf Zug angesprochen werden können. Insbesondere pflegt man bei der Verwendung von Schmiedeeisen die Diagonalen immer so anzuordnen, daß sie als Bänder oder Zuganker zur Wirkung kommen, während man

bei hölzernen Fachwerksträgern die Diagonalen meist als Druckstreben zur Wirkung bringt. Um dies zu erreichen, hat man nur das vorstehend ausgesprochene Gesetz zu berücksichtigen, wonach die Diagonalen in jedem der beiden Theile, in welche der Träger durch den Querschnitt des Maximalmomentes getheilt wird, entweder gezogen oder gedrückt werden, je nachdem sie nach dem zugehörigen Auflager hin ansteigen oder abfallen. Sollen daher die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man sie nach Fig. 226 von dem unteren Knotenpunkte A_4 aus beiderseits nach den Auflagern hin

Fig. 226.

ansteigen zu lassen, wie $A_4 B_3$ und $A_4 B_5$, während eine Anordnung wie Fig. 227, bei welcher die Diagonalen von dem mittleren oberen Knotenpunkte nach den Auflagern hin abfallen, die Diagonalen als Druckstreben zur Wirkung bringt. Mit Rücksicht auf die angeführte, durch die Beweg-

Fig. 227.



lichkeit der Last erzeugte Verschiebung des Maximalmomentenquerschnitts aus der Mitte hat man daher, wenn die Diagonalen nur in einer Richtung widerstandsfähig sind, den mittleren Feldern bis zum Abstande λ zu jeder Seite der Mitte, Diagonalglieder nach beiden Richtungen, sogenannte Kreuz- oder Gegenstreben, zu geben, wie dies in den Figuren angedeutet ist. Selbstverständlich wird von diesen in den mittleren Feldern angeordneten gekreuzten Diagonalen immer nur die eine in Spannung versetzt, diejenige nämlich, in welcher eine solche Anstrengung (Zug oder Druck) hervorgerufen wird, gegen welche die Diagonalen vermöge ihrer Anordnung überhaupt nur reagiren können. Würde man annehmen müssen, daß diese Kreuzstangen eben so gut gegen Druck- wie Zugkräfte reagiren könnten, so würde nach dem im vorhergehenden Paragraphen Bemerkten die in jeder einzelnen Stange auftretende Kraft unbestimmt sein. Bei den schmiedeeisernen Fachwerken darf man annehmen, daß die Diagonalen von flacher bandförmiger Gestalt Druckkräften nicht zu widerstehen vermögen, indem sie zufolge ihrer größeren Länge einer seitlichen Ausbiegung unterworfen sind, weshalb man bei schmiedeeisernen Fachwerken solche Diagonalen als Zugbänder nach Fig. 226 anzuordnen hat. Bei hölzernen und gußeisernen,

zwischen die Gurtungen gespreizten Diagonalen sind dieselben wesentlich geeignet, Druckkräften zu widerstehen, und erfordern dieselben daher die durch Fig. 227 dargestellte Anordnung. Sollen schmiedeeiserne Fachwerksglieder, wie die oberen Gurtungstheile und Pfosten, druckfähig sein, so hat man natürlich denselben geeignete Querschnitte zu geben, welche vermöge ihrer Form die obgedachte seitliche Ausbiegung nicht zulassen, worüber später noch Näheres angegeben werden wird.

Die Anzahl der mittleren Felder, welche mit Gegenstreben zu versehen sind, findet man dadurch, daß man für das System einfacher, von der Mitte aus nach beiden Seiten gleichzeitig steigender (Schmiedeeisen) oder gleichzeitig abfallender (Holz, bezw. Gußeisen) Diagonalen in der sogleich zu besprechenden Weise die größte und die kleinste Anstrengung jeder Diagonale ermittelt und jedes Feld, für welches diese Anstrengungen entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, mit einer Gegenstrebe versieht. Man kann zu dieser Bestimmung auch durch Berechnung der in Fig. 225 mit λ bezeichneten Entfernung $A_4 C = A_4 C_1$ gelangen, um welche der Querschnitt des Maximalmomentes unter dem Einflusse der mobilen Last sich aus der Mitte verschiebt. Man findet diese Größe λ nach dem im §. 36 darüber Angeführten durch Gleichsetzung der beiden entgegengesetzten abscheerenden Kräfte, welche in C durch das Eigengewicht der ganzen Construction $l p$ und durch die bis zum Punkte C von A aus aufgefahrene mobile Last $\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) k$ erzeugt werden. Diese Bedingung liefert, wenn p und k die betreffenden Belastungen pro Längeneinheit vorstellen:

$$\frac{p l}{2} - p \left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = k \left(\frac{l}{2} - \lambda\right) \frac{\frac{l}{2} - \lambda}{2 l},$$

oder, wenn $\frac{l}{2} - \lambda = A C = A_n C_1 = c$ gesetzt wird:

$$c^2 + 2 \frac{p}{k} l c = \frac{p}{k} l^2.$$

Setzt man noch das Verhältniß

$$\frac{\text{Eigengewicht}}{\text{Verkehrslast}} = \frac{p}{k} = n,$$

so folgt aus der gefundenen Gleichung:

$$c = \left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = - n l + \sqrt{(n^2 + n) l^2}$$

$$= l \left(- n + \sqrt{n^2 + n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hieraus erhält man für:

$n = \frac{p}{k} =$	1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$c = \frac{l}{2} - \lambda =$	0,414 l	0,366 l	0,348 l	0,325 l	0,290 l	0,232 l
$\lambda =$	0,086 l	0,134 l	0,152 l	0,175 l	0,210 l	0,268 l

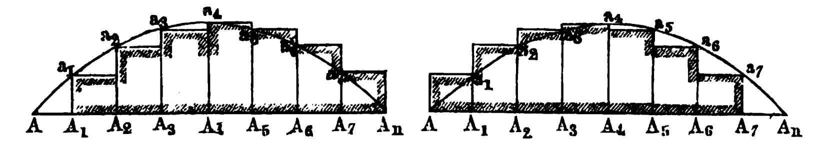
Hätte man z. B. für einen Träger von 30 m Spannweite $n = \frac{p}{k} = 0{,}3$, so würde $\lambda = 0{,}175 \,.\, 30 = 5{,}25$ m folgen, und wenn der ganze Träger in 10 Felder von je 3 m Länge abgetheilt wäre, so müßten auf jeder Seite von der Mitte zwei, also im Ganzen vier Felder mit Gegenstreben versehen werden.

Bisher wurde immer eine volle Belastung des Trägers über seine ganze Länge angenommen und es bleibt daher noch zu untersuchen, ob dieser Belastungszustand auch der ungünstigste ist, welchem die größte Anstrengung der einzelnen Fachwerksglieder entspricht. In Betreff der Gurtungen ist dies allerdings der Fall, denn da nach (8) an irgend einem Pfosten A_ν die Spannung der rechts unten bezw. links oben sich anschließenden Gurtung

$$U_{\nu+1} = O_\nu = \frac{1}{h} M_\nu,$$

ist, und da nach §. 36 das Biegungsmoment M in irgend einem Querschnitte seinen absolut größten Werth bei der vollen Belastung des Balkens erreicht, so folgt, daß die Gurtungen in allen Querschnitten ihre größten Spannungen bei voller Belastung des ganzen Trägers annehmen. Man kann daher die in §. 36 für die größten Momente angegebene Parabel ebenfalls als eine Darstellung für die Spannkräfte in den Gurtungen und für die den Gurtungen zu gebenden Querschnitte ansehen. Wenn man nämlich in den Figuren 228 und 229 über

Fig. 228. Fig. 229.



$A A_n = l$ die Parabeln aufträgt, für welche die Ordinaten in den Knotenpunkten $A, A_1, A_2 \ldots$ gleich den zugehörigen Momenten M, M_1, M_2 des Fachwerksträgers, Fig. 225, bei voller Belastung sind, so ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Ordinaten, z. B. $A_3 a_3$, auch ein Maß

abgiebt für die Spannung also den Querschnitt der unteren Gurtung in dem Felde rechts von $A_3 B_3$ und der oberen Gurtung in dem Felde links von $A_3 B_3$, weil nach (8)

$$U_4 = O_3 = \frac{1}{h} M_3 \text{ ist.}$$

Wenn man daher annimmt, daß die Querschnitte der Gurtungen, die innerhalb der einzelnen Felder constant sein müssen, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt sich den daselbst auftretenden Spannungen gemäß ändern, so erkennt man, daß durch die schraffirten, aus einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Flächen in Fig. 228 der Materialaufwand der unteren und in Fig. 229 derjenige der oberen Gurtung graphisch veranschaulicht wird.

In Betreff der Anstrengungen, welchen die Füllungsglieder, die Pfosten und Diagonalen, ausgesetzt sind, erkennt man aus (9) und (10), daß diese mit der Verticalkraft V proportionalen Anstrengungen P und T ihre äußersten Werthe gleichzeitig mit den größten und kleinsten Werthen der Verticalkraft V annehmen. Nun ist aber in §. 36 gezeigt worden, daß in irgend einem Querschnitte die Verticalkraft V den größten positiven Werth annimmt, wenn die ganze Strecke zwischen diesem Querschnitte und dem jenseitigen Stützpunkte mit der beweglichen Last bedeckt ist, während der größte negative Werth von V sich einstellt, wenn die Strecke zwischen dem Querschnitte und dem diesseitigen Stützpunkte belastet ist. Will man also für irgend einen Knotenpunkt, z. B. für A_3, Fig. 225, die größte positive oder aufwärts gerichtete Verticalkraft V_{max} finden, so hat man die Strecke $A_3 A_n$ als mit der mobilen Belastung bedeckt anzunehmen, und nach den bekannten Regeln die Scheerkraft in diesem Querschnitte als die aus der Gesammtbelastung des Trägers resultirende Auflagerreaction in A, vermindert um das Eigengewicht des Stückes $A A_3$ zu bestimmen. Ebenso findet man die kleinste Schubkraft für A_3 unter der Annahme, daß die bewegliche Last die Strecke von A bis A_3 bedeckt.

Für das νte Feld, von dem Auflager A an gerechnet, findet man demnach die äußersten Scheerkräfte:

$$V_{\nu\,max} = R_\nu - (\nu - 1)\,p = \frac{n-1}{2}\,p + \frac{1 + 2 + \cdots n - \nu}{n}\,k$$

$$- (\nu - 1)\,p = \frac{n - 2\nu + 1}{2}\,p + \frac{n-\nu}{n}\,\frac{n - \nu + 1}{2}\,k\,. \quad (12)$$

und

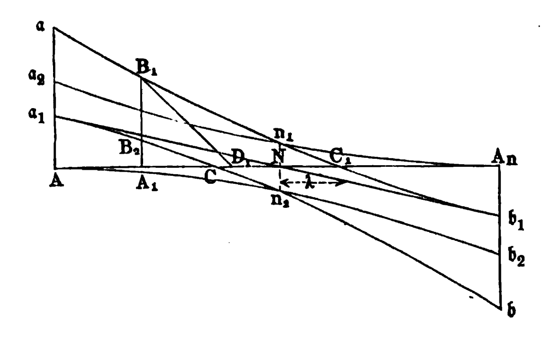
$$V_{\nu\,min} = R_\nu - (\nu - 1)\,q = \frac{n-1}{2}\,p + \frac{n - 1 + n - 2 + \cdots n - \nu + 1}{n}\,k$$

$$- (\nu - 1)\,p - (\nu - 1)\,k = \frac{n - 2\nu + 1}{2}\,p - \nu\,\frac{\nu - 1}{2n}\,k\,.\,. \quad (13)$$

Aus diesen Grenzwerthen der Scheerkraft V findet man daher nach (9) und (10) die äußersten Inanspruchnahmen P der Pfosten und T der Diagonalen.

Nach dem in §. 36 über die Maxima und Minima der verticalen Scheerkräfte Angeführten ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der Füllungsglieder graphisch zu veranschaulichen. Trägt man nämlich auf einer Axe $AA_n = l$, Fig. 230, die Strecke $A\,a_1 = A_n\,b_1 = p\,\frac{l}{2}$ ab und zieht die Gerade $a_1 N b_1$, so erhält man in dieser das Diagramm für die aus dem Eigengewichte herrührenden Scheerkräfte. Ferner erhält man die Begrenzung

Fig. 230.



der maximalen Schubkräfte, welche durch die mobile Belastung k erzeugt werden, in den beiden Parabeln $a_2 n_1 A_n$ und $A n_2 b_2$, die ihren Scheitel bezw. in A_n und A haben, und deren zur Scheiteltangente AA_n senkrechte Ordinaten $A\,a_2 = A_n\,b_2 = k\,\frac{l}{2}$ sind. Eine Vereinigung dieser beiden Diagramme für p und k durch Addition der Ordinaten führt dann zu den beiden Curven $a\,C_1\,b_1$ und $a_1\,C\,b$ derart, daß $a\,C_1\,b_1$ den größten und $a_1\,C\,b$ den kleinsten Schubkräften entspricht. Zeichnet man auf der Axe AA_n die den Knotenpunkten $A_1, A_2 \ldots$ entsprechenden Ordinaten, so findet man für jeden Knotenpunkt wie A_1 zwei verschiedene Schubkräfte $A_1 B_1$ und $A_1 B_2$. Von diesen ist die größere $A_1 B_2$ der Dimensionirung des Pfostens zu Grunde zu legen. Zieht man dann noch durch B_1 eine Gerade $B_1 D_1$ unter dem Neigungswinkel α der Diagonalen gegen die Horizontale, so giebt $B_1 D_1$ das Maß für die in der Diagonale wirkende Kraft $\frac{V}{sin\,\alpha}$, welche von dem unbelasteten Knotenpunkte des Pfostens $A_1 B_1$ ausgeht. Das Diagramm giebt in der Strecke $C\,C_1$ zwischen den Durchschnittspunkten der Axe mit den beiden Curven der maximalen Schubkraft

ebenfalls die Länge 2λ in der Mitte des Trägers, für welche Gegenstreben anzuordnen sind, da in dieser Strecke die beiden gedachten Schubkräfte entgegengesetzte Vorzeichen annehmen.

Nach dem Vorstehenden ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der einzelnen Glieder des Fachwerkes aus der Construction eines einfachen Kräftepolygons zu entnehmen. Nimmt man wieder volle Belastung des Trägers, Fig. 225, an, und trägt in Fig. 231 und 232 auf einer Verticallinie von o bis q_8 die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte gleich

$$\frac{q}{2}, q, q \cdots \frac{q}{2}$$

auf, zieht durch die Mitte a dieser Kraftlinie die Horizontale $a a_4$ und zerlegt nun die einzelnen Verticalkräfte horizontal und nach der Richtung der Diagonalen z. B. $a q$ in $a a_1$ und $a_1 q$, $a q_1 = a_1 b_1$ in $a_1 a_2$ und $a_2 b_1$ u. s. f., so erhält man das Diagramm in Fig. 231, wenn die unteren Knotenpunkte belastet sind, während Fig. 232 für die Anordnung gilt, bei der die Fahrbahn auf der oberen Gurtung ruht. Die Vergleichung der in die einzelnen Strecken eingetragenen Bezeichnung mit der übereinstimmenden in Fig. 225 läßt ohne Schwierigkeit die Anstrengung jedes einzelnen Gliedes bei voller Belastung erkennen. Will man dann auch

Fig. 231.

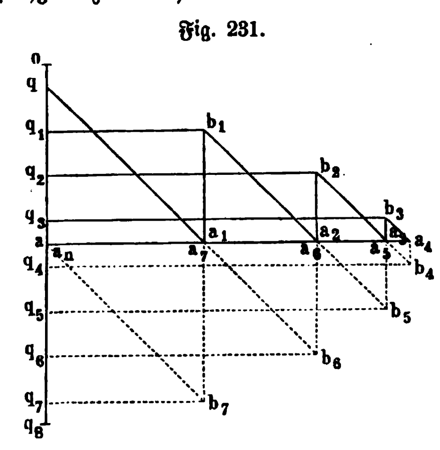
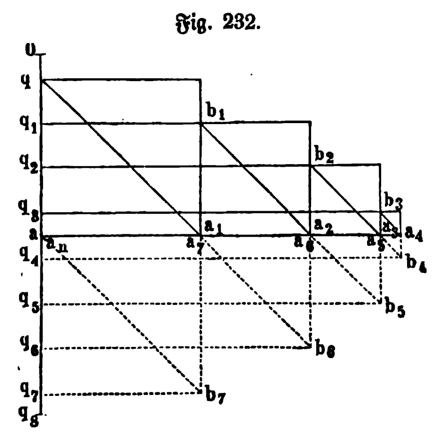


Fig. 232.



die größten Spannungen der Pfosten und Diagonalen bei theilweiser Belastung kennen lernen, so kann in der vorgedachten Weise die Fig. 230 hierzu dienen, wenn man in derselben die Verticalkraft A a in den Auflagern gleich $a q = a q_7$ der Figuren 231 und 232 macht, u. s. f.

Das hier erörterte Fachwerksystem mit rechtwinkeligen Dreiecken und Zugstreben heißt das Mohnié'sche; bei dem Howe'schen Systeme wirken

die Diagonalen als Druckstreben. Die Höhe h derartiger Träger pflegt man in der Praxis etwa gleich $1/_{10}$ der Spannweite l zu wählen, und den Diagonalen meist eine Neigung unter 45^0 gegen den Horizont zu geben, da sich leicht zeigen läßt, daß bei einer solchen Neigung der Diagonalen der Materialaufwand verhältnißmäßig am geringsten ausfällt. Nimmt man $\alpha = 45^0$ und $h = 1/_{10}\,l$, so erhält man die Anzahl der Felder gleich 10.

Beispiel. Für einen Fachwerksträger von 30 m Länge und 3 m Höhe zwischen den parallelen Gurtungen, welcher in 10 quadratische Felder abgetheilt ist, sollen die Spannungen der Glieder ermittelt werden, wenn das Eigengewicht der ganzen Brückenconstruction pro laufenden Meter mit 2 Tonnen und die Verkehrslast des Geleises mit 6 Tonnen angenommen wird.

Da das Gewicht der Brückenbahn auf zwei Träger sich vertheilt, so erhält man für jeden Knotenpunkt

$$p = \frac{1}{2}\, 3\,.\,2 = 3 \text{ Tonnen}$$

und

$$k = \frac{1}{2}\, 3\,.\,6 = 9 \text{ Tonnen}$$

also $q = 12$ Tonnen.

Legt man zunächst die Figur 233 zu Grunde, so findet man für die volle Belastung des Trägers die Spannungen in den Gurtungstheilen, wenn man in (8) für ν die Werthe 1 bis 9 einsetzt, zu:

$$O_1 = U_2 = q\,\frac{a}{h}\,\nu\,\frac{n-\nu}{2} = 12\,\frac{3}{3}\,1\,\frac{10-1}{2} = 54 \text{ Tonnen,}$$

$$O_2 = U_3 = 12\,.\,2\,\frac{8}{2} = 96 \text{ Tonnen,}$$

$$O_3 = U_4 = 12\,.\,3\,\frac{7}{2} = 126 \text{ Tonnen,}$$

$$O_4 = U_5 = 12\,.\,4\,\frac{6}{2} = 144 \text{ Tonnen,}$$

$$O_5 = U_6 = 12\,.\,5\,\frac{5}{2} = 150 \text{ Tonnen,}$$

$$O_6 = U_7 = 12\,.\,6\,\frac{4}{2} = 144 \text{ Tonnen} = O_4 = U_5,$$

$$O_7 = U_8 = 12\,.\,7\,\frac{3}{2} = 126 \text{ Tonnen} = O_3 = U_4,$$

$$O_8 = U_9 = 12\,.\,8\,\frac{2}{2} = 96 \text{ Tonnen} = O_2 = U_3,$$

$$O_9 = U_{10} = 12\,.\,9\,\frac{1}{2} = 54 \text{ Tonnen} = O_1 = U_3,$$

Die Spannungen U_1 und O_{10} sind Null. Die äußersten Spannungen der Diagonalen finden sich aus den nach (12) und (13) zu ermittelnden Werthen von V_{max} und V_{min}.

Es möge entsprechend wie früher hinsichtlich der Schubkraft das positive Zeichen einer aufwärts gerichteten Kraft, also bei den Diagonalen in der Figur einer Zugkraft gegeben werden, so daß ein negatives Resultat eine Druckkraft andeutet. Man erhält, da hier

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$$

ist, dann die Strebenkräfte

$$T = \frac{V}{\sin\alpha} = V\sqrt{2} = 1{,}414\,V.$$

Nimmt man ferner eine Belastung der unteren Gurtungen an, so folgt für das erste Feld mit $\nu = 1$:

$$V_{1max} = \frac{n-2\nu+1}{2}p + \frac{n-\nu}{n}\frac{n-\nu+1}{2}k = \frac{9}{2}3 + \frac{9}{10}\frac{10}{2}9 = +54\,\text{t} = P_{max};$$

$$T_{1max} = 1{,}414 . 54 = +76{,}36\ \text{t}.$$

$$V_{1min} = \frac{n-2\nu+1}{2}p - \nu\frac{\nu-1}{2n}k = \frac{9}{2}3 - 0 = +13{,}5 = P_{min};$$

$$T_{1min} = 1{,}414 . 13{,}5 = +19{,}09\ \text{t}.$$

Ebenso für die übrigen Felder

$$V_{2max} = \frac{7}{2}3 + \frac{8}{10}\frac{9}{2}9 = +42{,}9 = P_{1max}; \qquad T_{2max} = +60{,}66\ \text{t}.$$

$$V_{2min} = \frac{7}{2}3 - 2\frac{1}{20}9 = +9{,}6 = P_{1min}; \qquad T_{2min} = +13{,}57\ \text{t}.$$

$$V_{3max} = \frac{5}{2}3 + \frac{7}{10}\frac{8}{2}9 = +32{,}7 = P_{2max}; \qquad T_{3max} = +46{,}24\ \text{t}.$$

$$V_{3min} = \frac{5}{2}3 - 3\frac{2}{20}9 = +4{,}8 = P_{2min}; \qquad T_{3min} = +6{,}79\ \text{t}.$$

$$V_{4max} = \frac{3}{2}3 + \frac{6}{10}\frac{7}{2}9 = +23{,}4 = P_{3max}; \qquad T_{4max} = +33{,}08\ \text{t}.$$

$$V_{4min} = \frac{3}{2}3 - 4\frac{3}{20}9 = -0{,}9 = P_{3min}; \qquad T_{4min} = -1{,}27\ \text{t}.$$

$$V_{5max} = \frac{1}{2}3 + \frac{5}{10}\frac{6}{2}9 = +15 = P_{4max}; \qquad T_{5max} = +21{,}21\ \text{t}.$$

$$V_{5min} = \frac{1}{2}3 - 5\frac{4}{20}9 = -7{,}5 = P_{4min}; \qquad T_{5min} = -10{,}60\ \text{t}.$$

$$V_{6max} = -\frac{1}{2}3 + \frac{4}{10}\frac{5}{2}9 = +7{,}5 = P_{5max}; \qquad T_{6max} = +10{,}60\ \text{t}.$$

$$V_{6min} = -\frac{1}{2}3 - 6\frac{5}{20}9 = -15 = P_{5min}; \qquad T_{6min} = -21{,}21\ \text{t}.$$

$$V_{7max} = -\frac{3}{2}3 + \frac{3}{10}\frac{4}{2}9 = +0{,}9 = P_{6max}; \qquad T_{7max} = +1{,}27\ \text{t}.$$

$$V_{7min} = -\frac{3}{2}3 - 7\frac{6}{20}9 = -23{,}4 = P_{6min}; \qquad T_{7min} = -33{,}08\ \text{t}.$$

$$V_{8max} = -\frac{5}{2}3 + \frac{2}{10}\frac{3}{2}9 = -4{,}8 = P_{7max}; \quad T_{8max} = -6{,}79 \text{ t.}$$

$$V_{8min} = -\frac{5}{2}3 - 8\frac{7}{20}9 = -32{,}7 = P_{7min}; \quad T_{8min} = -46{,}24 \text{ t.}$$

$$V_{9max} = -\frac{7}{2}3 + \frac{1}{10}\frac{2}{2}9 = -9{,}6 = P_{8max}; \quad T_{9max} = -13{,}57 \text{ t.}$$

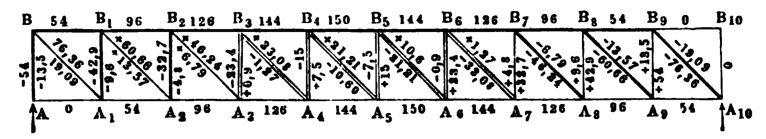
$$V_{9min} = -\frac{7}{2}3 - 9\frac{8}{20}9 = -42{,}9 = P_{8min}; \quad T_{9min} = -60{,}66 \text{ t.}$$

$$V_{10max} = -\frac{9}{2}3 + 0 = -13{,}5 = P_{9max}; \quad T_{10max} = -19{,}09 \text{ t.}$$

$$V_{10min} = -\frac{9}{2}3 + 10\frac{9}{20}9 = -54 = P_{9min}; \quad T_{10min} = -76{,}36 \text{ t.}$$

Diese Zahlen, welche in die Fig. 233 eingetragen sind, zeigen, daß bei der dieser Figur entsprechenden Anordnung der Diagonalen die letzteren in den linken drei Endfeldern $A - A_3$ nur gezogen, in den rechtsliegenden drei Feldern $A_7 - A_{10}$ nur gedrückt und in den Mittelfeldern abwechselnd gedrückt

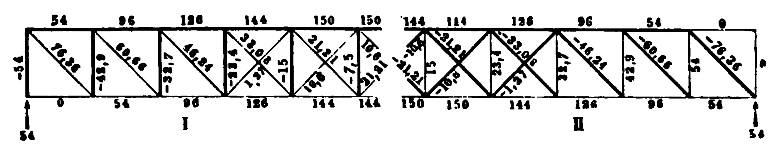
Fig. 233.



und gezogen werden, wie dies in der Figur durch schwache, starke und doppelte Linien angedeutet ist. Demgemäß werden auch die vier mittleren Stiele A_3, A_4, A_5, A_6 sowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen, während die Stiele links A, A_1, A_2 nur gedrückt, diejenigen rechts A_7, A_8, A_9 nur gezogen werden. Will man daher den Träger so ausführen, daß die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man dieselben von der Mitte aus zu beiden Seiten nach den Auflagern hin ansteigen zu lassen, also der linken Trägerhälfte Diagonalen, wie in Fig. 233 gerichtet, zu geben, dagegen für die rechte Hälfte des Trägers die Diagonalen nach der Richtung $A_5 B_6$, $A_6 B_7$ u. s. w. zu stellen. Es ist dann leicht ersichtlich, daß die Spannungszahlen der Fig. 233 in den drei Feldern rechts mit umgekehrten Zeichen für die so angeordneten Diagonalen gültig sein werden, z. B. wird die in dem neunten Felde angebrachte Diagonale $A_8 B_9$ die entgegengesetzten Spannungen von denjenigen in $A_9 B_8$, d. h. also genau dieselben Spannungen auszuüben haben, wie die Diagonale $A_2 B_1$ im zweiten Felde, wie dies auch schon aus der Symmetrie der nunmehr angewandten Trägerform sich ergiebt. In den mittleren Feldern wird man dann gekreuzte Diagonalen anordnen, und es ist ebenfalls klar, daß z. B. die im fünften Felde in der Richtung $A_4 B_5$ angebrachte Gegenstrebe diejenige Zugkraft 10,60 Tonn. ausüben wird, welche ohne diese Gegenstrebe von der einfachen Strebe $A_5 B_4$ als Druckkraft geäußert werden müßte. In Folge einer solchen Anordnung des Trägers, von welchem in Fig. 234 I (a. f. S.) eine Hälfte gezeichnet ist, werden die Diagonalen in allen Feldern nur durch Zugkräfte in Anspruch genommen, und es ist klar, daß in Folge dessen die Stiele nur gedrückt, niemals gezogen werden können. Letzteres erkennt man sofort, wenn man den Kopf eines Stieles,

d. h. den oberen Knotenpunkt ins Auge faßt, auf welchen durch die Diagonalen nur abwärts gerichtete Kräfte ausgeübt werden.

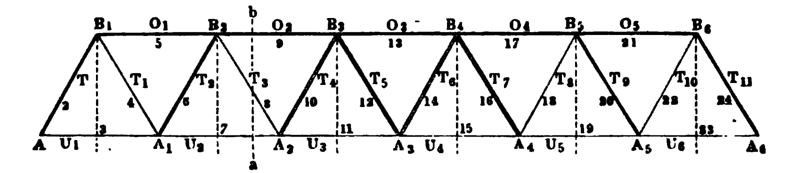
Fig. 234.



In gleicher Weise stellt Fig. 234 II die Anordnung von der Hälfte eines Trägers vor, in welchem die Diagonalen nur gegen Druckkräfte widerstandsfähig sind, in Folge dessen daselbst also die Stiele nur gezogen werden können. Die in Fig. 234 eingetragenen Spannungszahlen lassen sich ohne Weiteres aus Fig. 233 entnehmen.

§. 55. **Zusammengesetzte Fachwerksträger.** Wenn die Füllungsglieder zwischen den Gurtungen des Fachwerksträgers nicht nach rechtwinkeligen, sondern nach anderen, etwa nach gleichschenkeligen Dreiecken angeordnet sind, wie dies bei dem Neville'schen Systeme, Fig. 235, der Fall ist, so ändert sich die Untersuchung nicht wesentlich. Nimmt man etwa an, der Träger sei in den unteren Knotenpunkten belastet, und setzt zur Bestim-

Fig. 235.



mung der Spannungen in den Gurtungen die ganze Länge l des Trägers belastet voraus, so erhält man für irgend einen Schnitt ab die Spannung in der oberen Gurtung, wenn man A_2 als Mittelpunkt für die Momente annimmt, zu

$$O_2 = \frac{1}{h}(R.2a - qa),$$

und ebenso für den Mittelpunkt B_2 die Spannung der unteren Gurtung zwischen A_1 und A_2 zu:

$$U_2 = \frac{1}{h}\left(R_1 \frac{3}{2}a - q\frac{a}{2}\right),$$

also allgemein die Spannung in einem Gurtungsstücke

$$S = \frac{1}{h}M, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn M das Moment der äußeren Kräfte für den dem betreffenden Stücke

gegenüber liegenden Knotenpunkt der anderen Gurtung bedeutet. Ebenso findet man die Spannung T in irgend einem Zwischenstück wie $A_2 B_2$ dadurch, daß für dieselbe die Verticalcomponente gleich der verticalen Scheerkraft V des Trägers in dem betreffenden zwischen den Endpunkten der Diagonale A_2 und B_2 gelegenen Trägertheile sein muß, zu

$$T = \frac{V}{sin\ \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es ist klar, daß auch hier für jedes der beiden Stücke, in welche der Träger durch den Maximalmomentenquerschnitt ($V = 0$) getheilt wird, das Gesetz gilt, wonach ein Zwischenglied gezogen oder gedrückt wird, je nachdem es in der Richtung von diesem Querschnitte aus nach dem zugehörigen Auflager hin ansteigt oder abfällt. Hieraus geht weiter hervor, daß die beiden Streben, welche von dem in diesem Grenzquerschnitte ($V = 0$) gelegenen Knotenpunkte nach beiden Seiten hin ausgehen, jederzeit gleichartigen Spannungen, Zug oder Druck, unterworfen sind, wie dies bei der vollen Belastung mit den mittleren Gliedern in der Figur $A_3 B_3$ und $A_3 B_4$ der Fall ist, während in allen übrigen Knotenpunkten Zug- und Druckstreben abwechseln. Ebenso ist es klar, daß in denjenigen Gliedern ein Wechsel zwischen Druck und Zug sich einstellen wird, welche innerhalb der mittleren Strecke gelegen sind, um welche in Folge der Bewegung der Last der Maximalmomentenquerschnitt sich verschiebt. In diesen Beziehungen gelten daher die im vorhergehenden Paragraphen angeführten Bemerkungen.

Fig. 236.

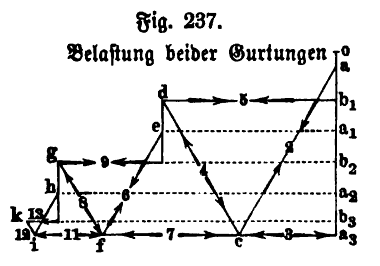
Um die Spannungen der einzelnen Glieder für volle Belastung durch die Zeichnung zu finden, trägt man nach Fig. 236 auf der verticalen Kräftelinie $o a_3$ nach einander die Belastungen $\frac{q}{2} = oa$ in A, $q = a a_1$ in A_1, $q = a_1 a_2$ in A_2 und $\frac{q}{2} = a_2 a_3$ als die halbe Belastung des mittleren Knotenpunktes A_3 auf, zieht durch a_3 die Horizontale $a_3 i$, und durch a eine Parallele zur Strebe $A B_1$, welche in $a_3 c$ die Zugkraft der unteren Gurtung $A A_1$ und in $c a$ die Druckkraft in der Strebe $A B_1$ liefert. Letztere Kraft zerlegt sich dann in $d a$ horizontal als Gurtungspressung in $B_1 B_2$ und den Diagonalzug $c d$ in $B_1 A_1$. Setzt man diese letztere Kraft $c d$ mit der Belastung $q = d e$ in A_1 zusammen zur Mittelkraft $c e$, so erhält man durch Zerlegung dieser horizontal in $c f$ und parallel mit $A_1 B_2$ in $f e$ die Kräfte in $A_1 A_2$ und $A_1 B_2$ u. s. w. Aus der Figur, in welcher die Span-

nungen mit denselben Ziffern bezeichnet sind wie die correspondirenden Glieder in Fig. 235, ist die Construction für die Hälfte des Trägers ersichtlich; die Spannungen in den entsprechenden Gliedern der anderen Balkenhälfte sind wegen der symmetrischen Anordnung von derselben Größe.

Man kann den Träger, Fig. 235, auch leicht so einrichten, daß beide Gurtungen gleichmäßig durch die Fahrbahn belastet werden, wenn man an den oberen Knotenpunkten B verticale Hängeschienen anbringt, von denen jede einen Querträger trägt. Hierdurch wird die Entfernung der letzteren auf die halbe Größe $\frac{a}{2}$ reducirt, und die Belastung jedes inneren Knotenpunktes der oberen wie der unteren Gurtung beträgt nur $\frac{q}{2}$, während die äußeren Knoten A und A_6 mit $\frac{q}{4}$ belastet sind. Bei dieser Anordnung ist die Berechnung der Spannungen der einzelnen Glieder in derselben Weise, wie vorstehend, vorzunehmen, indem man zu beachten hat, daß die verticalen Hängestangen keine eigentlichen Fachwerksglieder sind, dieselben vielmehr nur dazu dienen, die Belastungen $\frac{q}{2}$ auf die oberen Knotenpunkte zu übertragen, daher jede auch nur mit dieser Kraft gezogen, niemals aber einer Druckkraft ausgesetzt wird. Um für diesen Träger den Kräfteplan zu zeichnen, hat man daher nach Fig. 237 auf der verticalen Kräftelinie $o a_3$ die Belastungen

Fig. 237.

Belastung beider Gurtungen



$$o a = \frac{1}{4} q, \; a b_1 = b_1 a_1 = a_1 b_2 = b_2 a_2 = a_2 b_3 = \frac{1}{2} q \text{ und}$$

$$b_3 a_3 = \frac{1}{4} q$$

als die halbe Belastung von A_3 anzutragen, und nun in der angegebenen Weise die Kräfte durch Parallelen mit den Gurtungen und Diagonalen zu zerlegen. Auf diese Weise erhält man für jede Trägerhälfte in $o a a_3 c d e f g h i k$ den Kräfteplan für die volle Belastung des Trägers, und es sind mit Rücksicht auf die in den Figuren 235 und 237 übereinstimmende Nummerirung diese Constructionen ohne weitere Erläuterung klar. Die so gefundenen Spannungen geben, wie schon mehrfach bemerkt, für die Gurtungen die größten Anstrengungen, während man die äußersten Zug- oder Druckspannungen in den Streben in der oben besprochenen Art durch Rechnung nach (2) oder durch die Zeichnung nach Fig. 230 zu ermitteln hat. Es ist klar,

daß bei diesem Trägersysteme die Diagonalen des mittleren Theiles ebensowohl gegen Zug- wie Druckkräfte widerstandsfähig sein müssen.

Wenn man nach den Figuren 238 und 239 zwei Träger für dieselbe Spannweite AA_6 und von gleicher Höhe nach dem Neville'schen Systeme

Fig. 238.

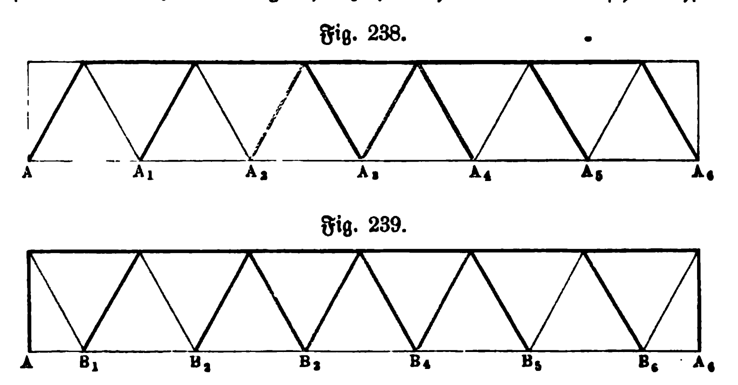
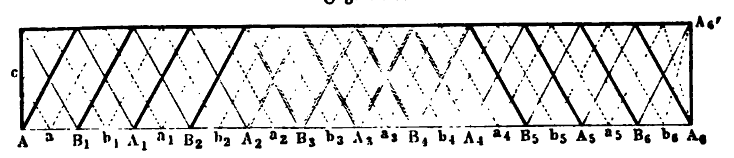


Fig. 239.

derart construirt denkt, daß die Knotenpunkte der Gurtungen beider Träger gegen einander um die halbe Fachlänge $\frac{a}{2}$ versetzt sind, so werden diese Träger sich in derselben Art berechnen lassen, und der Unterschied in der Anstrengung der Diagonalen wird nur darin beruhen, daß bei der vollen Trägerbelastung in Fig. 238 in der Mitte zwei Zugbänder, dagegen in Fig. 239 zwei Druckstreben zusammenstoßen. In den Figuren sind die gedrückten Streben durch stärkere Linien angedeutet als die durch schwache Linien dargestellten Zugbänder, während durch Doppellinien die abwechselnde Beanspruchung durch Zug oder Druck angedeutet ist.

Denkt man sich nun beide Träger zu einem einzigen nach Fig. 240 vereinigt, so erhält man ein zusammengesetztes Fachwerk, bei welchem jede

Fig. 240.



der Gurtungen mit doppelt so vielen Knotenpunkten behaftet ist, als bei den einfachen Trägern der Figuren 238 und 239. Man wendet derartige mehrfache Fachwerke bei langen und hohen Trägern an, für welche bei dem einfachen Systeme die Weite der Felder eine zu große werden, daher sehr schwere Hülfsträger zur Herstellung der Fahrbahn bedingen würde.

Man kann auch, falls die Entfernung der Knotenpunkte noch zu groß ist, die Vereinigung einer größeren Anzahl von einfachen Trägern vornehmen, und man würde z. B. ein vierfaches System erhalten, wenn man in den Mitten zwischen den Streben der Fig. 240 noch andere, nach den punktirt gezeichneten Linien einlegen würde. Jedenfalls muß dafür Sorge getragen werden, daß die Last in allen Knotenpunkten einer bezw. beider Gurtungen angreift, wie es im Eingange des §. 53 als Bedingung für alle Fachwerke angegeben wurde. Wollte man beispielsweise nur in den Knotenpunkten A, B_1, A_2, B_2 ... die Querträger der Fahrbahn anhängen, dagegen die Knotenpunkte a und b unbelastet lassen, so würden durch die Spannungen der in a, b_1, a_2 ... sich anschließenden Diagonalen die Gurtungstheile AB_1, B_1A_1, A_1B_2 ... auf Biegung in Anspruch genommen werden. Abgesehen davon, daß eine solche Beanspruchung der Theile durch transversale Kräfte eine möglichste Ausnutzung des Materials nicht gestattet, würde es auch nicht möglich sein, die Anstrengungen der einzelnen Fachwerksglieder mit Zuverlässigkeit festzustellen. Diese letztere Feststellung wird aber bei einem reinen Fachwerke von der in §. 53 geforderten Bedingung, dessen sämmtliche Glieder nur Längenanstrengungen ausgesetzt sind, keinen Schwierigkeiten unterliegen. Man hat nur, wenn das Fachwerk etwa ein $m$faches, d. h. ein aus m einfachen Systemen zusammengesetztes ist, jedes einzelne Fachwerk als durch den $m$ten Theil der Last beansprucht nach dem Vorstehenden zu untersuchen, um die in den einzelnen Diagonalen wirkenden Kräfte zu erhalten, während natürlich in jedem Querschnitte der Gurtungen die Summe aller derjenigen Spannungen wirksam ist, welche für diesen Punkt aus allen einzelnen Systemen resultirt. Ein näheres Eingehen auf dieses Verfahren, welches im Vorstehenden hinreichend erläutert sein dürfte, soll hier unterbleiben.

Es mag noch bemerkt werden, daß eine consequente Durchführung des Princips, wonach kein Glied eines Fachwerkes in gegen seine Länge transversaler Richtung beansprucht werden soll, auch dazu führt die Endstreben einzelner Systeme, wie z. B. derer a und b in Fig. 240, nicht wie links in der Figur gezeichnet ist, bei c an den letzten Ständer anzuschließen, sondern daß es gerechtfertigt ist, eine Anordnung mit veränderter Neigung der Endstreben, etwa wie rechts bei $A_6 A_6'$ angedeutet ist, zu wählen. Die Anstrengungen dieser Endstreben wie $b_6 A_6'$ finden sich natürlich aus dem Kräfteplane in derselben Weise wie diejenigen aller anderen.

Die vorstehenden Betrachtungen ergeben auch, warum die engmaschigen Gitterträger, wie sie bei den ersten eisernen Brücken seiner Zeit vielfach zur Anwendung gekommen sind, z. B. bei der Kinzigbrücke zu Offenburg und der Dirschauer Weichselbrücke, als wenig rationelle Constructionen heute nicht mehr angewendet werden, ebenso wie die im §. 52 beschriebenen Blech-

röhrenbrücken keine Anwendung mehr finden. Die engmaschigen Gitterträger nach Fig. 212 werden sich ebenso wie die Blechträger nur für solche Fälle eignen, wo die Last nicht, wie bei Brücken, in einzelnen von einander entfernteren Stellen concentrirt ist, sondern in nahe neben einander angebrachten Punkten aufruht, wie bei Balkendecken, oder wo sie gleichmäßig vertheilt ist, wie etwa bei Waarenspeichern ꝛc.

Es ergiebt sich ohne Weiteres, daß es bei der Zusammensetzung mehrerer einfacher Fachwerkssysteme, wie sie in Fig. 240 angegeben ist, keinen wesentlichen Unterschied machen wird, ob man bei diesen Systemen nach Fig. 235 die verticalen Hängeschienen anordnet, welche die Belastung direct auf die oberen Knotenpunkte übertragen, oder ob man unter Weglassung dieser Hängestangen direct nur die unteren Knotenpunkte belastet. Man wird dementsprechend natürlich bei der Ermittelung der Spannungen in den einzelnen Gliedern entweder die Figuren 237 oder 236 zu Grunde zu legen haben.

Anstatt den zusammengesetzten Fachwerksträger aus Einzelträgern nach dem Neville'schen Systeme zu bilden, kann man selbstredend auch Mohnié'sche Träger dazu verwenden, deren Untersuchung nach dem im §. 54 Angeführten zu geschehen hat. So wird man beispielsweise die Anstrengungen in dem Fachwerksträger, Fig. 243, feststellen, wenn man die beiden Einzelträger, Fig. 241 und Fig. 242, aus denen er besteht, jeden für sich mit der halben Last behaftet untersucht.

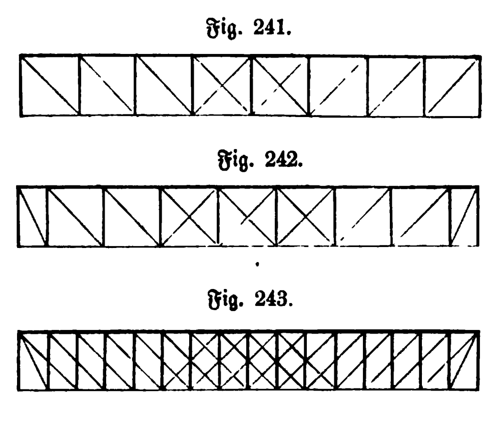


Fig. 241.

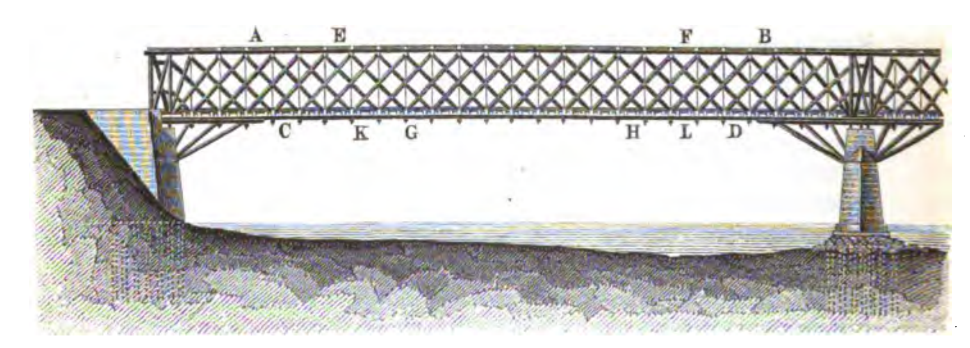
Fig. 242.

Fig. 243.

Ein Beispiel für eine Brücke mit combinirten, aus vier Einzelsystemen bestehenden Fachwerksträgern zeigt Fig. 244 (a. f. S.). Jeder der zwei Hauptträger besteht aus den beiden Gurtungen AB und CD, von welchen jede aus drei neben einander liegenden Balken zusammengesetzt ist. Während nun die Streben CE und HF doppelt ausgeführt sind und sich gegen die äußeren Balken der Gurtungen stemmen, gehen die entgegengesetzten Streben wie GE und DF als einfache Hölzer zwischen jenen hindurch und stehen mit den mittleren Gurtungsbalken in Verbindung. Zur Vereinigung der Streben mit den Gurtungen sind in den Knotenpunkten C, E, G ... entsprechende Querhölzer angebracht, und die Verbindung der oberen mit den unteren Knotenpunkten ist durch je zwei schmiedeiserne Ankerbolzen von

50 mm Stärke mittelst Schrauben bewirkt, deren Muttern auf entsprechenden Querhölzern ruhen. Man kann dieses System, welches häufig als das Howe'sche bezeichnet wird, auch als eine mehrfache Combination des

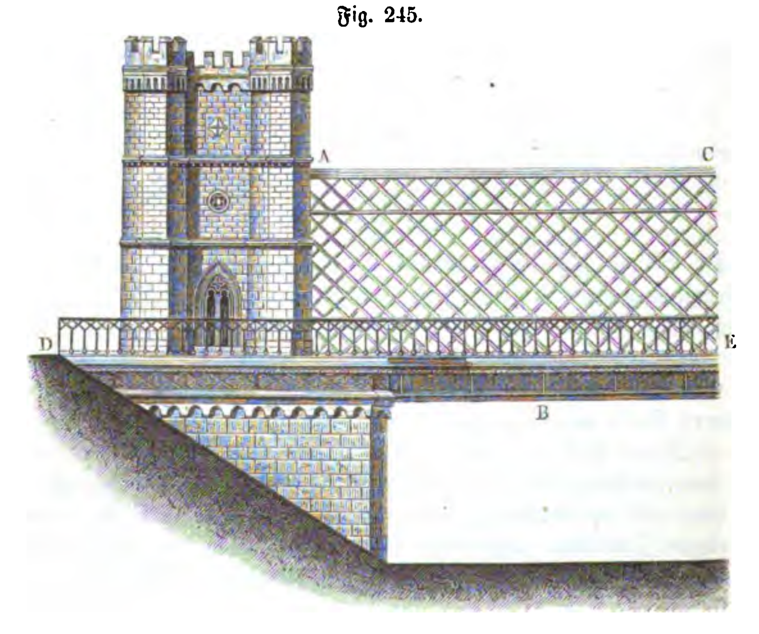
Fig. 244.



Neville'schen, Fig. 235, auffassen, da die verticalen Ankerbolzen nur befähigt sind, Zugwirkungen in sich aufzunehmen, wie sie durch die Uebertragung der unten angehängten Fahrbahn auf die oberen Knotenpunkte erzeugt werden.

In Fig. 245 ist noch ein Stück der Gitterbrücke über die Kinzig bei Offenburg dargestellt. Diese Brücke trägt neben dem doppelten Schienen-

Fig. 245.



wege DE noch zwei Fußwege zu den Seiten, und besteht aus drei 6,25 m hohen und 71,12 m langen Gitterwänden wie ABC. Die Gitterstäbe, welche sich unter rechten Winkeln kreuzen, haben bei 21 mm Stärke 105 mm Breite und sind in den Kreuzungspunkten durch 30 mm starke Bolzen vernietet. Um die Festigkeit dieser Brücke zu erhöhen, hat man die Tragwände derselben nicht allein an jedem Ende 4 m lang aufgelagert, sondern auch noch mit den Pfeilern fest verankert. Zur seitlichen Versteifung sind diese Wände auch oben noch durch eiserne Schienen mit einander verbunden.

Beispiel. Die Spannungen der Glieder eines Fachwerksträgers nach Fig. 246 sollen ermittelt werden, wenn die ganze Trägerlänge 60 m und die Anzahl der Felder 12 beträgt, und die Belastung sowohl an die unteren wie oberen Knotenpunkte gehängt ist. Die Belastung des Trägers pro Meter Länge soll zu

Fig. 246.

1,4 Tonn. durch das Eigengewicht und zu 2,8 Tonn. durch die Verkehrslast angenommen werden.

Man findet hier, da die horizontale Entfernung zweier Lastpunkte gleich $\frac{60}{12} = 5$ m ist, die Belastung für jeden Knoten zu

$$p = 5 \cdot 1{,}4 = 7\,t \text{ und } k = 5 \cdot 2{,}8 = 14\,t, \text{ daher } q = 21\,t.$$

Setzt man die einzelnen Dreiecke als gleichschenkelige voraus, so ergiebt sich die Trägerhöhe

$$h = 5\ tg\ 60^0 = 5 \cdot 1{,}732 = 8{,}66\ \text{m}.$$

Für die volle Belastung hat man den Auflagerdruck zu jeder Seite

$$R = \frac{11}{2} \cdot 21 = 115{,}5\ t.$$

Die Biegungsmomente für die auf einander folgenden Knotenpunkte beider Gurtungen bestimmen sich nach der Gleichung (8a) in §. 54:

$$M = q\,a\,\nu\,\frac{n - \nu}{2},$$

wenn man darin $n = 12$ und $\nu = 1, 2, 3 \ldots 11$ setzt, und aus diesen Momenten ergiebt sich die betreffende Gurtungsspannung O oder U nach (1) zu

$$\frac{1}{h}\,M = \frac{M}{1{,}732\,a} = 0{,}577\,\frac{M}{a}.$$

Man erhält demgemäß

$M_1 = q\,a\,1\,\frac{11}{2} = 21\,a\,\frac{11}{2} = 115{,}5\,a;$ $U_1 = 0{,}577\,.\,115{,}5 = 66{,}6$ t.

$M_2 = 21\,.\,2\,\frac{10}{2}\,a = 210\,a;$ $O_1 = 0{,}577\,.\,210 = 121{,}2$ t.

$M_3 = 21\,.\,3\,\frac{9}{2}\,a = 283{,}5\,a;$ $U_2 = 0{,}577\,.\,283{,}5 = 163{,}6$ t.

$M_4 = 21\,.\,4\,\frac{8}{2}\,a = 336\,a;$ $O_2 = 0{,}577\,.\,336 = 193{,}9$ t.

$M_5 = 21\,.\,5\,\frac{7}{2}\,a = 367{,}5\,a;$ $U_3 = 0{,}577\,.\,367{,}5 = 212{,}0$ t.

$M_6 = 21\,.\,6\,\frac{6}{2}\,a = 378\,a;$ $O_3 = 0{,}577\,.\,378 = 218{,}1$ t.

Für die folgenden Spannungen ergeben sich die nämlichen Werthe in umgekehrter Reihenfolge.

Die Spannung in irgend einer Diagonale ergiebt sich nun zu

$$T = \frac{V}{\sin 60^0} = 1{,}155\,V,$$

worin man nach §. 54, (12) und (13) für V die beiden extremen Werthe

$$V_{max} = \frac{n - 2\nu + 1}{2}\,p + \frac{n - \nu}{n}\,\frac{n - \nu + 1}{2}\,k$$

und

$$V_{min} = \frac{n - 2\nu + 1}{2}\,p - \nu\,\frac{\nu - 1}{2n}\,k$$

zu setzen hat, entsprechend einer Belastung des einen oder anderen Theiles, in welche der gedachte Schnitt den Träger zerlegt. Demgemäß erhält man:

$V_{1max} = \frac{11}{2}\,7 + \frac{11}{12}\,\frac{12}{2}\,14 = 115{,}5;$ $T_{1max} = 1{,}155\,.\,115{,}5 = 133{,}4$ t.

$V_{1min} = \frac{11}{2}\,7 - 0 = 38{,}5;$ $T_{1min} = 1{,}155\,.\,38{,}5 = 44{,}5$ t.

$V_{2max} = \frac{9}{2}\,7 + \frac{10}{12}\,\frac{11}{2}\,14 = 95{,}67;$ $T_{2max} = 110{,}5$ t.

$V_{2min} = \frac{9}{2}\,7 - 2\,\frac{1}{24}\,14 = 30{,}33;$ $T_{2min} = 35{,}0$ t.

$V_{3max} = \frac{7}{2}\,7 + \frac{9}{12}\,\frac{10}{2}\,14 = 77{,}0;$ $T_{3max} = 88{,}9$ t.

$V_{3min} = \frac{7}{2}\,7 + 3\,\frac{2}{24}\,14 = 21{,}0;$ $T_{3min} = 24{,}25$ t.

$V_{4max} = \frac{5}{2}\,7 + \frac{8}{12}\,\frac{9}{2}\,14 = 59{,}5;$ $T_{4max} = 68{,}7$ t.

$V_{4min} = \frac{5}{2}\,7 - 4\,\frac{3}{24}\,14 = 10{,}5;$ $T_{4min} = 12{,}12$ t.

$$V_{5max} = \frac{3}{2} 7 + \frac{7}{12} \frac{8}{2} 14 = 43,17; \qquad T_{5max} = 49,86 \text{ t.}$$

$$V_{5min} = \frac{3}{2} 7 - 5 \frac{4}{24} 14 = -1,17; \qquad T_{5min} = -1,35 \text{ t.}$$

$$V_{6max} = \frac{1}{2} 7 + \frac{6}{12} \frac{7}{2} 14 = 28; \qquad T_{6max} = 32,34 \text{ t.}$$

$$V_{6min} = \frac{1}{2} 7 - 6 \frac{5}{24} 14 = -14; \qquad T_{6min} = -16,17 \text{ t.}$$

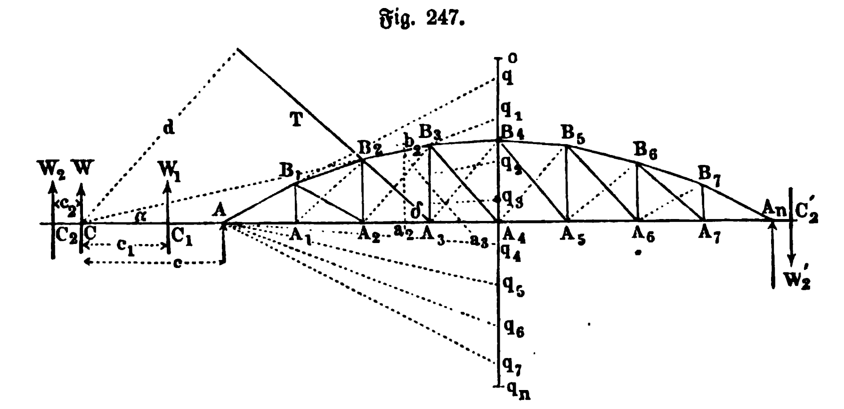
Die so gefundenen Spannungszahlen sind in Fig. 246 eingetragen.

Parabelträger. Bei den bisher betrachteten Fachwerksträgern mit parallelen Gurtungen fällt die Spannung in den Streckbäumen wegen der constanten Trägerhöhe h in den verschiedenen Feldern sehr verschieden aus, entsprechend der Größe des Biegungsmomentes M, welches von dem Werthe Null über den Stützen bis zu dem größten Betrage in der Trägermitte veränderlich ist. Man hat daher, will man das Material nicht unnütz verwenden, die Querschnitte der Gurtungen von der Mitte nach den Enden hin in den einzelnen Knotenpunkten entsprechend zu verringern. Es erscheint aber sowohl aus constructiven wie aus theoretischen Gründen vortheilhaft, die Anordnung so zu treffen, daß die Spannkräfte in den Gurtungen möglichst constant ausfallen, indem hierfür nicht nur die Ausführung der Gurtungen mit constantem Querschnitte erleichtert, sondern auch die Anstrengung der Zwischenglieder vermindert wird, welche letztere in dem Falle gleich Null werden würde, in welchem es möglich wäre, die Spannungen der Gurtungen überall von gleicher Größe zu erhalten. Letztere Bedingung ist zwar nicht zu erfüllen, wenigstens nicht bei einer einseitigen Belastung des Trägers, doch erscheint es zweckmäßig, solche Constructionen anzuwenden, bei denen für die volle Belastung, also für das Auftreten der größten Biegungsmomente dieser Zustand ganz oder nahezu erreicht wird. §. 56.

Eine solche Construction ist durch den sogenannten Parabelträger gegeben, so genannt, weil die Knotenpunkte der einen Gurtung in einer Parabel gelegen sind, deren Verhältnisse sich aus dem Folgenden ergeben werden. Es sei die Aufgabe gestellt, einen Fachwerksträger von der Länge $AA_n = l$, Fig. 247 (a. f. S), dessen untere Gurtung geradlinig ist, so anzuordnen, daß bei der vollen Belastung des Trägers die Spannkraft U der unteren Gurtung in allen Punkten dieselbe Größe hat. Es sei wieder eine Belastung des Trägers in jedem Knotenpunkte mit $q = p + k$ vorausgesetzt, und unter $a = \frac{l}{n}$ die Weite jedes der n gleich breiten Felder verstanden; ferner soll die Höhe des Trägers in der Mitte zwischen den Gurtungsschwerpunkten gleich h vorausgesetzt werden. Die Anzahl n der Felder

ist in der Figur als eine gerade vorausgesetzt, so daß in der Mitte ein Pfosten oder Knotenpunkt sich befindet, doch wird die Untersuchung bei einer ungeraden Anzahl von Feldern nicht wesentlich geändert, nur hat man in diesem Falle unter h nicht die Höhe der beiden mittleren Pfosten, sondern

Fig. 247.



die Scheitelordinate der betreffenden Parabel zu verstehen. Es bestimmt sich wieder der Druck für jedes Auflager bei der vollen Trägerbelastung zu

$$R_1 = R_2 = \frac{n-1}{2} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und das Biegungsmoment für die Mitte zu

$$M_{max} = R \frac{n}{2} a - q \left(1 + 2 + \cdots + \frac{n}{2} - 1\right) a = q \frac{n^2}{8} a$$

$$= \frac{q}{a} \frac{l^2}{8} = q n \frac{l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man erhält daher die Spannung U der unteren Gurtung in der Mitte, wenn man den oberen Knotenpunkt B_4 als Momentenmittelpunkt annimmt, zu

$$U = \frac{M_{max}}{h} = q \frac{n^2}{8} \frac{a}{h} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8h} = q n \frac{l}{8h} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Unter der Anahme, daß $l = 8h$ ist, erhält man daher die größte Spannung in der unteren Gurtung zu $U = qn = Q$, d. h. gleich dem Gewichte des ganzen Trägers einschließlich seiner vollen Belastung.

In irgend einem anderen Felde, z. B. in dem Querschnitte durch den um ν Felder von A entfernten Knotenpunkt ist das Biegungsmoment durch

$$M_\nu = R\nu a - q(1 + 2 + \cdots \nu - 1)a = aq\left(\frac{n-1}{2}\nu - \frac{\nu-1}{2}\nu\right)$$

$$= aq\nu\frac{n-\nu}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

gegeben. Soll nun in diesem Querschnitte, in welchem die Höhe gleich y sein mag, die Spannung der unteren Gurtung denselben Werth U wie in der Mitte haben, so hat man nach (3) und (4) die Gleichung:

$$\frac{M_\nu}{y} = aq\nu\frac{n-\nu}{2y} = \frac{q}{a}\,\frac{l^2}{8h} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzt man hierin $an = l$, und den Abstand des betrachteten Querschnittes von A also $\nu a = x$, so erhält man:

$$x\frac{l-x}{2y} = \frac{l^2}{8h}, \text{ oder } y = \frac{4h}{l^2}(l-x)x. \quad \ldots \quad (6)$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel*) mit verticaler Axe und der Pfeilhöhe h in der Mitte zwischen A und A_n vor, welche Pfeilhöhe, wie schon bemerkt worden ist, bei einer geraden Felderzahl mit der Höhe des Mittelpfostens übereinstimmt. Man schließt daraus, daß die oberen Knotenpunkte B des Trägers in dieser Parabel gelegen sein müssen, wenn der Bedingung einer constanten Spannkraft in der unteren Gurtung genügt werden soll. Es kann bemerkt werden, daß diese Parabel mit derjenigen übereinstimmt, welche für den gleichförmig mit nq belasteten Träger die Momentenfläche begrenzt, vorausgesetzt, daß man den Maßstab so wählt, daß die Höhe h das Moment in der Mitte $M_{max} = q\frac{n^2}{8}a$ vorstellt.

Die obere Gurtung setzt sich zwischen den einzelnen Knotenpunkten aus geradlinigen Stücken zusammen, in denen, wie sich leicht ergiebt, die Spannung O nicht von gleicher Größe sein kann. Bezeichnet man nämlich mit α den Winkel, welchen irgend eine dieser Parabelsehnen, z. B. B_2B_3, mit dem Horizonte bildet, so findet man aus der Momentengleichung in Bezug auf den unteren Knotenpunkt A_2 $M = O_2 \cos\alpha \,.\, y_2$, woraus mit Rücksicht auf (5) die Spannung der oberen Gurtung allgemein zu

$$O = \frac{M}{y\cos\alpha} = \frac{U}{\cos\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

---

*) Um dies einzusehen, setze man zum Zwecke der Verlegung des Coordinatenanfangs von A nach B_4 in (5):

$$y = y_1 + h \text{ und } x = x_1 + \frac{l}{2},$$

so erhält man die Scheitelgleichung:

$$x_1^2 = -\frac{l^2}{4h}y. \quad (5^a)$$

folgt, d. h. es verhält sich überall die Spannung der oberen Gurtung zu der constanten Spannung U der unteren wie die Länge $\lambda = \frac{a}{\cos \alpha}$ der Parabelsehne zu der Weite a des Feldes.

Die größte Spannung in der oberen Gurtung ist daher größer als die Maximalspannung in der unteren Gurtung und zwar nimmt diese Spannung von der Mitte des Trägers nach beiden Enden hin an Größe zu. Nur bei einer ungeraden Felderzahl sind in dem mittleren Felde die Maximalspannungen der beiden daselbst parallelen Gurtungen gleich groß.

Die in den Feldern befindlichen Diagonalen $A_2 B_1$, $A_3 B_2$ ... sind bei der hier vorausgesetzten vollen Belastung keinerlei Spannungen ausgesetzt, wie man ohne Weiteres daraus erkennt, daß das Gleichgewicht für einen unteren Knotenpunkt wie A_3 wegen der Gleichheit der Kräfte in den beiden daselbst zusammenstoßenden Gurtungstheilen mit einer Spannung der Diagonale $A_3 D_2$ unverträglich ist, indem keine Kraft vorhanden ist, welche der horizontalen Componente einer solchen Strebenspannung das Gleichgewicht halten könnte. Ebenso ergiebt sich, daß in den verticalen Pfosten wie $A_3 B_3$ keine andere Spannung stattfinden kann, als die durch die in dem unteren Knotenpunkte angebrachte Belastung q hervorgerufene, und es folgt also auch für die beiden in dem oberen Knotenpunkte B_3 unter den Winkeln α_2 und α_3 zusammentreffenden Gurtungstheile, daß die Differenz, von deren Verticalspannungen ebenfalls gleich der Kraft q in den Pfosten ist, daß man also

$$O_2 \sin \alpha_2 - O_3 \sin \alpha_3 = U (tg\, \alpha_2 - tg\, \alpha_3) = q \quad . \quad . \quad (8)$$

hat.

Man kann die Begrenzung des Parabelträgers auch als ein Seilpolygon betrachten, dessen Schlußlinie mit der unteren Gurtung zusammenfällt. In einem solchen Seilpolygone ist bekanntlich die vertical gemessene Ordinate y jedes Punktes ein Maß für das Moment M der äußeren Kräfte in diesem Punkte, und zwar ist dieses Moment durch $M = yH$ gegeben, wenn H den Horizontalzug oder die Poldistanz des zugehörigen Kräftepolygons bedeutet. Wendet man diese Regel auf den mittleren Querschnitt A_4 an, für welchen nach (2) $M_{max} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8}$ gefunden wurde, und nimmt die Poldistanz des Kräftepolygons $H = \frac{l}{2}$ an, so findet sich, daß die Ordinate y in der Mitte $A_4 B_4 = h$ nach dem Kräftemaßstabe eine Kraft

$$\frac{M_{max}}{H} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8 \frac{l}{2}} = \frac{q}{a} \frac{l}{4} = q \frac{n}{4}$$

vorstellen muß, wenn man die Gurtungen selbst als Seilpolygon auffassen will. Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres folgende Construction für die Verzeichnung des Trägers. Man wählt den Maßstab für die Kräfte so, daß die gegebene mittlere Trägerhöhe h eine Kraft gleich $q\,\frac{n}{4}$ ist, trägt daher in A_4 zu jeder Seite der horizontalen unteren Gurtung

$$A_4 o = A_4 q_n = q\,\frac{n}{2} = 2\,h$$

an, indem man auf dieser Kräftelinie die einzelnen Belastungen und zwar

$$o\,q = q_7\,q_n = \frac{q}{2} \text{ und } q\,q_1 = q_1\,q_2 = \cdots q_6\,q_7 = q$$

markirt, und wählt als Pol den Auflagerpunkt A im Abstande $\frac{l}{2}$ von der Kräftelinie. Dann erhält man in dem Polstrahle von A nach q direct das erste Gurtungsstück $A B_1$, ferner in der durch B_1 mit dem folgenden Polstrahle $A q_1$ gezogenen Parallelen die Gurtung $B_1 B_2$ des zweiten Feldes; in $B_2 B_3$ parallel mit $A q_2$ das folgende Stück der oberen Gurtung u. s. w. Auf diese Weise erhält man nicht nur die einzelnen Höhen A_1B_1, A_2B_2... der Verticalstiele ohne Berechnung derselben nach (6), sondern gleichzeitig in den Polstrahlen $A\,q$, $A\,q_1$, $A\,q_2$ ... die Größen der in den damit parallelen Gurtungsstücken auftretenden Kräfte, bezogen auf den zu Grunde gelegten Kräftemaßstab $h = q\,\frac{n}{4}$. Ebenso ergiebt sich nach demselben Maßstabe die constante Spannung U der unteren Gurtung in der Strecke $A\,A_4$, welche gleichzeitig auch die horizontale Componente der Pressungen in allen Stücken der oberen Gurtung vorstellt.

Diese Betrachtung der Trägerbegrenzung als Seilpolygon läßt auch noch in anderer Weise die schon oben gefundene Eigenschaft des Fachwerkes erkennen, wonach bei voller Belastung desselben in den Diagonalen keinerlei Spannung auftreten kann. Denkt man nämlich durch irgend ein Feld einen Schnitt wie $a_2 b_2$ geführt, so erhält man nach der bekannten Eigenschaft des Seilpolygons in dem Durchschnittspunkte C der beiden Endseile $A\,a_2$ und $B_2\,b_2$ einen Punkt, durch welchen die Mittelkraft aller auf das Balkenstück $a_2\,A\,b_2$ wirkenden äußeren Kräfte hindurchgeht. Nimmt man daher diesen Punkt C als den Mittelpunkt der statischen Momente an, so folgt, da die Spannungen U und O_2 durch diesen Punkt hindurchgehen, daß in der mit durchschnittenen Diagonale $A_3\,B_2$ keine Spannung stattfinden kann.

Aus der letzteren Betrachtung ergiebt sich aber auch weiter, daß der mehr besprochene Zustand der vollständigen Spannungslosigkeit der Diagonalen an die Bedingung geknüpft ist, daß die Mittelkraft aller auf ein Trägerstück

wie $a_2 A b_2$ wirkenden äußeren Kräfte durch den besagten Schnittpunkt C der beiden durchschnittenen Gurtungstheile hindurchgehe. Diese Bedingung trifft nach dem Vorhergehenden nur bei einer gleichmäßig über den ganzen Träger ausgebreiteten Belastung zu, also sowohl für den voll mit $nq = n(p + k)$, wie für den ganz leeren nur durch sein Eigengewicht np belasteten Träger. Es ist klar, daß diesen beiden Zuständen die größten bezw. kleinsten Spannungen für sämmtliche Gurtungstheile zukommen, und man erhält diese größten wie kleinsten Spannungen in den Polstrahlen desselben Kräftepolygons $A o q_n$, je nachdem man einen Kräftemaßstab zu Grunde legt, nach welchem die Pfeilhöhe $h = A_4 B_4$ der Kraft $q \frac{n}{4}$ oder $p \frac{n}{4}$ entspricht.

Denkt man jetzt den Träger einer einseitigen Belastung unterworfen, so werden auch in den Diagonalen und zwar wie sich ergeben wird, gleichzeitig in sämmtlichen Diagonalen, Spannungen erzeugt. Um diesen Einfluß einer einseitigen oder beweglichen Belastung kennen zu lernen, sei vorausgesetzt, daß der Träger außer seinem Eigengewichte np einer Verkehrslast nur in einem einzigen Knotenpunkte etwa in A_6 unterworfen sein soll. Wie oben gezeigt worden, ging die Resultirende aller auf das Stück $a_2 A b_2$ wirkenden äußeren Kräfte durch den Schnittpunkt C, so lange die einseitige Last k in A_6 den Träger noch nicht beeinflußte. Diese Mittelkraft, aus der vertical aufwärts gerichteten Auflagerreaction in A und den Belastungen in A_1 und A_2 durch das Eigengewicht zusammengesetzt, ist in C, wie leicht zu sehen ist, ebenfalls vertical aufwärts gerichtet, so lange der Schnitt $a_2 b_2$ noch zwischen A und dem mittleren Querschnitte A_4 gelegen ist. Durch die nun in A_6 hinzutretende Belastung k wird die Auflagerreaction in A um einen gewissen Betrag Z_1 vergrößert, und wenn man diesen Zuwachs mit der gedachten in C wirkenden Mittelkraft W vereinigt, so erhält man die nunmehrige Resultirende aller äußeren Kräfte $W_1 = W + Z_1$, deren Angriffspunkt wegen der gleichen Richtung von W und Z_1 offenbar zwischen A und C, etwa in C_1 gelegen sein wird. Wählt man nun wieder, um das Gleichgewicht des Balkenstückes $a_2 A b_2$ zu prüfen, den Durchschnittspunkt C der Gurtungen zum Momentenmittelpunkte, so erhält man zur Bestimmung der Diagonalkraft T die Gleichung

$$W_1 . c_1 = T d,$$

woraus

$$T = \frac{c_1}{d} W_1$$

folgt. Man erkennt auch leicht, daß diese Diagonalspannung eine Zugkraft sein muß, damit sie durch ihre das Stück $a_2 A b_2$ um C rechts drehende

Richtung im Stande ist, der linksum drehenden Mittelkraft W_1 das Gleichgewicht zu halten.

Dieselbe Betrachtung wie für A_6 gilt natürlich für jeden Knotenpunkt, welcher jenseits der Schnittfläche, d. h. zwischen $a_2 b_2$ und A_n gelegen ist, jede dort aufgebrachte Belastung bringt in der Diagonale $A_3 B_2$ Zugspannungen hervor. Dagegen findet sich ebenso, daß eine diesseits des Schnittes, also zwischen $a_2 b_2$ und A, etwa in A_1 aufgesetzte Belastung in der Diagonale $A_3 B_2$ Druckspannungen hervorruft. Durch die Last k in A_1 wird nämlich das betrachtete Balkenstück $a_2 A b_2$ einer vertical abwärts wirkenden zusätzlichen Kraft Z_2 unterworfen, welche sich als Differenz von k und der hierdurch in A erzeugten Auflagerreaction, d. h. also gleich dem Auflagerdrucke ergiebt, welchen die Last k in A_1 für sich allein in A_n hervorbringt. Setzt man diese in A_n wirkende Kraft Z_2 mit W in C zusammen, so erhält man eine Resultirende, welche links von C, etwa in C_2 wirkt, wenn sie aufwärts gerichtet ist (W_2), dagegen rechts von A_n etwa in C_2' angreift, falls sie abwärts zieht (W_2'), d. h. falls $Z_2 > W$ ist. In jedem der beiden Fälle sucht diese Mittelkraft das Balkenstück $a_2 A b_2$ um den Punkt C rechtsum zu drehen, welchem Bestreben nur durch eine Druckkraft T der Strebe $A_3 B_2$ entgegengewirkt werden kann, für welche Kraft man ebenfalls aus $W_2 c_2 = T d$

$$T = \frac{c_2}{d} W_2$$

erhält.

Hieraus folgt, daß bei dem vorliegenden Träger eine Diagonale der größten positiven (Zug-) Kraft unterworfen ist, wenn sämmtliche Knotenpunkte jenseits derselben zwischen dem Schnitte und A_n belastet sind, während die größte negative (Druck-) Kraft in der Diagonale bei einer Belastung sämmtlicher diesseits zwischen dem Schnitte und A gelegenen Knotenpunkte eintritt. Diese beiden größten Anstrengungen müssen gleichen Werth haben, da für die volle Belastung des Trägers die Diagonalen im spannungslosen Zustande sich befinden.

Daß auch die verticalen Stiele durch die einseitigen Belastungen Spannungen unterworfen sind, welche zu den durch die Eigengewichtsbelastung p der unteren Knotenpunkte in ihnen erzeugten hinzutreten, ist ohne Weiteres klar, wenn man einen Knotenpunkt der geraden Gurtung z. B. A_3 ins Auge faßt. Das Gleichgewicht für denselben erfordert, daß, wenn durch die einseitige Belastung des Trägers in der Diagonale $A_3 B_2$ eine Spannung T_2 auftritt, in dem Stiele $A_3 B_3$ eine Spannung $T_2 \sin \delta$ hervorgerufen wird, welche zu der in demselben schon durch die Belastung von A_3 hervorgerufenen Zugspannung hinzutritt. Diese von T erzeugte Spannung ist, wie man leicht erkennt, eine Druckspannung, wenn die Diagonale gezogen

wird, und umgekehrt eine Zugspannung, sobald die Diagonale gepreßt wird. Wenn daher die Letztere der maximalen Zugspannung $+ T_{max}$ ausgesetzt ist, so tritt zu der für diesen Fall in $A_3 B_3$ vorhandenen Zugspannung $(p + k) = q$ noch die Druckspannung $- T_{2max} \sin \delta$ hinzu, so daß der Stiel $A_3 B_2$ einer Spannung

$$q - T_{max} \sin \delta$$

ausgesetzt ist, welche Zug oder Druck bedeutet, je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ist. Andererseits ist bei Belastung aller links vom Schnitte befindlichen Knotenpunkte, für welchen Fall die Diagonale mit $- T_{max}$ gepreßt und der Knotenpunkt A_3 nur mit dem Eigengewichte p belastet ist, in dem Pfosten $A_3 B_3$ die stets positive also Zugspannung vorhanden

$$p + T_{2min} \sin \delta.$$

Denkt man sich einen Schnitt $a_3 b_2$ durch den Pfosten $A_3 B_3$ gelegt, so zeigt eine ähnliche Betrachtung, wie die hinsichtlich der Diagonale angestellte, daß die äußersten Anstrengungen des Pfostens $A_3 B_3$ erzeugt werden, wenn entweder alle Knotenpunkte $A_4, A_5 \ldots A_{n-1}$ rechts vom Schnitte, oder alle Knotenpunkte A_1, A_2, A_3 links vom Schnitte mit der Verkehrslast bedeckt sind, und zwar erzeugen bei der Anordnung des Trägers nach der Figur die Belastungen rechts Druckspannungen, diejenigen links Zugspannungen in dem Pfosten.

Aus den vorstehenden Betrachtungen erkennt man leicht folgendes Verhalten. Wenn man den Träger durch irgend einen Schnitt, welcher außer den Gurtungen nur ein Zwischenglied trifft, in zwei Theile zerlegt denkt, so wird jede Belastung des einen Balkentheiles in dem Zwischengliede eine **Zugspannung** hervorrufen, sobald dieser Balkentheil den **unteren** Knotenpunkt des Zwischengliedes enthält, wogegen eine **Druckspannung** erzeugt wird, wenn der **obere** Knotenpunkt des Zwischengliedes mit dem belasteten Balkentheile verbunden ist.

Um die größte Anspannung in einer Diagonale wie $A_3 B_2$ zu bestimmen, hat man daher sämmtliche jenseitigen Knotenpunkte $A_3, A_4, A_5 \ldots A_n$ mit k belastet zu denken und kann von dem Eigengewichte p ganz absehen, da dasselbe Spannungen in den Diagonalen nicht hervorruft. Bestimmt man dann durch Rechnung oder durch ein Seilpolygon die Größe des durch diese einseitige Belastung in A erzeugten Auflagerdruckes R_ν, so erhält man die Diagonalenkraft zu

$$T = R_\nu \frac{c}{d}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

worin c und d die Abstände des Durchschnittspunktes C der beiden zugehörigen Gurtungstheile $A_2 A_3$ und $B_2 B_3$ bezw. von dem Auflager A, und von der Diagonalenrichtung $A_3 B_2$ bedeuten. Diese Abstände wird man am einfachsten aus der Zeichnung entnehmen, die Auflagerreaction R_ν erhält man für diesen Fall, je nachdem die eine oder andere Seite belastet ist, durch:

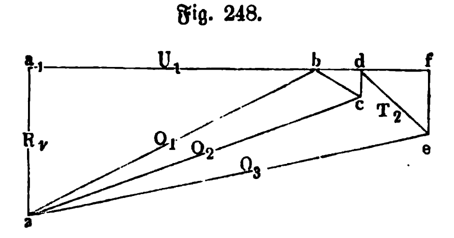
$$R_\nu = k \frac{1 + 2 + \cdots n - \nu - 1}{n} = k \frac{n - \nu}{n} \frac{n - \nu - 1}{2} \quad . \quad . \quad (10)$$

bezw.

$$R_\nu = k \frac{(n - 1) + (n - 2) + \cdots n - \nu}{n} = k \frac{\nu}{n} \frac{2n - \nu - 1}{2}. \quad (11)$$

Aus dem gefundenen Auflagerdrucke R_ν kann man übrigens auch durch ein Kräftepolygon nach Fig. 248 die Spannungen der Zwischenglieder ermitteln, welche der vorausgesetzten Belastung entsprechen. Macht man nämlich $a a_1 = R_\nu$, zieht durch a_1 die Horizontale $a_1 b$ und durch a die Parallelen ab, ac, ae zu den auf einander folgenden Stücken AB_1, $B_1 B_2$, $B_2 B_3$ der oberen Gurtung, ferner durch b die zur Diagonale $A_2 B_1$ Parallele bc, durch c die Linie cd vertical und durch d wieder parallel zu der Diagonale $A_3 A_2$, so liefert die Strecke de die gesuchte Spannung T_2 in der Diagonale $A_3 B_2$ der Fig. 247. Diese Construction, welche leicht verständlich sein dürfte, hat man natürlich für jede Diagonale besonders zu führen, indem man dabei immer denjenigen Werth von R_ν zu Grunde legt, welcher dem für die betreffende Diagonale ungünstigsten Belastungszustande entspricht. Wie man aus diesen Spannungen der Diagonalen diejenigen der Verticalpfosten unter Berücksichtigung des Eigengewichtes findet, ist bereits besprochen, für die größte Anstrengung der Gurtungen hat man nach dem oben Angeführten überall die volle Belastung des Trägers vorauszusetzen.

Fig. 248.



Die größte Anspannung einer Diagonale läßt sich auch mit Rücksicht auf das Gleichgewicht in dem oberen Knotenpunkte derselben bestimmen, welches erfordert, daß die algebraische Summe der horizontalen Componenten der Spannungen in den daselbst zusammenstoßenden Fachwerksgliedern gleich Null ist. Danach muß z. B. für die Diagonale $A_3 B_2$ die Spannungscomponente $T_2 \cos \delta_2$ gleich der Differenz derjenigen Horizontalspannungen H_2 und H_3 sein, die in den oberen Gurtungen $B_2 B_1$ und $B_2 B_3$ sich bei

derjenigen Belastung des Trägers einstellen, welche die größte Anstrengung der Diagonale hervorruft. Für diesen Zustand, also wenn sämmtliche Knotenpunkte rechts von dem νten Pfosten mit je k belastet sind, hat man offenbar, unter R_ν den durch k veranlaßten Auflagerdruck in A verstanden, die Horizontalspannung im $\nu - 1$ten Felde $A_1 A_2$ gleich

$$H_{\nu-1} = \frac{1}{y_\nu} R_\nu \nu a$$

und diejenige im folgenden Felde $A_2 A_3$:

$$H_\nu = \frac{1}{y_{\nu+1}} R_\nu (\nu + 1) a,$$

folglich erhält man allgemein die größte bezw. kleinste Spannung in der νten Diagonale durch

$$T_\nu \cos \delta_\nu = \pm R_\nu a \left(\frac{\nu + 1}{y_{\nu+1}} - \frac{\nu}{y_\nu}\right).$$

Führt man hierin für R_ν nach (10) und für die Ordinaten y nach (6) die Werthe ein, so erhält man, wenn man $l = n a$ und $x = \nu a$ und bezw. $(\nu + 1) a$ setzt:

$$T_\nu \cos \delta_\nu = \pm k \frac{n - \nu}{n} \frac{n - \nu - 1}{2} \frac{l^2}{4 h} \left(\frac{1}{(n - \nu - 1) a} - \frac{1}{(n - \nu) a}\right)$$

$$= \pm \frac{k}{2 n} \frac{l^2}{4 h} \frac{1}{a} = \pm k \frac{l}{8 h}$$

oder

$$T = \pm \frac{k}{\cos \delta} \frac{l}{8 h} = \pm \frac{k}{a} \frac{a}{\cos \delta} \frac{l}{8 h} = \pm \varkappa \lambda \frac{l}{8 h}, \quad . . (12)$$

wenn $\varkappa = \frac{k}{a}$ die Verkehrsbelastung pro laufenden Meter und $\lambda = \frac{a}{\cos \delta}$ die Länge der Diagonale ist.

Für den Fall, daß man der Construction das Verhältniß $l = 8 h$ zu Grunde legt, erhält man für die Maximalspannung der Diagonalen die einfache Beziehung $T = \varkappa \lambda$, d. h. für diesen Fall ist die Maximalspannung jeder Diagonale gleich der auf eine Länge gleich derjenigen der Diagonale ausgebreiteten Verkehrslast, bei einem anderen Verhältnisse von $l : h$ hat man dieses Gewicht mit dem Bruche $\frac{l}{8 h}$ zu multipliciren, um die größte Diagonalenspannung zu erhalten.

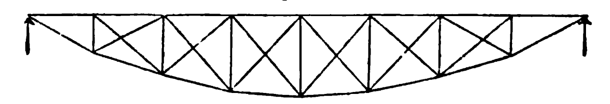
Wenn man in dem Träger der Fig. 247 die Diagonalen entsprechend den punktirten Linien von rechts nach links abfallend anstatt ansteigend anbringt, so gelten die sämmtlichen vorstehend angestellten Betrachtungen

auch für diesen Träger mit dem einzigen Unterschiede, daß nunmehr eine einseitige Belastung in der Diagonale irgend eines Feldes einen Druck erzeugt, wenn sie bei der ursprünglichen Anordnung eine Zugkraft hervorrief und umgekehrt. Im Besonderen wird daher beispielsweise in der Diagonale $A_2 B_3$ durch jede rechts aufgebrachte Belastung Druck, durch jede Belastung eines links gelegenen Feldes Zug hervorgerufen, wie man in derselben Art wie vordem aus der Betrachtung der Richtung erkennt, in welcher die Resultirende aller äußeren Kräfte das Balkenstück $a_2 A b_2$ um den Schnittpunkt C zu drehen strebt.

Hieraus folgt nun, daß man durch Anwendung gekreuzter Streben in den einzelnen Feldern erreichen kann, daß die Streben sämmtlich nur durch Zug- oder nur durch Druckkräfte angegriffen werden, je nachdem man die Streben nur gegen die eine oder die andere Beanspruchung widerstandsfähig macht. In dieser Hinsicht kann auf das in den vorhergehenden Paragraphen gelegentlich der Träger mit parallelen Gurtungen Gesagte verwiesen werden. Hierbei ist nur zu bemerken, daß, während bei den Parallelträgern nur die mittleren Felder der Gegenstreben bedürfen, bei den Parabelträgern in allen Feldern Gegenstreben erforderlich sind, weil bei einfachen Streben dieselben in allen Feldern abwechselnd Zug- und Druckspannungen ausgesetzt sind.

Es bedarf nur der Erwähnung, daß die vorstehende Untersuchung sich nicht wesentlich ändert, wenn der Parabelträger nach Fig. 249 die obere

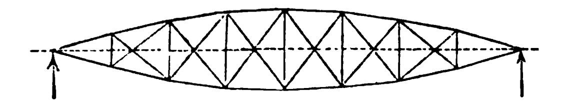
Fig. 249.



Gurtung geradlinig begrenzt erhält. Selbstredend wird dann diese gerade Gurtung mit constanter Kraft gedrückt, und die parabelförmige untere Gurtung wie eine Kette gezogen, und es werden die Pfosten durch die nunmehr auf der oberen Gurtung angebrachte Fahrbahn auf Druck beansprucht.

Denkt man sich ferner zwei Träger wie die Figuren 247 und 249, deren Spannweiten, Höhen und Belastungen gleich groß sind, mit ihren geraden

Fig. 250.



Gurtungen auf einander gelegt, so kann man in den vereinigten Balken die geraden Gurtungen beseitigen, da deren Spannungen gleich groß und ent-

gegengesetzt sind und man gelangt zu der Trägerform Fig. 250 (a. v. S.). Auch für diesen Doppelparabelträger, auch wohl Fischbauchträger genannt, gelten die vorstehend entwickelten Gesetze, und es sind hier in jedem Felde nicht nur die horizontalen Componenten der Gurtungsspannungen, sondern wegen der symmetrischen Trägerform diese Spannungen selbst in der oberen und unteren Gurtung von gleicher Größe, wenn der ganze Träger gleichmäßig belastet ist.

Beispiel. Für einen Parabelträger von 36 m Länge, welcher in neun gleiche Felder von 4 m Länge getheilt ist, sollen die größten Spannungen der einzelnen Fachwerksglieder unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß die untere gerade Gurtung in jedem Knotenpunkte durch das Eigengewicht mit $p = 4$ Tonnen und durch die Verkehrslast mit $k = 12$ Tonnen belastet wird, und daß die Höhe des Trägers in dem mittleren Felde ebenfalls zu 4 m angenommen wird.

Bei der vollen Belastung des Trägers ermittelt sich die Auflagerreaction an jedem Ende zu

$$R = \frac{n-1}{2}\, q = \frac{8}{2}\,(4 + 12) = 64 \text{ Tonnen},$$

und das größte Moment für das Mittelfeld $A_4 A_5$, Fig. 251, zu

$$M_4 = R \,.\, 4\, a - q\, a\,(1 + 2 + 3) = 256\, a - 96\, a = 160\, a = 640 \text{ Metertonnen},$$

so daß man die größte Spannung in den horizontalen Gurtungen des Mittelfeldes:

$$O_5 = U_5 = \frac{M_4}{h_4} = \frac{640}{4} = 160 \text{ Tonnen}$$

erhält. Um zunächst die Höhen der übrigen Pfosten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ ... zu bestimmen, hat man die maximalen Biegungsmomente in den einzelnen Knotenpunkten nach (4) zu

$$M_1 = q \,.\, 1\, \frac{9-1}{2}\, a = 64\, a,$$

$$M_2 = q \,.\, 2\, \frac{9-2}{2}\, a = 112\, a,$$

$$M_3 = q \,.\, 3\, \frac{9-3}{2}\, a = 144\, a;$$

daher folgen die Höhen der Pfosten proportional mit den Momenten zu

$$h_1 = A_1 B_1 = \frac{64}{160}\, k_4 = \frac{64}{160}\, 4 = 1{,}6 \text{ m} = h_8,$$

$$h_2 = A_2 B_2 = \frac{112}{160}\, 4 = 2{,}8 \text{ m} = h_7 \text{ und}$$

$$h_3 = A_3 B_3 = \frac{144}{160}\, 4 = 3{,}6 \text{ m} = h_6,$$

wonach sich die obere Gurtung zeichnen läßt. Wegen der ungeraden Anzahl der Felder stimmt die Höhe h_4 des mittleren Feldes nicht mit der Scheitelhöhe h überein, vielmehr erhält man dieselbe aus der Proportion:

$$h : h - h_4 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 : \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 81 : 1$$

zu

$$h = \frac{81}{80} h_4 = 4{,}05 \text{ m}.$$

Für die Neigungswinkel der einzelnen Theile der oberen Gurtung hat man:

$$tg\,\alpha = \frac{h_1}{a} = 0{,}4; \quad \alpha = 21^0\,49' = \alpha_9,$$

$$tg\,\alpha_1 = \frac{h_2 - h_1}{a} = 0{,}3; \quad \alpha_1 = 16^0\,42' = \alpha_8,$$

$$tg\,\alpha_2 = \frac{h_3 - h_2}{a} = 0{,}2; \quad \alpha_2 = 11^0\,19' = \alpha_7,$$

$$tg\,\alpha_3 = \frac{h_4 - h_3}{a} = 0{,}1; \quad \alpha_3 = 5^0\,43' = \alpha_6.$$

Dementsprechend ergeben sich nun die Druckspannungen der oberen Gurtung zu

$$O_1 = \frac{U}{\cos 21^0\,49'} = \frac{160}{0{,}9283} = 172{,}4\,t = O_9,$$

$$O_2 = \frac{U}{\cos 16^0\,42'} = \frac{160}{0{,}9577} = 167{,}05\,t = O_8,$$

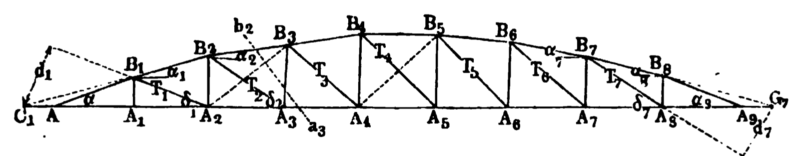
$$O_3 = \frac{U}{\cos 11^0\,19'} = \frac{160}{0{,}9806} = 163{,}2\,t = O_7,$$

$$O_4 = \frac{U}{\cos 5^0\,43'} = \frac{160}{0{,}9950} = 160{,}8\,t = O_6,$$

$$O_5 = U = 160\,t.$$

Um die größten Anstrengungen T der Streben zu ermitteln, seien zunächst nur einfache Diagonalen nach Fig. 251 angenommen, welche sowohl Druck- wie

Fig. 251.



Zugkräften widerstehen können. Es bestimmen sich zuvörderst die Längen λ der Diagonalen zu:

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2 + h_1^2} = \sqrt{16 + 2{,}56} = 4{,}308 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a^2 + h_2^2} = \sqrt{16 + 7{,}84} = 4{,}883 \text{ m} = \lambda_7,$$

$$\lambda_3 = \sqrt{a^2 + h_3^2} = \sqrt{16 + 12{,}96} = 5{,}382 \text{ m} = \lambda_6,$$

$$\lambda_4 = \sqrt{a^2 + h_4^2} = \sqrt{32} = 5{,}657 \text{ m}.$$

Da man ferner

$$\varkappa = \frac{k}{a} = \frac{12}{4} = 3\,t \text{ und } \frac{l}{8h} = \frac{36}{8 \,.\, 4{,}05} = 1{,}111$$

hat, so erhält man nach (12):

$$T_1 = \pm 4{,}308 \,.\, 3 \,.\, 1{,}111 = \pm 14{,}36 \; t,$$
$$T_2 = \pm 4{,}883 \,.\, 3{,}333 = \pm 16{,}277 \; t = T_7,$$
$$T_3 = \pm 5{,}382 \,.\, 3{,}333 = \pm 17{,}94 \; t = T_6,$$
$$T_4 = \pm 5{,}657 \,.\, 3{,}333 = \pm 18{,}86 \; t = T_5.$$

In Betreff der verticalen Pfosten denkt man sich den Träger durch Schnitte wie $a_3 b_2$ zerlegt und wählt den Durchschnitt der beiden durchschnittenen Gurtungen $A_3 A_4$ und $B_2 B_3$ zum Mittelpunkte der Momente. Dann erzeugen alle links von dem Schnitte angebrachten Belastungen Zugspannungen, und alle rechts angebrachten Druckspannungen in den Pfosten und zwar darf hier das Eigengewicht p nicht vernachlässigt werden, wie es bei der Ermittelung der Diagonalenspannungen geschehen konnte. Bezeichnet man die Abstände der gedachten Schnittpunkte der Gurtungen von A und bezw. von A_9 mit c_1, c_2, c_3 und c_7, c_6, c_5, so findet man zunächst:

$$c_1 = h_1 \, cotg \, \alpha_1 - a \;\; = \frac{1{,}6}{0{,}3} - \;\, 4 = 1{,}333 \,\mathrm{m} = c_7,$$
$$c_2 = h_2 \, cotg \, \alpha_2 - 2\,a = \frac{2{,}8}{0{,}2} - \;\, 8 = 6 \,\mathrm{m} \qquad = c_6,$$
$$c_3 = h_3 \, cotg \, \alpha_3 - 3\,a = \frac{3{,}6}{0{,}1} - 12 = 24 \,\mathrm{m} \qquad = c_5.$$

Hiernach erhält man nun die Spannungen P in den Pfosten durch:

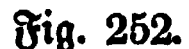
$$P_{1max} = 0 + p + k = 16 \, t,$$
$$P_{1min} = 0 + p = 4 \, t,$$
$$P_{2max}\,(c_1 + 2\,a) = -\left(\frac{8}{2}\,p + k\,\frac{8+7}{9}\right) c_1 + (p + k)\,(c_1 + a + c_1 + 2\,a)$$
$$= -\,36\,c_1 + 16\,(2\,c_1 + 3\,a),$$
$$P_{2max} = \frac{234{,}66 - 48}{9{,}33} = +\;20\,t;$$
$$P_{2min}\,(c_1 + 2\,a) = -\left(\frac{8}{2}\,p + k\,\frac{1+2+\cdots 6}{9}\right) c_1 + p\,(2\,c_1 + 3\,a)$$
$$= -\,44\,c_1 + 4\,(2\,c_1 + 3\,a),$$
$$P_{2min} = 0;$$
$$P_{3max}\,(c_2 + 3\,a) = -\left(16 + 12\,\frac{8+7+6}{9}\right) c_2 + 16\,(3\,c_2 + 6\,a)$$
$$= 4\,c_2 + 96\,a,$$
$$P_{3max} = +\;22{,}75\,t;$$
$$P_{3min}\,(c_2 + 3\,a) = -\left(16 + 12\,\frac{1+2+\cdots 5}{9}\right) c_2 + 4\,(3\,c_2 + 6\,a)$$
$$= -\,24\,c_2 + 24\,a = -\,2{,}75,$$
$$P_{3min} = -\;2{,}75\,t;$$
$$P_{4max}\,(c_3 + 4\,a) = -\left(16 + 12\,\frac{8+7+6+5}{9}\right) c_3 + 16\,(4\,c_3 + 10\,a)$$
$$= 13{,}33\,c_3 + 160\,a,$$
$$P_{4max} = +\;24\,t;$$

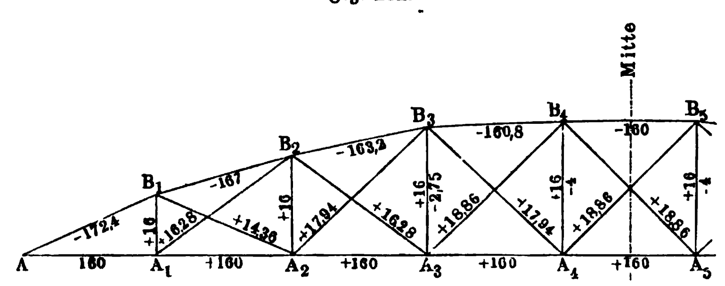
$$P_{4min}\,(c_3 + 4\,a) = -\left(16 + 12\,\frac{1+2+\cdots 4}{9}\right)c_3 + 4\,(4\,c_3 + 10\,a)$$
$$= -\,13{,}33\,c_3 + 40\,a,$$
$$P_{4min} = -\;4\,t.$$

Eine weitere Fortsetzung der Rechnung ergiebt die Werthe $P_5 = P_4$, $P_6 = P_3$, $P_7 = P_2$ und $P_8 = P_1$.

Die hier für T und P gefundenen Werthe haben ihre Gültigkeit für den Träger Fig. 251, welcher mit einfachen, gegen Zug und Druck wirksamen Streben versehen ist. Wendet man dagegen Kreuzstreben an, welche nur Zugkräften zu widerstehen vermögen, so können von den für T gefundenen Spannungszahlen nur die positiven Werthe gültig sein, und es ist auch ersichtlich, daß irgend eine der entgegengesetzten Streben, wie z. B. $A_2 B_3$ im dritten Felde, genau so beansprucht wird, wie die mit ihr symmetrisch gelegene Hauptstrebe $A_7 B_6$ im siebenten Felde, da für beide Streben die Rechnung zu demselben Ansatze und Resultate führt.

Ebenso erkennt man, daß für die Spannungen P in den verticalen Pfosten nur die Minima, welche Druckkräfte bedeuten, Gültigkeit haben, denn durch die Wirkung der Diagonalen, welche nur Zugkräfte äußern können, kann in den Verticalen niemals eine absolute, sondern nur eine rückwirkende Spannung hervorgerufen werden. Die größten Zugspannungen finden dagegen in den Pfosten statt, wenn der Träger über seiner ganzen Länge mit der Verkehrslast bedeckt ist, für welchen Fall in jedem Pfosten eine Zugspannung von $p + k = 16\,t$ hervorgerufen wird. Demgemäß sind die Spannungszahlen in die schematische Figur 252 eingetragen. In welcher Weise man Zug- und Druckspannungen,


Fig. 252.



d. h. die Plus- und Minuszeichen für die Diagonalen bei Anwendung von Druckstreben sowie für die Gurtungen und Pfosten zu vertauschen hat, wenn die gerade Gurtung oben liegt, ist leicht zu entscheiden.

Brückenträger mit parabelförmiger Gurtung sind in größerem Maßstabe zuerst von Brunel ausgeführt. Dahin gehört beispielsweise die Windsorbrücke*) mit einer lichten Spannweite von 57,25 m und einer Höhe der Träger in der Mitte von 7,6 m. Die obere Gurtung hat dabei die Form eines aus Blechplatten gebildeten gleichschenkeligen Dreiecks mit horizontaler

*) Zeitschr. f. Bauwesen von Erbkam, 1861. S. 111.

oben liegender Basis, während für die untere Gurtung und für die Verticalen die doppelt T förmige Querschnittsgestalt gewählt ist; die mit Keilvorrichtungen zum Anspannen versehenen gekreuzten Diagonalen bestehen aus flachen Zugschienen. Bei der gleichfalls von **Brunel** ausgeführten Saltashbrücke bei Plymouth haben die Träger bei 139 m Spannweite in der Mitte 17 m Höhe erhalten, und es ist auch für die untere Gurtung nach Art der Fischbauchträger eine gekrümmte Form gewählt worden.

In Fig. 253 ist ein Theil der schiefen Eisenbahnbrücke abgebildet, welche zu Oudenarden über die Schelde führt. Diese Brücke gehört in gewissem

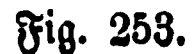
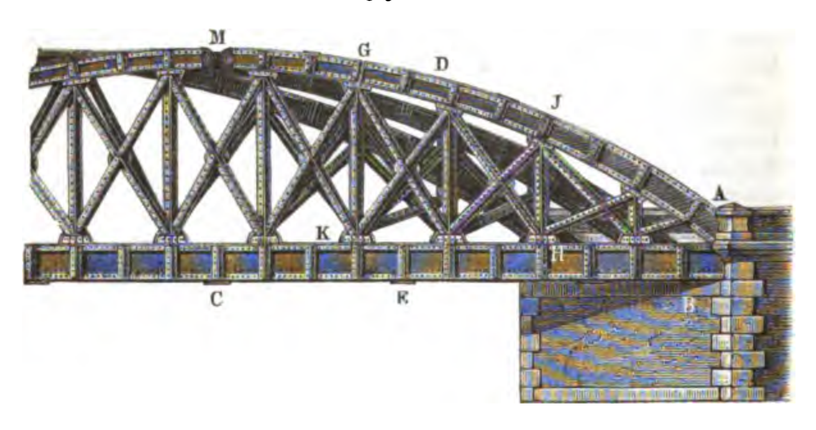


Fig. 253.



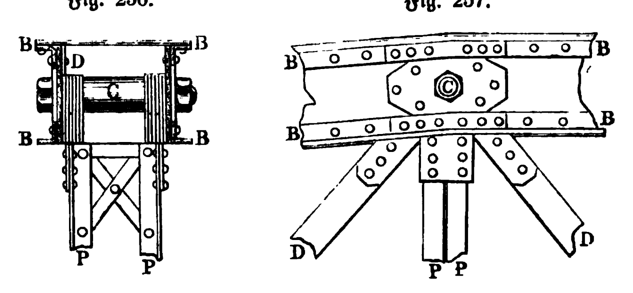
Grade dem Scharnierbrückensysteme (s. unten) an, indem hierbei die obere Gurtung aus zwei gesonderten Stücken besteht, welche sich in dem Scheitelscharniere *M* gegen einander stemmen, eine Anordnung, wie sie wohl auch bei gewissen Bogenbrücken gewählt wird, um den nachtheiligen Einflüssen zu begegnen, welche durch Temperaturveränderungen und einseitige Belastungen hervorgerufen werden. An den Enden sind die Gurtungen natürlich fest durch Nietung mit einander verbunden, und während der Träger an dem einen Ende fest auf dem Pfeilerkopfe *B* aufruht, ist dem anderen Ende wegen der Temperaturveränderungen vermittelst untergelegter Walzen eine kleine Verschiebung auf dem Pfeiler gestattet. Die Länge eines Trägers beträgt 27,8 m bei einer Höhe von 6 m in der Mitte. Die Gurtungen sind aus Eisenblech von 10 bis 13 mm Dicke mit doppelt T förmigem Querschnitte hergestellt und mit den verticalen Pfosten *KG*, *JH* und diagonalen Zugbändern *DH*, *DK* fest vernietet. Diese Brücke hat noch die Eigenthümlichkeit, daß zwischen den die Hauptträger verbindenden Querträgern Ziegelgewölbe ausgeführt sind, welche ein über 0,5 m dickes Schotterbett für die Bahnschwellen tragen.

Eine sehr schöne Brücke mit Parabelträgern ist die über die Brahe bei Czersk *) geführte schiefe Eisenbahnbrücke. Dieselbe überspannt jede der beiden 63,56′ = 19,95 m im Lichten weiten Oeffnungen unter einem Winkel von 58° 29′ gegen die Stromrichtung, wonach den beiden Parabelträgern, welche für jedes Geleise aufgestellt sind, eine Länge von 81′ = 25,4 m zwischen den Auflagerpunkten und der Parabel, nach welcher die obere Gurtung angeordnet ist, eine Pfeilhöhe zwischen den Schwerpunkten der Gurtungen von $\frac{l}{8} = 3,2$ m gegeben worden ist.

Fig. 254. Fig. 255.

Während die untere Gurtung oder der Zugbaum nach den Figuren 254 und 255 aus vier Flachschienen A von 26 × 130 mm gebildet ist, durch deren Zwischenraum horizontale Diagonalstangen zur Herstellung eines

Fig. 256. Fig. 257.

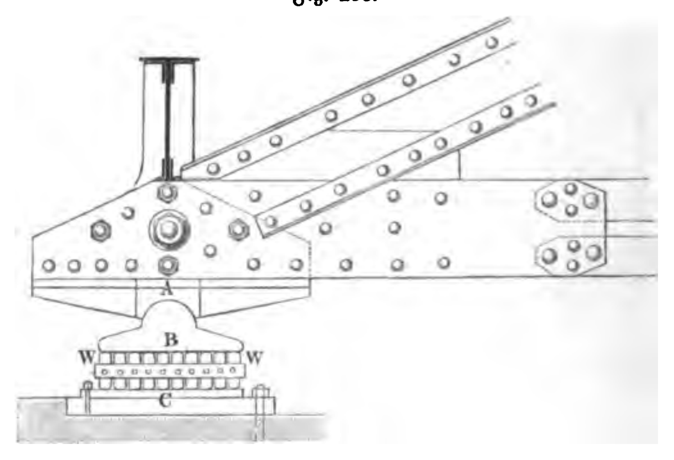


Kreuzverbandes unterhalb der Fahrbahn hindurchgehen, ist der oberen Gurtung ein druckfähiger Querschnitt durch zwei ⊏förmige Balken B von 0,314 m Höhe, Fig. 256 und Fig. 257, gegeben, welche oberhalb durch Gitter-

*) S. Schwedler's Aufsatz in Erbkam's Zeitschr. f. Bauwesen 1861.

stäbe gegen einander versteift sind. Desgleichen sind die verticalen Pfosten P aus je vier Eckeisen mit zwischengesetztem Gitter gebildet, während die Diagonalen D aus je zwei Flachschienen von 10×105 mm bestehen. Die Verbindung der Gurtungen mit den Zwischengliedern ist, wie aus den Figuren 254 bis 257 ersichtlich ist, überall durch Bolzen C von 52 mm Dicke gebildet, in deren Axen die Schwerlinien der verbundenen Theile sich kreuzen. Auch hier sind die Trägerenden jeder Oeffnung auf einer Seite durch ein festes Auflager auf dem Pfeiler gestützt, während jedes der anderen Enden mit Hülfe eines gußeisernen Schuhes A, Fig. 258, und einer Platte B auf eine Anzahl (10) von Walzensegmenten W drückt, welche auf der

Fig. 258.



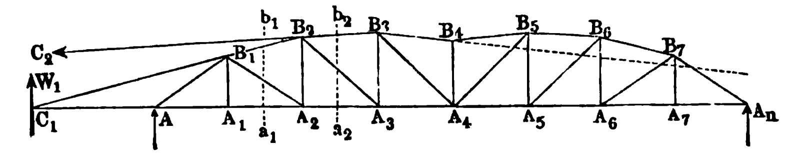
Stützplatte C des Landpfeilers ruhen. Diese Walzensegmente, mit ihren Zapfen in einem viereckigen Rahmen gehalten, gestatten vermöge der ihnen möglichen pendelnden Bewegung die horizontale Verschiebung von ungefähr 30 mm, welche die Längenänderung des Trägers in Folge der Temperaturschwankungen nothwendig macht. Die zehn Walzen von 0,118 m Durchmesser und 0,52 m Breite haben einen Maximaldruck von 36 Tonnen auf die Stützplatte zu übertragen, während sie mit Sicherheit, ohne die Elasticität des Gußeisens zu gefährden, etwa 46 Tonnen auszuhalten vermögen, nämlich 1 Ctr. pro 1″ Durchmesser und 1″ Breite, d. h. ca. 7,5 kg pro 1 cm Durchmesser und 1 cm Breite, daher

$$10 . 52 . 11{,}8 . 7{,}5 = 46\,000 \text{ kg}.$$

§. 57. **Schwedler'sche Träger.** Im vorhergehenden Paragraphen wurde gefunden, daß bei dem Parabelträger, dessen Form aus der Bedingung einer constanten Spannung in der geraden Gurtung folgte, die Dia-

gonalen bei der vollen Belastung gar keiner Spannung unterworfen sind, während durch die einseitigen Belastungen jede Diagonale einer größten positiven und einer größten negativen Spannung von demselben Betrage ausgesetzt wird. Der letztere Umstand macht daher die Anordnung von Gegenstreben in allen Feldern nöthig, wenn man die Bedingung stellt, daß die Diagonalen nur in einem Sinne, entweder nur auf Zug oder nur auf Druck angesprochen werden sollen. Man kann das letztere indessen auch erreichen, ohne gekreuzte Streben anwenden zu müssen. Soll z. B. in einem beliebigen Felde, in welchem nur eine Diagonale angebracht ist, die letztere in allen Fällen nur durch Zugkräfte angegriffen werden, so hat man nur nöthig, durch die Form des Trägers dafür zu sorgen, daß bei derjenigen einseitigen Belastungsart, welche nach dem Vorstehenden die größte Druckspannung in der Diagonale hervorzurufen sucht, diese Druckspannung gleich Null ausfällt. Wenn diese Bedingung für die größte negative Spannung erreichbar, also $-T_{max} = 0$ ist, so wird offenbar jede andere in der Diagonale auftretende Spannung positiv sein, mit anderen Worten, die Diagonale wird nur durch Zugkräfte angegriffen werden. Nun ist aus dem Vorhergehenden aber leicht zu erkennen, daß die vorausgesetzte Bedingung erfüllt ist, sobald die beiden Gurtungsstücke des betreffenden Feldes sich in einem Punkte schneiden, durch welchen auch die Resultirende aller derjenigen äußeren Kräfte hindurchgeht, die auf das Trägerstück wirken, das zwischen dem betrachteten Felde und dem einen Stützpunkte gelegen ist. Sollen z. B. in der Diagonale $A_2 B_1$, Fig. 259, nur Zugspannungen auftreten, so denkt man sich diejenige Belastung, welche in dieser Diagonale das Minimum der

Fig. 259.



Spannung, d. h. die größte Druckspannung zu erzeugen strebt, welcher Zustand bekanntlich durch eine Belastung aller links gelegenen Knotenpunkte, jedes durch k, dargestellt ist. Denkt man nun durch die Diagonale einen Schnitt $a_1 b_1$ gelegt, so muß das Balkenstück $a_1 A b_1$ im Gleichgewichte sein unter dem Einflusse aller äußeren darauf wirkenden Kräfte und der drei Spannungen U_2, O_2 und T_1 der durchschnittenen Glieder. Die beiden Spannungen U_2 und O_2 haben eine durch ihren Schnittpunkt C_1 gehende Mittelkraft, und wenn die Resultirende W_1 aller äußeren Kräfte ebenfalls durch diesen Punkt C_1 geht, so fällt die Spannung T_1 der Diagonale gleich

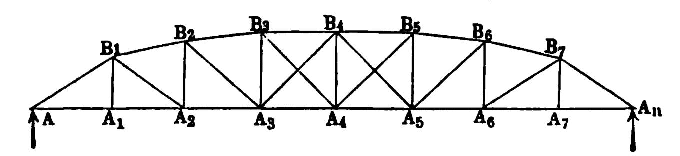
Null aus, wie man findet, wenn man die Summe der statischen Momente aller vier Kräfte W_1, U_2, O_2 und T_1 in Bezug auf C_1 gleich Null setzt. Um daher der gestellten Bedingung zu genügen, hat man nur nöthig, den Durchschnittspunkt C_1 der geraden Gurtung mit der Resultirenden W_1 aller auf das betrachtete Balkenstück wirkenden äußeren Kräfte zu bestimmen, und der oberen Gurtung $B_1 B_2$ eine durch diesen Punkt gehende Richtung zu geben. Wäre etwa die Höhe des Verticalständers $A_2 B_2 = h_2$ gegeben, so erhielte man durch die so gefundene Richtung $B_2 C_1$ die Höhe $A_1 B_1 = h_1$ des vorhergehenden Pfostens. Bestimmt man in derselben Art den Durchschnittspunkt C_2, in welchen die gerade untere Gurtung von der Resultirenden W_2 aller auf das Balkenstück $a_2 A b_2$ wirkenden äußeren Kräfte getroffen wird, so erhält man in der Verbindungslinie von C_2 mit B_2 die Richtung und den Knotenpunkt B_3 der Gurtung $B_2 B_3$. Ebenso kann man die rechts von B_3 gelegenen Knotenpunkte bestimmen.

Es kann hierbei bemerkt werden, daß jede einzelne der besagten Resultirenden, wie W_2, die Mittelkraft ist aus der in A vertical aufwärts gerichteten jedesmaligen Lagerreaction R, und den vertical abwärts wirkenden zwischen A und dem Durchschnitte angebrachten Belastungen von $q = p + k$ für jeden Knotenpunkt. Diese Mittelkraft ist daher gleich der in dem betrachteten Querschnitte wirkenden verticalen Scheerkraft V. Der Angriffspunkt C dieser Resultirenden liegt nach den bekannten Gesetzen, welche für die Zusammensetzung paralleler entgegengesetzter Kräfte gelten, immer außerhalb der Kräfte, und zwar auf der Seite der größeren von ihnen. So lange daher die Stützenreaction R an Größe die Summe der gedachten Belastungen q übertrifft, d. h. so lange die verticale Scheerkraft V positiv oder aufwärts gerichtet ist, muß C links von A gelegen sein, das zugehörige Gurtungsstück also nach der Trägermitte hin ansteigen. Für den Fall, daß die Summe der Belastungen des Trägerstückes gleich der Auflagerreaction also $V = 0$ ist, rückt der Punkt C ins Unendliche und die betreffende Gurtung fällt horizontal aus. Wird endlich die Mittelkraft W oder die Scheerkraft V negativ, so erscheint der besagte Schnittpunkt C auf der anderen Seite des Querschnittes und die Gurtung des Trägers wird an dieser Stelle nach der Mitte hin abfallen. Dieses Verhalten stellt sich in der Figur in dem Felde $A_3 A_4$ ein, indem hier vorausgesetzt ist, daß in dem Pfosten $A_3 B_3$ ein Wechsel der Scheerkraft V stattfindet, derart, daß diese Kraft daselbst positiv ist, wenn nur die Knotenpunkte A_1 und A_2 mit je q belastet sind, während bei einer Belastung auch von A_3 eine negative Schubkraft in dem Felde $A_3 A_4$ erzeugt wird. Man erkennt daraus, daß in Folge dessen der Träger nach der Mitte hin eine geringere Höhe h_4 erhält, als in dem links davon entfernten Knotenpunkte A_3. Gesetzt $A_4 B_4$ wäre der mittlere Pfosten, so läßt sich auch für die rechte Trägerhälfte $A_4 A_n$ durch eine

ganz ähnliche Betrachtung, wie sie hier angeführt ist, die Form der oberen Gurtung unter der Bedingung feststellen, daß die Diagonalen nur gezogen werden sollen, für welchen Fall man natürlich die Diagonalen von der Mitte aus nach der entgegengesetzten Richtung, d. h. nach dem jenseitigen Auflager A_n ansteigen lassen muß.

Die in solcher Art festgestellte Trägerform hat den Uebelstand, daß in der Mitte, wo das Biegungsmoment ein Maximum ist, die Spannung der Gurtung wegen der daselbst verminderten Höhe eine beträchtliche und nach beiden Seiten hin schnell abnehmende ist, sowie daß die Ausführung des Trägers eine schwierige wird. Diese Uebelstände sind bei dem Schwedler'schen Träger dadurch beseitigt, daß der mittlere Theil des Trägers zwischen den beiden höchsten Verticalen $A_3 B_3$ und $A_5 B_5$ mit parallelen Gurtungen nach Fig. 260 versehen wird. In Folge dessen wird in diesen mittleren Feldern die Bedingung, daß die Diagonalen Druckkräften gar nicht ausgesetzt seien, nicht mehr erfüllt sein, und man hat daher, wie bei den Parallel-

Fig. 260.



trägern, in diesen mittleren Feldern gekreuzte Diagonalen anzubringen, wenn dieselben nur in einer Richtung widerstandsfähig sind. Für diesen mittleren Trägertheil mit parallelen Gurtungen gelten überall die in §. 54 über Parallelträger angeführten Beziehungen, und man kann überhaupt den Schwedlerträger als einen Parallelträger ansehen, bei welchem die obere Gurtung beiderseits so nach der unteren herabgezogen ist, daß der mehrerwähnten Bedingung genügt wird, wonach in den Seitenfeldern die einfachen Diagonalen nur gezogen werden.

Die Erstreckung dieses mittleren Stückes zu jeder Seite der Trägermitte, also die Anzahl der mit Gegenstreben zu versehenden Felder, erhält man wieder durch Ermittelung der Strecke, auf welcher die Verticalkraft ihre Richtung ändert, d. h. den Werth Null annehmen kann. Bezeichnet n die ganze Anzahl der im Träger vorhandenen Felder von der Länge a, und ist ν die Anzahl der Felder zwischen dem Auflager A und dem Pfosten $A_\nu B_\nu$, so erhält man den Auflagerdruck R_ν in A, wenn der Träger auf der Strecke $A A_\nu$ mit der beweglichen Last bedeckt ist, zu:

$$R_\nu = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1+n-2+\cdots n-\nu}{n} k = \frac{n-1}{2} p + \left(1 - \frac{\nu+1}{2n}\right) \nu k \quad . \quad (1)$$

und folglich die verticale Scheerkraft in dem auf den Pfosten A_ν folgenden Felde zu:

$$V_\nu = R_\nu - \nu(p+k) = \frac{n-1}{2}p - \frac{\nu+1}{2n}\nu k - \nu p \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so erhält man

$$n\,(n-1)\,p = (\nu+1)\,\nu k + 2\,n\,\nu\,p,$$

woraus sich

$$\nu = -\left(\frac{1}{2} + n\frac{p}{k}\right) + \sqrt{n\,(n-1)\frac{p}{k} + \left(\frac{1}{2} + n\frac{p}{k}\right)^2} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

ergiebt.

Aus dieser Gleichung findet sich die Anzahl der in der Mitte mit parallelen Gurtungen und daher mit Gegenstreben zu versehenden Felder. Beispielsweise erhält man für $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}k$ für ν den Werth

$$\nu = -3{,}83 + \sqrt{30 + 3{,}83^2} = 2{,}81,$$

woraus sich ergiebt, daß die parallelen Gurtungen bis zum dritten Pfosten neben jedem Auflager reichen, also über vier Felder in der Mitte sich erstrecken.

Hat man für diesen mittleren Theil $A_3 A_5$, Fig. 260, die Höhe der Pfosten $A_3 B_3 = A_5 B_5 = h$ angenommen, so handelt es sich darum, die Höhen der übrigen Pfosten $A_1 B_1 = h_1$, $A_2 B_2 = h_2 \ldots$ so zu bestimmen, daß der im Eingange erwähnten Bedingung Genüge gethan wird. Um etwa die Höhe $h_2 = A_2 B_2$ zu ermitteln, denkt man sich die beiden Knotenpunkte A_1 und A_2 von der Verkehrslast angegriffen und bestimmt den Durchschnittspunkt C_2, in welchem die Resultirende aller auf $A_2 A B_2$ wirkenden äußeren Kräfte die horizontale Gurtung schneidet, welcher Punkt die Richtung $B_3 B_2$ und also die Höhe $A_2 B_2$ ergiebt. Die Festsetzung dieses Punktes durch ein graphisches Verfahren bietet keine Schwierigkeit dar. Will man den Punkt C durch Rechnung bestimmen, so bezeichne man wieder mit ν die Anzahl der belasteten Felder, also ist hier für A_2 $\nu = 2$ anzunehmen, und bestimme nach (1) die Größe des Auflagerdrucks R_ν für diese vorausgesetzte Belastung. Bezeichnet nun $c = AC$ die Entfernung des gesuchten Schnittpunktes C von dem Auflager A, so gilt die Momentengleichung in Bezug auf den Punkt C:

$$R_\nu c = (p+k)(c + a + c + 2a + \cdots c + \nu a) = q\left(\nu c + \frac{\nu+1}{2}\nu a\right) \quad (4)$$

woraus

$$c = \frac{\frac{\nu+1}{2}\nu a q}{R_\nu - q\nu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

folgt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ findet man die Abstände c und damit die Höhen sämmtlicher Pfosten $h_1, h_2, h_3 \ldots$, wenn die Höhe h der mittleren gegeben ist. Daß diese Verticalpfosten hier andere Werthe annehmen, als bei dem Parabelträger, ist selbstredend; ebenso ist es klar, daß bei diesem Träger für den Zustand der gleichförmigen Belastung die Spannung der unteren Gurtung nicht mehr in allen Feldern von gleicher Größe ist, wie es bei dem Parabelträger der Fall ist. Die Bestimmung der größten Anstrengungen der Gurtungen und Zwischentheile geschieht in derselben Art, wie vorstehend für den Parabelträger und für den Parallelträger gezeigt worden ist.

Bezeichnet

$$M_\nu = q\,\frac{n-1}{2}\,\nu a - q\,(1 + 2 \ldots \nu - 1)\,a = q\,\frac{n-\nu}{2}\,\nu a \quad . \quad (6)$$

das Biegungsmoment für den Querschnitt durch den νten Verticalständer für den Fall, daß der Träger über seine ganze Länge mit der Verkehrslast bedeckt ist, so findet man die Zugspannung $U_{\nu+1}$ der unteren Gurtung in dem auf diesen Pfosten folgenden Felde zu

$$U_{\nu+1} = \frac{1}{h_\nu}\,M_\nu = q\,\frac{n-\nu}{2}\,\nu\,\frac{a}{h_\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

unter h_ν die Höhe des νten Pfostens verstanden. Für die Spannung O_ν der oberen Gurtung in dem νten Felde, d. h. dem Pfosten $A_\nu B_\nu$ vorhergehenden Felde, deren Neigung gegen den Horizont α_ν sein mag, findet man dann ebenfalls zu

$$O_\nu = \frac{1}{\cos\alpha_\nu}\,\frac{M_\nu}{h_\nu} = \frac{U_{\nu+1}}{\cos\alpha_\nu} = \frac{1}{\cos\alpha_\nu}\,\frac{n-\nu}{2}\,\nu\,\frac{a}{h_\nu} \quad . \quad . \quad (8)$$

Da nun $\frac{a}{\cos\alpha_\nu}$ die Länge λ des betreffenden Gurtungsstückes bedeutet, so kann man wie beim Parabelträger auch allgemein

$$O_\nu = \frac{\lambda}{a}\,U_{\nu+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

schreiben, welche Gleichung für jede Hälfte des Trägers unter der Voraussetzung gilt, daß die Zählung der Felder von dem zugehörigen Auflagerpunkte nach der Mitte hin geschieht.

Ist, wie in der Figur, die Zahl der Felder eine gerade, so sind die Maximalspannungen der unteren sowohl wie der oberen Gurtung in den beiden mittleren Feldern je unter sich gleich. Wenn dagegen die Felderzahl eine ungerade ist, so ist in dem mittleren Felde die Spannung $U_{\frac{n+1}{2}}$ gleich derjenigen der oberen Gurtung $O_{\frac{n+1}{2}}$, und da die Kreuzdiagonalen

dieses Feldes bei voller Belastung des Trägers keiner Anstrengung ausgesetzt sind, so ist auch die Spannung der Obergurtung in jedem der beiderseits anstoßenden Felder ebenso groß wie in dem mittleren.

Die größte Spannung einer Diagonale kann man wie bei dem Parabelträger dadurch finden, daß man die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnitt C der beiden Gurtungen ansetzt, welche dem von der Diagonale eingenommenen Felde angehören. Es läßt sich diese maximale Spannung aber auch direct finden, ohne daß man die Abstände c und d dieses Schnittpunktes von dem Auflager und der Diagonalenrichtung kennt. Denkt man sich nämlich den Balken im νten Felde, z. B. im dritten Felde durchschnitten und den ungünstigsten Belastungszustand, d. h. eine Belastung aller Knotenpunkte rechts vom Schnitte A_3 bis A_7 vorausgesetzt, so hat man, unter T_ν die Diagonalenspannung und unter δ_ν den Winkel der Diagonale B_2A_3A gegen den Horizont verstanden, wegen des Gleichgewichts im oberen Knotenpunkte B_2 die Gleichheit der Horizontalkräfte:

$$T_\nu \cos \delta_\nu = H_\nu - H_{\nu-1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

wenn mit H_ν und $H_{\nu-1}$ die horizontalen Spannungscomponenten bezeichnet werden, welche bei der vorausgesetzten Belastung bezw. in B_2B_3 und B_2B_1 sich einstellen. Nun findet sich aber für diesen Zustand, für welchen der Auflagerdruck in A durch

$$R_\nu = p\,\frac{n-1}{2} + k\,\frac{1+2+\cdots n-\nu}{n} \quad \ldots \quad (11)$$

gegeben ist, die Horizontalspannung

$$H_\nu = \frac{1}{h_\nu}\left[R_\nu \nu a - p(1+2+\cdots \nu-1)a\right] \quad \ldots \quad (12)$$

und

$$H_{\nu-1} = \frac{1}{h_{\nu-1}}\left[R_\nu(\nu-1)a - p(1+2+\cdots \nu-2)a\right], \quad (13)$$

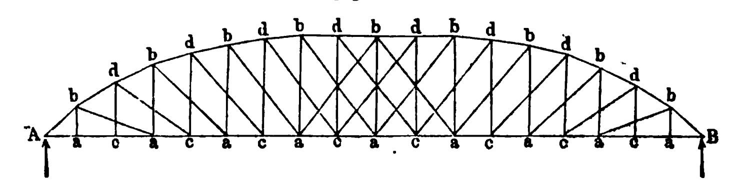
wodurch man nach (10) die gesuchte Maximalspannung T_ν der Diagonale findet. Desgleichen ergiebt sich für den Pfosten A_2B_2 die größte Spannung gleich der für denselben Belastungszustand ermittelten algebraischen Summe der Verticalcomponenten der in den drei Gliedern B_1B_2, B_3B_2 und B_2A_3 auftretenden Spannungen u. s. f.

Auch diese Träger können, um die Entfernungen der Knotenpunkte bei großen Spannweiten nicht zu groß und die Diagonalen nicht zu steil zu erhalten, mit mehrfachen Systemen von Zwischengliedern versehen werden, wie dies beispielsweise bei den Trägern der Elbbrücke in der Berlin-Lehrter-Eisenbahn*) geschehen ist. Fig. 261 zeigt das System eines solchen Trägers,

*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1868, S. 517.

welcher bei einer Entfernung der Stützen von 210′ (65,9 m) 16 Felder von 12′ (3,766 m) und zwei Endfelder von je 9′ (2,825 m) erhalten hat.

Fig. 261.



Das System des Fachwerks ist ein doppeltes, und man hat bei der Berechnung eines solchen Trägers jedes der beiden Systeme *Aabab ... B* und *Acdcd ... B* für sich zu berechnen und die für die einzelnen Gurtungstheile erhaltenen Spannungszahlen entsprechend zu addiren.

Beispiel. Für eine Spannweite von 32 m soll ein in der Mitte 4 m hoher Schwedlerträger aus 8 Feldern bestehend angeordnet werden. Für denselben sollen die Form und die größten Spannungen der Glieder unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß das Eigengewicht der Construction pro laufenden Meter 1 Tonne und die Verkehrslast für dieselbe Länge 2,5 Tonnen beträgt?

Hier ist die horizontale Weite jedes der $n = 8$ Felder durch $a = \frac{32}{8} = 4$ m, daher die Belastung eines Knotenpunktes durch $p = 4$ t, $k = 10$ t und bezw. $q = p + k = 14$ t gegeben. Um die Höhen der Pfosten A_1B_1, A_2B_2 ...,

Fig. 262.

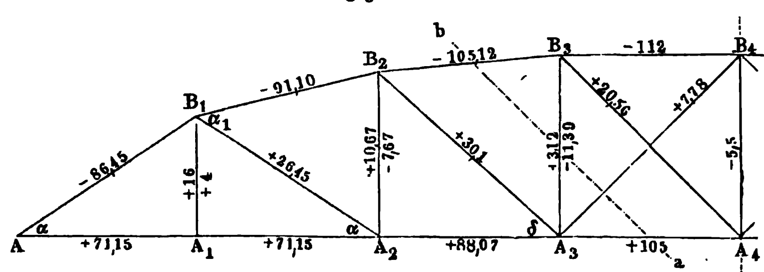


Fig. 262, zu bestimmen, findet sich zunächst der Auflagerdruck in A, für den Fall, daß nur der Knotenpunkt A_1 durch die Verkehrslast angegriffen wird, zu

$$R_1 = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1}{n} k = \frac{7}{2} 4 + \frac{7}{8} 10 = 22{,}75 \text{ t}.$$

Ebenso erhält man diese Auflagerdrucke für die Belastung der zwei Knotenpunkte A_1 und A_2, bezw. der drei Punkte A_1, A_2 und A_3 zu

$$R_2 = \frac{7}{2} 4 + \frac{7+6}{8} 10 = 30{,}25 \text{ t} \quad \text{und}$$

$$R_3 = \frac{7}{2} 4 + \frac{7+6+5}{8} 10 = 36{,}5 \text{ t}.$$

Mit diesen Werthen bestimmen sich daher nach (5) die Abstände c_1, c_2 und c_3 von A, in welchen die horizontale Gurtung von den oberen Gurtungsstücken $B_1 B_2$, $B_2 B_3$ und $B_3 B_4$ getroffen wird, zu

$$c_1 = \frac{\frac{2}{2}\,1.4.14}{22{,}75 - 14} = \frac{56}{8{,}75} = 6{,}4\,\mathrm{m},$$

$$c_2 = \frac{\frac{3}{2}\,2.4.14}{30{,}25 - 2.14} = \frac{168}{2{,}25} = 74{,}67\,\mathrm{m},$$

$$c_3 = \frac{\frac{4}{2}.3.4.14}{36{,}5 - 3.14} = -\frac{336}{5{,}5} = -61{,}1\,\mathrm{m}.$$

Der negative Werth von c_3 deutet an, daß die obere Gurtung zwischen A_3 und A_4 horizontal zu machen, und daß daher ein Feld zu jeder Seite der Mitte mit Gegenstreben zu versehen ist.

Wenn nun dem Pfosten $A_3 B_3$ die verlangte Höhe $h_4 = h_3 = 4\,\mathrm{m}$ gegeben wird, so erhält man

$$h_2 = h_3 \frac{c_2 + 2a}{c_2 + 3a} = 4\,\frac{74{,}67 + 8}{74{,}67 + 12} = 3{,}815\,\mathrm{m}$$

und

$$h_1 = h_2 \frac{c_1 + a}{c_1 + 2a} = 3{,}815\,\frac{6{,}4 + 4}{6{,}4 + 8} = 2{,}755\,\mathrm{m}.$$

Hieraus folgen nun weiter die Neigungen der Gurtungen und Streben gegen den Horizont aus:

$$tg\,\alpha = \frac{2{,}755}{4} = 0{,}689; \qquad \alpha = 34^0\,35'$$

$$tg\,\alpha_1 = \frac{3{,}815 - 2{,}755}{4} = 0{,}265; \quad \alpha_1 = 14^0\,50'$$

$$tg\,\alpha_2 = \frac{4 - 3{,}815}{4} = 0{,}0462; \qquad \alpha_2 = 2^0\,40'$$

$$tg\,\delta = \frac{3{,}815}{4} = 0{,}954; \qquad \delta = 43^0\,40'.$$

Um die Spannungen der unteren Gurtung zu finden, bestimmt man für den Zustand der vollen Trägerbelastung die Biegungsmomente für die einzelnen Knotenpunkte (s. §. 54, Gleichung 8a):

$$M_1 = q\,a\,\nu\,\frac{n - \nu}{2} = 14.4\,\frac{7}{2} = 196\,\mathrm{mt}.$$

$$M_2 = 14.4.2\,\frac{6}{2} = 336\,\mathrm{mt}.$$

$$M_3 = 14.4.3\,\frac{5}{2} = 420\,\mathrm{mt}.$$

$$M_4 = 14.4.4\,\frac{4}{2} = 448\,\mathrm{mt}.$$

Hieraus findet man die Gurtungskräfte für die einzelnen Felder, wenn man immer den unteren Knotenpunkt A für die Bestimmung der Spannungen O

und den oberen Knotenpunkt B für die Spannungen U zum Mittelpunkte der Momente annimmt. Danach erhält man für AA_1 mit dem Momentenmittelpunkte in B_1:

$$U_1 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{196}{2,755} = 71,15 \text{ t.}$$

Ebenso groß ist auch U_2 in $A_1 A_2$, da in A_1 die Horizontalkraft sich nicht ändern kann, insofern hier kein geneigtes Glied zur Aufnahme einer horizontalen Componente sich anschließt. Wählt man A_1 zum Momentenmittelpunkte, so folgt aus $M_1 = O_1 h_1 \cos \alpha$ die Spannung:

$$O_1 = \frac{M_1}{h_1 \cos \alpha} = \frac{196}{2,755 \,.\, \cos 34^0\, 35'} = \frac{196}{2,755 \,.\, 0,823} = 86,45 \text{ t.}$$

In ähnlicher Art erhält man:

$$U_3 = \frac{M_2}{h_2} = \frac{336}{3,815} = 88,07 \text{ t.}$$

$$O_2 = \frac{M_2}{h_2 \cos \alpha_1} = \frac{336}{3,815 \,.\, \cos 14^0\, 50'} = \frac{336}{3,815 \,.\, 0,9667} = 91,10 \text{ t.}$$

$$U_4 = \frac{M_3}{h_3} = \frac{420}{4} = 105 \text{ t.}$$

$$O_3 = \frac{M_3}{h_3 \cos \alpha_2} = \frac{420}{4 \,.\, \cos 2^0\, 40'} = \frac{420}{4 \,.\, 0,9989} = 105,12 \text{ t.}$$

$$O_4 = \frac{M_4}{h_4} = \frac{448}{4} = 112 \text{ t.}$$

Die größte Spannung der Strebe $A_2 B_1$ findet sich bei einer Belastung des rechten Trägerstückes bis zum Knotenpunkte A_2, für welchen Fall der Auflagerdruck in A zu

$$R_1 = 4\,\frac{7}{2} + 10\,\frac{1+2+3+\cdots 6}{8} = 40,25 \text{ t.}$$

sich bestimmt. Da ferner der Abstand d_1 der Diagonale $A_2 B_1$ von dem Schnittpunkte der Gurtungen AA_2 und $B_1 B_2$ durch

$$d_1 = (c_1 + 2\,a) \sin \alpha = 14,4 \,.\, \sin 34^0\, 35' = 14,4 \,.\, 0,567 = 8,165 \text{ m}$$

bestimmt ist, so findet sich T_1 aus

$$T_1 d_1 = R_1 c_1 - p\,(c_1 + a) = 40,25 \,.\, 6,4 - 4 \,.\, 10,4 = 216,0$$

zu

$$T_1 = \frac{216}{8,165} = 26,45 \text{ t.}$$

In gleicher Weise hat man für die Belastung des rechten Trägertheils bis einschließlich A_3 den Auflagerdruck in A gleich:

$$R_2 = 4\,\frac{7}{2} + 10\,\frac{1+2+3+\cdots 5}{8} = 32,75 \text{ t,}$$

und den betreffenden Hebelarm

$$d_2 = (c_2 + 3\,a) \sin \delta = (74,67 + 12) \sin 43^0\, 40' = 86,67 \,.\, 0,690 = 59,80 \text{ m,}$$

so daß man aus

$$T_2 d_2 = 32,75 \,.\, 74,67 - 4\,(2 \,.\, 74,67 + 3 \,.\, 4) = 1800$$

$$T_2 = \frac{1800}{59,8} = 30,1 \text{ t}$$

erhält.

Die Diagonale $A_4 B_3$ erreicht ihre größte Spannung, wenn alle Knotenpunkte rechts bis zu A_4 einschließlich belastet sind, während die Gegenstrebe $A_3 B_4$ bei einer Belastung aller Knoten von A bis A_3 am stärksten gezogen wird. Man findet diese Spannungen für dieses Feld wie bei den Parallelträgern, indem man die betreffende verticale Scheerkraft gleich der verticalen Componente der Diagonalkraft setzt. Daher findet sich für $A_4 B_3$ die Spannung T_3 aus

$$T_3 \sin 45^0 = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+4}{8} - 3 . 4 = 14{,}5 \text{ t}$$

zu

$$T_3 = \frac{14{,}5}{0{,}7071} = 20{,}56 \text{ t},$$

und für $A_3 B_4$ die größte Spannung T_3' aus

$$T_3' \sin 45^0 = -4 \frac{7}{2} - 10 \frac{7+6+5}{8} + 3 . 14 = 5{,}5$$

zu

$$T_3' = \frac{5{,}5}{0{,}7071} = 7{,}78 \text{ t}.$$

Für den Pfosten $A_1 B_1$ ergeben sich zunächst wieder die größte und die kleinste Spannung zu resp.

$$P_{1max} = + p + k = 16 \text{ t}$$

und

$$P_{1min} = + p = 4 \text{ t},$$

da die in A_1 wirkende Belastung lediglich durch den Pfosten $A_1 B_1$ aufgenommen werden muß.

Für $A_2 B_2$ hat man einmal die Knotenpunkte $A_3 A_4 \ldots A_7$ und das andere Mal diejenigen A_1 und A_2 mit je k belastet zu denken, und erhält für den Durchschnitt zwischen $A A_2$ und $B_1 B_2$ im Abstande $c_1 = 6{,}4$ m von A als Momentenmittelpunkt die Gleichungen:

$$-P_{2min}(c_1 + 2a) = \left(p \frac{7}{2} + k \frac{1+2+3+4+5}{8}\right) c_1 - p(c_1 + a + c_1 + 2a)$$
$$= 209{,}6 - 99{,}2 = 110{,}4,$$

woraus

$$P_2 = -\frac{110{,}4}{14{,}4} = -7{,}67 \text{ t}$$

Druckspannung folgt, und

$$-P_{2max}(c_1 + 2a) = \left(p \frac{7}{2} + k \frac{7+6}{8}\right) c_1 - q(c_1 + a + c_1 + 2a)$$
$$= 193{,}6 - 347{,}2 = -153{,}6,$$

daher

$$P_{2max} = \frac{153{,}6}{14{,}4} = 10{,}67 \text{ t}$$

Zugspannung.

Ebenso erhält man für $A_3 B_3$, wenn der Schnittpunkt von $A A_3$ und $B_2 B_3$ im Abstande $c_2 = 74{,}67$ von A als Momentenmittelpunkt und eine Belastung von $A_4, A_5 \ldots A_7$ angenommen wird:

$$-P_{3min}(c_2 + 3a) = \left(p \frac{7}{2} + k \frac{1+2+3+4}{8}\right) c_2 - p(3c_1 + a + 2a + 3a)$$
$$= 1978{,}75 - 992 = 986{,}75,$$

daher

$$P_{3min} = -\frac{986,75}{86,67} = -11,39\,t$$

Druckspannung.

Wenn andererseits die Knotenpunkte A_1, A_2 und A_3 belastet werden, so hat man zu beachten, daß der Schnitt nach ab die nunmehr mit $T_3' = 7,78\,t$ gezogene Diagonale $A_3 B_4$ trifft, so daß man auch deren verticale Componente $T_3'\ sin\ 45^0 = 5,5\,t$ in der Gleichgewichtsgleichung zu berücksichtigen hat. Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$-(P_{3max} + 5,5)(c_2 + 3a) = \left(p\,\frac{7}{2} + k\,\frac{7+6+5}{8}\right)c_2 - q\,(3c_2 + 6a)$$

$$= 36,5\,.\,74,67 - 14\,.\,248 = 2725,33 - 3472 = -746,67,$$

woraus

$$P_{3max} = \frac{746,67}{86,67} - 5,5 = 3,12\,t$$

Zug folgt.

Der mittlere Pfosten $A_4 B_4$ kann nur durch Druckkräfte beansprucht werden, da die horizontale Gurtung in B_4 verticale Kräfte nicht aufnehmen kann und die in B_4 sich anschließenden beiderseits abfallenden Diagonalen nicht druckfähig sind, was in dem Falle eines in $A_4 B_4$ auftretenden Zuges der Fall sein müßte. Die größte Druckkraft findet in $A_4 B_4$ statt, wenn die Diagonale $A_3 B_4$ ihrem größten Zuge

$$T_3' = \frac{5,5}{sin\ 45^0} = 7,78\,t$$

ausgesetzt ist, in welchem Falle der Pfosten mit

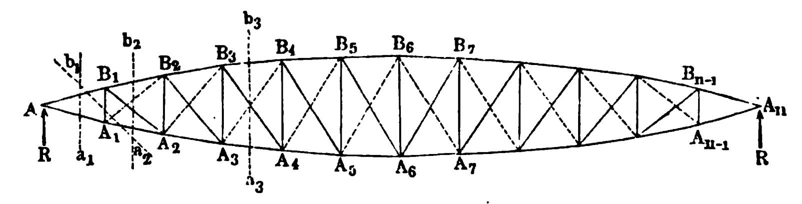
$$P_{4max} = 5,5\,t$$

auf Druck beansprucht wird.

Die ermittelten Spannungszahlen, welche für die andere Trägerhälfte der Symmetrie wegen ebenso groß ausfallen, sind in Fig. 262 eingetragen.

Pauli'sche Träger. Eine andere Trägerform ist die von v. Pauli angegebene, Fig. 263, welche u. a. bei der Mainzer Rheinbrücke zur Anwendung gekommen ist. §. 58.

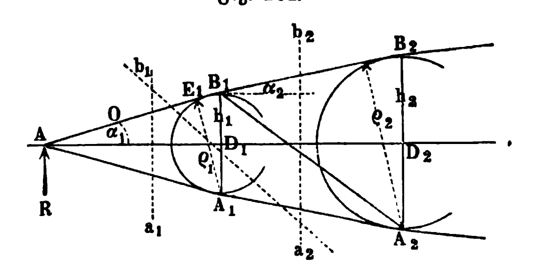
Fig. 263.



Dieser Träger stimmt mit dem Fischbauchträger, Fig. 250, darin überein, daß er symmetrisch zu der Horizontalen $A A_n$ durch die Auflager gebildet ist, folglich eine *gerade neutrale* Axe hat. Er unterscheidet sich aber von den Parabelträgern in der Gestalt der Gurtungen, für deren Form nämlich das Princip aufgestellt ist, daß die *Spannungen*

in den Gurtungen bei voller Belastung des Trägers in allen Feldern von gleicher Größe sein sollen, eine Bedingung, welche sich, wie die folgenden Betrachtungen ergeben, nicht in aller Strenge, sondern nur annähernd erfüllen läßt. Es möge vorausgesetzt werden, daß die Spannung in der oberen Gurtung überall gleich O sein soll, so findet man dieser Bedingung gemäß die Trägerform wie folgt. Man bestimme für den Träger, für welchen die Feldereintheilung und deren Belastung festgestellt ist, die Auflagerdrucke R, und die Biegungsmomente M_1, M_2 ... für die Querschnitte durch die Verticalpfosten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ ... der einen Trägerhälfte unter der Voraussetzung, daß der Träger über seine ganze Länge mit der größten Last $q = p + k$ bedeckt ist, für welchen Zustand bekanntlich in den Gurtungen überall der größte Spannungswerth eintritt. Bezeichnet nun $\varrho_1 = A_1 E_1$, Fig. 264, den normalen Abstand des Punktes A_1 von

Fig. 264.



der oberen Gurtung $A B_1$ des ersten Feldes, so hat man, unter O die Spannung dieser Gurtung verstanden, für den Knotenpunkt A_1 als Mittelpunkt der Momente, wenn man etwa nach $a_1 b_1$ einen Schnitt geführt denkt:

$$M_1 = \varrho_1 O,$$

woraus

$$\frac{M_1}{O} = \varrho_1 = h_1 \cos \alpha_1 = 2 a \sin \alpha_1 \quad \dots \dots \quad (1)$$

und

$$\sin \alpha_1 = \frac{\varrho_1}{2 a} = \frac{M_1}{2 a O} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

folgt, unter α_1 den Neigungswinkel des ersten Gurtungsstückes $A B_1$ gegen den Horizont verstanden. Man kann daher aus (2) den Winkel α_1, aus (1) den Abstand ϱ_1 und $h_1 = 2 a \, tg \, \alpha_1$ durch Rechnung bestimmen und die Knotenpunkte A_1 und B_1 feststellen. Graphisch hätte man um D_1 einen Kreisbogen mit dem Halbmesser $\frac{\varrho_1}{2}$ zu zeichnen, um in den von A aus an denselben gezogenen Tangenten $A B_1$ und $A A_1$ die Gurtungen des ersten

Feldes zu erhalten. Es ist klar, daß der Symmetrie wegen die Spannung U_1 in der unteren Gurtung AA_1 ebenfalls gleich O ist, denn für B_1 als Momentenmittelpunkt hat man gleichfalls

$$M_1 = \varrho_1 U_1 = \varrho_1 O.$$

Denkt man jetzt das zweite Feld nach $a_2 b_2$ durchschnitten, so hat man für A_2 als Momentenmittelpunkt:

$$\frac{M_2}{O} = \varrho_2 = h_2 \cos\alpha_2 = h_1 \cos\alpha_2 + 2a \sin\alpha_2, \quad . \quad . \quad (3)$$

woraus α_2 und h_2 berechnet werden können. Beschreibt man wieder um die Mitte D_2 des Pfostens $A_2 B_2$ einen Kreis mit dem Halbmesser $\frac{\varrho_2}{2}$, so erhält man in den Tangenten an denselben von A_1 und B_1 die Gurtungen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$. In dieser Weise lassen sich die Höhen sämmtlicher Pfosten bis zum mittleren $A_6 B_6$ bestimmen, wonach man die zweite Trägerhälfte symmetrisch zur ersten zu zeichnen hat.

Hierdurch erreicht man zwar, daß die Spannung in allen Theilen der oberen Gurtung, vorausgesetzt, daß die Felderzahl n eine gerade ist, denselben Betrag O annimmt, es ist aber leicht aus der Figur zu erkennen, daß die Spannungen in den unteren Gurtungstheilen, mit Ausnahme des ersten und letzten Stückes AA_1 und $A_{n-1}A_n$ von anderer Größe sind. Denkt man sich nämlich durch den ersten Pfosten einen Schnitt $a_2 b_1$, so hat man für den Knotenpunkt A_1, wie oben bemerkt:

$$M_1 = O\varrho_1 = O h_1 \cos\alpha_1,$$

während für den Knotenpunkt B_1 als Mittelpunkt die Gleichung gilt:

$$M_1 = U_2 h_1 \cos\alpha_2,$$

woraus

$$\frac{U_2}{O} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$$

folgt. Da diese Betrachtung für alle Felder gleichmäßig gilt, so kann man für die linke Trägerhälfte allgemein für das νte Feld:

$$\frac{U_\nu}{O} = \frac{\cos\alpha_{\nu-1}}{\cos\alpha_\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und für die rechte Hälfte von der Mitte bis A_n, in welcher die Streben nach entgegengesetzter Richtung ansteigend anzunehmen sind:

$$\frac{U_\nu}{O} = \frac{\cos\alpha_{\nu+1}}{\cos\alpha_\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

schreiben. Hieraus erkennt man, daß die Spannungen in der unteren Gurtung überall kleiner sind als in der oberen, und nach der Mitte hin in dem Maße wie das Verhältniß:

$$\frac{\cos\alpha_{\nu-1}}{\cos\alpha_\nu} \text{ bezw. } \frac{\cos\alpha_{\nu+1}}{\cos\alpha_\nu}$$

zunehmen. Es folgt daraus auch weiter, daß die Diagonalen bei diesem Träger für den Fall der gleichmäßigen Belastung keineswegs, wie bei dem Parabelträger, ganz ohne Spannung sind, denn denkt man sich durch irgend ein Feld einen Schnitt wie $a_3 b_3$, Fig. 263, gelegt, so erhält man durch Gleichsetzung der horizontalen Kraftcomponenten, wenn noch β_ν die Neigung der Diagonale gegen den Horizont und T_ν die Diagonalenkraft ist:

$$U_\nu \cos\alpha_\nu + T_\nu \cos\beta_\nu = O \cos\alpha_\nu,$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$T_\nu = O \frac{\cos\alpha_\nu - \cos\alpha_{\nu-1}}{\cos\beta_\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da dieser Werth positiv ist, so erkennt man, daß die Diagonalen bei der in der Figur vorausgesetzten Stellung derselben Zugspannungen ausgesetzt sind.

Wenn man dieselbe Untersuchung auch für die entgegengesetzte, in der Fig. 263 punktirte Stellung der Diagonalen anstellt, so wird man in derselben Art finden, daß die Diagonalen gedrückt werden, und daß für diesen Fall die Spannungen der unteren Gurtung constant sind, während diejenigen der oberen Gurtung kleiner ausfallen und gemäß den Gleichungen (4) von beiden Enden nach der Mitte hin zunehmen.

Fig. 265.

$\alpha_{\nu-1}$ B_ν $B_{\nu+1}$ $O_{\nu-1}$ O_ν U_ν A_ν $A_{\nu+1}$

Es kann noch bemerkt werden, daß bei einer ungeraden Felderzahl n in dem Mittelfelde, in welchem die Gurtungen horizontal gerichtet sind, Fig. 265, die obere Gurtung ebenfalls eine kleinere Spannung annehmen wird, als der constante Werth O in den übrigen Stücken dieser oberen Gurtung beträgt. Man erkennt nämlich leicht, daß die in dem Mittelfelde angebrachten Diagonalen bei der gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers keiner Anspannung ausgesetzt sein können, da für jede Trägerhälfte die verticale Scheerkraft gleich Null ist. Für den Knotenpunkt B_ν erfordert daher das Gleichgewicht die Gleichheit der horizontalen Componenten:

$$O_\nu = O_{\nu-1} \cos\alpha_{\nu-1} = O \cos\alpha_{\nu-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Für dieses Mittelfeld ist dann natürlich in Uebereinstimmung mit (4) die Spannung U_ν der unteren Gurtung gleich der der oberen O_ν.

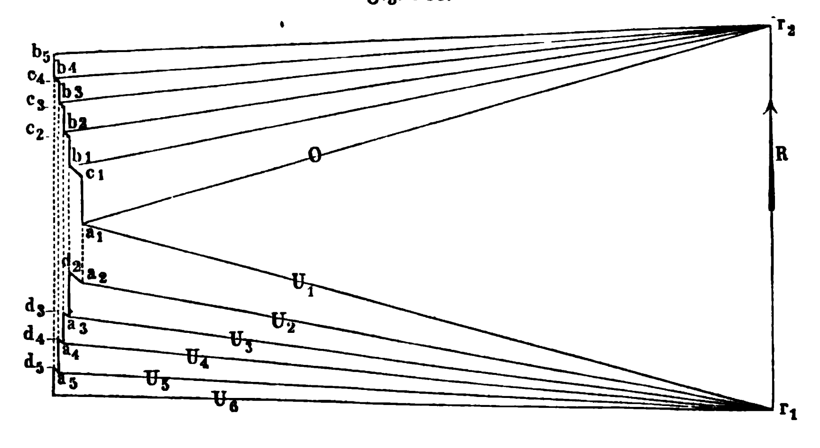
Aus der vorstehenden Untersuchung hat sich ergeben, daß die für den Pauli'schen Träger gestellte Bedingung einer durchweg gleichen Maximalspannung in allen Gurtungstheilen in aller Strenge

nicht erfüllbar ist, wenn man nicht etwa die Diagonalen für Zug- und Druckkräfte gleichzeitig widerstandsfähig machen will. Die Verschiedenheit der Gurtungsspannungen ist indessen im Allgemeinen nur gering und immer kleiner als sie bei dem Parabelträger ist, wie die unten folgende graphische Darstellung noch ersichtlich machen wird. Die Anstrengungen der Diagonalen sind bei voller Belastung des Trägers ebenfalls nur unbedeutend. Was die ungünstigsten Beanspruchungen derselben bei einseitigen Belastungen anbetrifft, so gelten hierfür die schon in den früheren Paragraphen angegebenen Regeln für den Träger mit parallelen Gurtungen und den Parabelträger. Wie bei dem letzteren findet man, daß alle Diagonalen sowohl Zug- wie Druckkräften ausgesetzt sind, und man daher auch in allen Feldern gekreuzte Diagonalen anzuordnen hat, wenn dieselben nur in einer Richtung widerstandsfähig sind. Wird bei diesen Trägern die Fahrbahn in der neutralen Axe angebracht, so hat man jeden unteren und jeden oberen Knotenpunkt mit demselben Gewichte $\frac{p}{2}$ bezw. $\frac{q}{2}$ belastet zu denken.

Um die Spannungen in den Gurtungen graphisch darzustellen, trägt man, Fig. 266, auf einer Verticalen die Größe des Stützendruckes für volle Belastung

$$r_1 r_2 = R = \frac{n-1}{2} q$$

Fig. 266.



auf und zieht durch die Endpunkte r_1 und r_2 Parallelen zu den Gurtungen AA_1 und AB_1 der Fig. 263, um in $r_1 a_1 = a_1 r_2 = O = U_1$ die Spannungen in den ersten Feldern zu erhalten. Zieht man ferner durch r_1 Parallelen mit sämmtlichen unteren und durch r_2 Parallelen mit allen oberen Gurtungen, macht wegen der gleichen Spannungen in der oberen Gurtung

$$r_2 b_1 = r_2 b_2 = r_2 b_3 \ldots = r_2 a_1 = O$$

und legt durch die Endpunkte a_1, b_1, b_2 . . . verticale Linien entsprechend den Pfosten und die geneigten Linien $b_1 c_1$, $b_2 c_2$, $b_3 c_3$ parallel mit den Diagonalen, so erhält man die Spannungen, welche bei der vollen Belastung sich in den Pfosten und Diagonalen einstellen. Es ist z. B. $b_1 c_1$ die Spannung der Diagonale $B_1 A_2$. Zerlegt man ferner $r_1 a_1 = U_1$ nach der Richtung der Verticalen und der folgenden Gurtung, so erhält man in $r_1 a_2$ die Spannung U_2. Ebenso ergiebt sich $U_3 = r_1 a_3$, wenn man die Diagonalenspannung $c_1 b_1$ in a_2 gleich $a_2 d_2$ anträgt, und von d_2 eine Verticallinie bis zum Schnitt mit der zum dritten Gurtungstheile Parallelen $r_1 a_3$ zieht u. s. f.

Bei den Pauli'schen Brücken ist die obere Gurtung kastenförmig aus Eisenblechplatten zusammengenietet, während die untere gezogene Gurtung aus über einander gelegten Eisenschienen besteht. Die Säulen oder Pfosten, mit denen die Fahrbahn verbunden ist, sind zur Erzeugung der Druckfähigkeit mit gerippten Querschnitten ausgeführt, während die Diagonalen als Bänder dargestellt sind, da dieselben nur durch Zugkräfte angespannt werden. Nach dem Pauli'schen Systeme sind unter anderen die Eisenbahnbrücke über die Isar bei Großheselohe und die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz ausgeführt. Die letztere besteht aus 4 Hauptöffnungen von je 90 m Weite und aus 6 Fluthöffnungen von je $33^1/_2$ m Weite, an welche sich dann noch 22 Oeffnungen von kleinerer Weite anschließen, so daß die ganze Brücke 1028,6 m lang ausfällt. Die Figuren 267 und 268 stellen die Seitenansicht und den Grundriß einer Hauptöffnung vor, AMA und ACA sind die beiden Gurtungen, DE die Stiele, EF und EG die Zugbänder und BCB ist die Brückenbahn. Die Enden A eines solchen Trägers ruhen mit ebenen Stahlplatten auf cylindrisch abgedrehten Lagerplatten aus Stahl, greifen aber auch noch zahnförmig ein, um eine Verschiebung zu verhindern. Die Lagerplatten selbst sind auf gußeisernen Stühlen befestigt, von welchen der eine auf dem Pfeiler festsitzt, während der andere mittelst Walzen darauf ruht, um eine Längenverschiebung in Folge der Temperaturveränderung zu ermöglichen. Die aus Sandsteinquadern aufgeführten Strompfeiler haben 4,25 m Stärke und ruhen auf einer 3,5 bis 3,8 m dicken und 10 m breiten Betonschicht, welche von einer dicken Pfahlwand eingefaßt und mittelst einer starken Steinschüttung vor Zerstörung gesichert wird. Die Entfernung der Gurtungen beträgt in der Mitte 15 m, die lichte Brückenweite 4 m und die Höhe der Fahrbahn über dem Nullpunkte des Pegels 15,1 m. Die Constructionshöhe, gemessen von der Fahrbahn bis zur Unterkante der Träger, mißt 1 m.

Die Querdimensionen der Constructionstheile sind so gewählt, daß durch das Eigengewicht der Brücke und die dreifache größte Verkehrsbelastung eine Spannung von 16 kg pro 1 qmm erzeugt wird, welcher hohe Werth nur deswegen als zulässig angenommen werden durfte, weil jedes einzelne Stück vor seiner Verwendung durch eine Anstrengung bis zu dem angegebenen

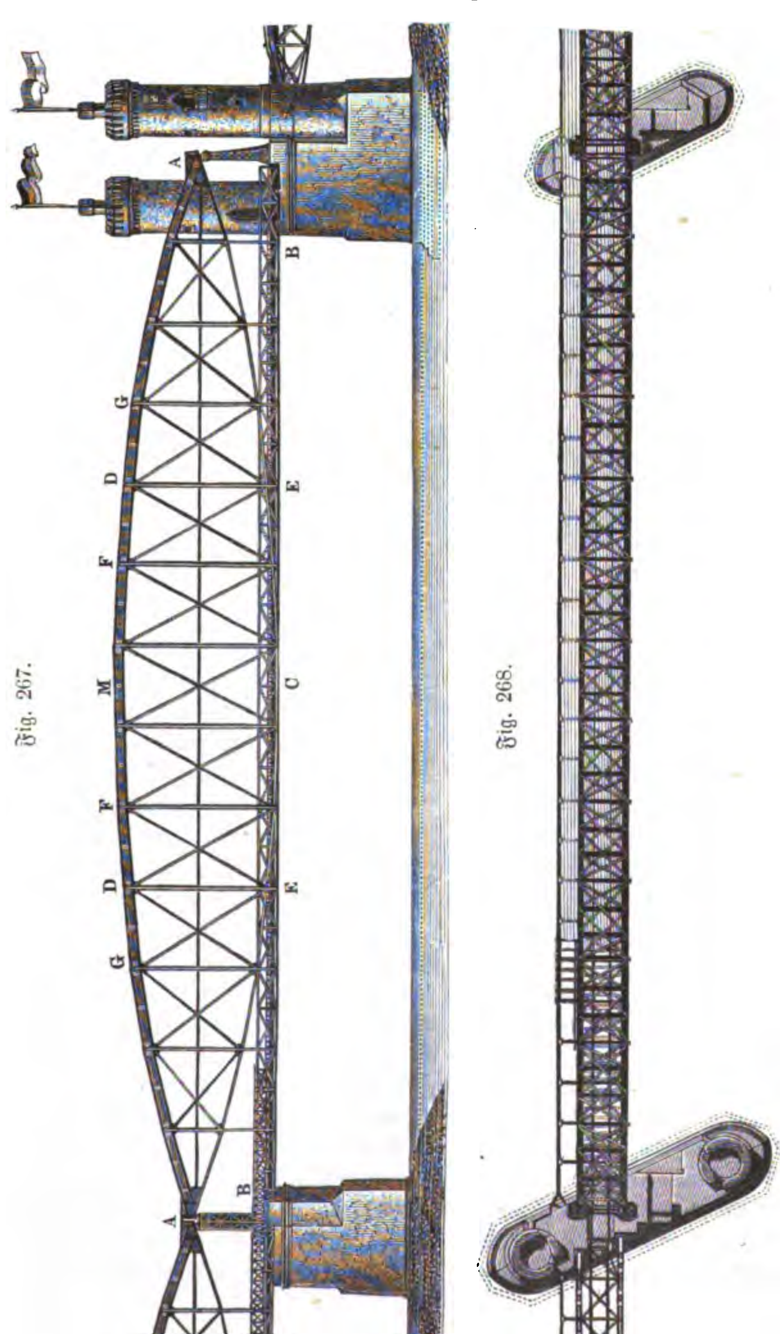


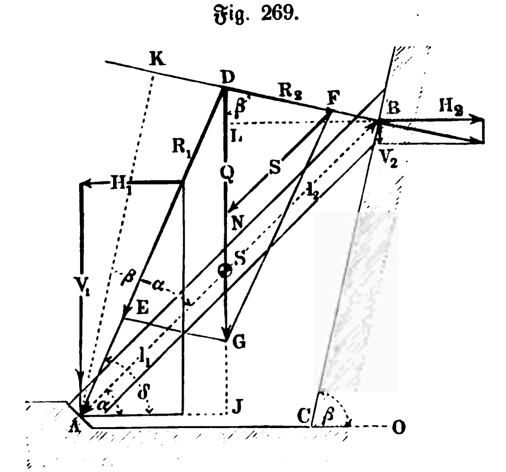
Fig. 267.

Fig. 268.

Betrage geprüft wurde. Dieser Anstrengung entsprechend sind die unteren Gurtungen aus 9 . 2 = 18 Blechbändern von je 0,2 m Breite und 12 mm Dicke zusammengesetzt, während jeder Druckbaum aus einer rectangulären Röhre von 1 m Weite und 12 mm Wandstärke besteht.

§. 59. **Sparren.** Zu den Fachwerken hat man auch die Dachstühle zu rechnen, bei denen nur eine ruhende Belastung wirksam ist, welche, aus dem Eigengewichte der Construction incl. des Deckungsmaterials sowie aus dem Schnee und Winddrucke bestehend, gleichförmig über die ganze Dachfläche vertheilt gedacht werden kann. Durch das Gewicht der Bedeckung, den Schnee und Winddruck werden zunächst die Sparren angegriffen, welche den auf sie ausgeübten Druck durch die quer unter ihnen angeordneten Pfetten auf die Knotenpunkte der Dachbinder übertragen, die in gewissen Abständen von einander in parallelen verticalen Ebenen angeordnet sind. Nur bei den kleinsten Spannweiten fallen diese Dachbinder und Pfetten ganz fort, indem die Sparren selbst als Träger auftreten. Es möge zunächst die Wirkung der einfachen Sparren besprochen werden. Zu dem Ende sei ein Sparren von der Länge $AB = l$, Fig. 269, unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt, und in B gegen eine feste Wand BC gestützt, deren Neigung gegen den Horizont durch $BCO = \beta$ gegeben sei. Wenn die auf den Balken wirkende Kraft Q durch den Punkt S im Abstande $AS = l_1$ und $BS = l_2$ von den Mitten der Stützflächen hindurchgeht, so findet man die in diesen Stützflächen erzeugten Druck- oder Stützreactionen R_1 und R_2 in folgender Art. Sieht man von der Reibung in den Stützflächen ab, so hat man sich die Reaction der Wand in B senkrecht zu CB vorzustellen, und wenn man den Durchschnittspunkt D dieser Normalen und der Belastung Q mit dem Fußpunkte A verbindet, so giebt AD die Richtung der Reaction R_1 in A an. Es möge etwa vorausgesetzt sein, daß die Stützfläche bei A senkrecht zu der Richtung AD stehe, was in Wirklichkeit nicht

Fig. 269.



gerade nothwendig ist, da wegen der hier nicht berücksichtigten Reibung das Gleichgewicht auch noch bestehen bleibt, wenn die Druckrichtung AD von der Normalen zur Stützfläche um einen Winkel abweicht, welcher nicht größer ist, als der zugehörige Reibungswinkel.

Zerlegt man nun die Belastung $DG = Q$ nach den Richtungen DA und DB, so erhält man in den Componenten DE und DF die Druckkräfte in A und B, also auch die ihnen gleichen und entgegengesetzten Reactionen R_1 und R_2 in den Stützpunkten A und B. Zur Bestimmung dieser Kräfte hat man für den Mittelpunkt der Momente in A:

$$Q.AJ = R_2.AK \text{ oder } Q l_1 \cos\alpha = R_2 l \cos(\beta - \alpha),$$

folglich die Reaction der Wand:

$$R_2 = Q\frac{l_1}{l}\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

deren horizontale und verticale Componenten daher durch:

$$H_2 = R_2 \sin\beta = Q\frac{l_1}{l}\frac{\cos\alpha\,\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)} = H \quad \ldots \quad (2)$$

und

$$V_2 = R_2\cos\beta = Q\frac{l_1}{l}\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)} = H\,cotg\,\beta \quad . \quad . \quad (3)$$

ausgedrückt sind. In dem unteren Stützpunkte A muß die Horizontalkraft $H_1 = H_2 = H$ sein, während man daselbst die Verticalkraft zu:

$$V_1 = Q - V_2 = Q\left(1 - \frac{l_1}{l}\frac{\cos\alpha\,\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)}\right) = Q - H\,cotg\,\beta \;. \;(4)$$

findet. Für die Reaction R_1 hat man aus dem Dreieck DGF, wenn $\delta = JAD$ den Neigungswinkel dieser Reactionen gegen den Horizont bedeutet:

$$R_1 = Q\frac{\sin\beta}{\cos(\delta-\beta)} = \sqrt{V_1^2 + H^2}, \quad \ldots \quad (5)$$

und zwar bestimmt sich der Neigungswinkel δ nach der Figur, wenn man BL horizontal zieht, aus:

$$tg\,\delta = \frac{DJ}{AJ} = \frac{l\sin\alpha + l_2\cos\alpha\,cotg\,\beta}{l_1\cos\alpha} = \frac{l}{l_1}\,tg\,\alpha + \frac{l_2}{l_1}\,cotg\,\beta \;. \;(6)$$

Um die Spannung S in dem Sparren zu bestimmen, hat man zu beachten, daß der letztere unter dem Einflusse der drei auf ihn wirkenden Kräfte Q, R_1 und R_2 im Gleichgewichte sein muß. Zerlegt man daher jede der Reactionen R_1 und R_2 in zwei Componenten nach der Axe AB des Sparrens, und nach verticaler Richtung, so müssen die beiden letzteren eine Summe gleich Q geben, während die beiden ersteren gleich und ent-

gegengesetzt sind und die Spannung S ergeben, mit anderen Worten: die Spannung S in dem Balken ergiebt sich immer als die Mittelkraft aus der Reaction eines Stützpunktes und der Componente, welche man für diesen Punkt erhält, wenn man die Belastung Q in ihre beiden durch die Stützpunkte gehenden verticalen Componenten zerlegt. Diese Zerlegung von $R_2 = FD$ in $FN = S$ und $ND = Q_b$ ergiebt nach der Figur:

$$\frac{S}{R_2} = \frac{\sin\beta}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

also mit Bezug auf (1):

$$S = R_2 \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = Q \frac{l_1}{l} \frac{\sin\beta}{\cos(\beta - \alpha)} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Für die verticale Componente Q_b in dem Stützpunkte B erhält man in gleicher Weise aus:

$$\frac{Q_b}{R_2} = \frac{\sin(90^0 - \beta + \alpha)}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}$$

$$Q_b = R_2 \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} = Q \frac{l_1}{l}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

wie auch aus einer directen Zerlegung von Q in zwei durch A und B gehende Seitenkräfte sich ergeben würde. In gleicher Weise liefert eine Zerlegung von R_1 denselben Werth für S und eine verticale Kraft

$$Q_a = Q \frac{l_2}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

In den vorstehend gefundenen Formeln hat man $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ zu setzen, wenn, unter Voraussetzung einer gleichmäßigen vertheilten Last, der Angriffspunkt derselben in der Mitte zwischen A und B gelegen ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

a) Für eine verticale Wandfläche BC, Fig. 270, mit $\beta = 90^0$:

$$R_2 = H = \frac{Q}{2\,tg\,\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (1^a)$$

$$V_2 = 0 \text{ und } V_1 = Q \quad \ldots \ldots \quad (4^a)$$

$$R_1 = Q\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\,tg\,\alpha}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad (5^a)$$

$$tg\,\delta = 2\,tg\,\alpha \quad \ldots \ldots \quad (6^a)$$

und

$$S = \frac{Q}{2\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (7^a)$$

b) Für $\beta = \alpha$, Fig. 271:

$$R_2 = \frac{Q}{2} \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (1^b)$$

$$H = \frac{Q}{4} \sin 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (2^b)$$

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (3^b)$$

$$V_1 = Q\left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4^b)$$

$$R_1 = Q \sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{2 - \cos^2 \alpha}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (5^b)$$

$$tg\, \delta = 2\, tg\, \alpha + cotg\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (6^b)$$

und

$$S = \frac{Q}{2} \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (7^b)$$

Fig. 270.

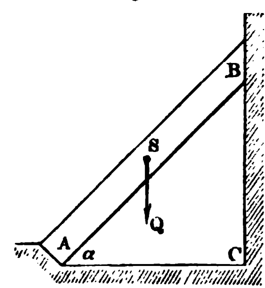


Fig. 271.

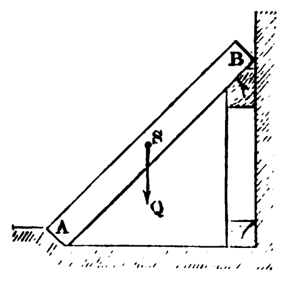
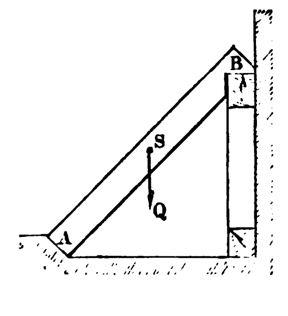


Fig. 272.



c) Für $\beta = 0$, Fig. 272:

$$R_1 = R_2 = V_1 = V_2 = \frac{Q}{2},$$

$H = 0$; $\delta = 90^0$ und $S = 0$ u. s. f.

Die vorstehend unter a) angegebenen Formeln gelten für die Fälle, in welchen die Sparren gegen eine verticale Wand, Fig. 273 (a. f. S.), oder gegen andere symmetrische Sparren, Fig. 274 (a. f. S.), sich stützen. Setzt man hier noch die Dachhöhe $BC = h$ und die halbe Weite $AC = w$, so hat man mit $tg\, \alpha = \frac{h}{w}$ aus (1^a) den Sparrenschub

$$H = \frac{1}{2} Q \frac{w}{h}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

also direct mit der Spannweite und umgekehrt mit der Dachhöhe proportional. Dieser Sparrenschub fällt daher um so größer aus, je flacher das Dach ist, und wird z. B. für $h = \frac{w}{2}$, oder $\alpha = 26^0\,34'$, gleich der gesammten Belastung Q des Sparrens. Um dem horizontalen

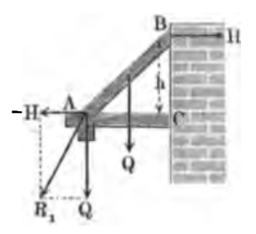


Fig. 273.

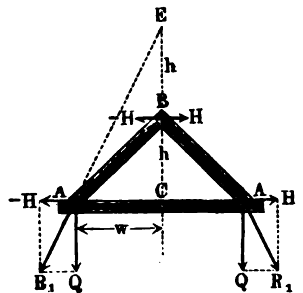


Fig. 274.

Sparrenschube zu begegnen, ist der Sparrenfuß bei A in den Spannbalken AC einzukämmen, oder es ist ein geeigneter Sparrenschuh in Anwendung zu bringen.

Der Gesammtdruck des Sparrens im Fußpunkte A ist nach (5^a):

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{w}{2h}\right)^2},$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont bestimmt sich nach (6^a) durch:

$$tg\,\delta = 2\, tg\,\alpha = \frac{2h}{w}.$$

Man findet hiernach die Richtung der Reaction im Fußpunkte A des Sparrens in der Geraden AE, sofern man $CE = 2\,CB = 2\,h$ macht.

Wenn dagegen der Sparren am oberen Ende auf einer Wand ruht, Fig. 275 und Fig. 276, so gelten die unter b) mit $\beta = \alpha$ entwickelten Ausdrücke und es fällt in diesem Falle sowohl der Sparrenschub H wie die Spannung S kleiner aus, als im Vorhergehenden. Man hat nämlich hierfür:

$$H = \frac{Q}{2} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{Q}{2} \frac{wh}{w^2 + h^2},$$

oder, wenn man mit q die Belastung des Sparrens pro Längeneinheit bezeichnet, und die Länge $l = \sqrt{w^2 + h^2}$ setzt:

$$H = \frac{q}{2} \frac{w h}{\sqrt{w^2 + h^2}}, \quad \text{(10}^b\text{)}$$

während bei dem sich anlehnenden Sparren der Figuren 273 und 274

$$H = \frac{q}{2} \frac{w \sqrt{w^2 + h^2}}{h} \quad \text{(10}^a\text{)}$$

gesetzt werden kann.

Man erkennt aus den Gleichungen (10^a) und (10^b), daß bei einer gegebenen Spannweite w und specifischen Belastung q der Sparrenschub des

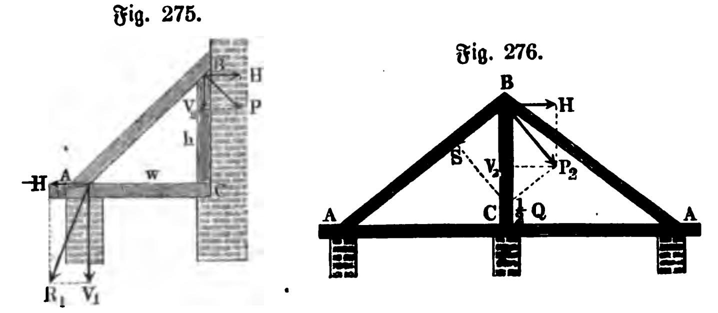


Fig. 275. Fig. 276.

nur angelehnten Sparrens, Fig. 274, um so größer, der des gestützten Sparrens, Fig. 276, aber um so kleiner wird, je niedriger das Dach, d. h. je kleiner h gewählt wird.

Eine ähnliche Beziehung gilt hinsichtlich des Sparrendruckes S, welcher bei dem gestützten Sparren, Fig. 276, zu:

$$S = \frac{Q}{2} \sin\alpha = \frac{q}{2} h, \quad \text{(11}^b\text{)}$$

und bei dem nur angelehnten Sparren, Fig. 274, zu:

$$S = \frac{Q}{2 \sin\alpha} = \frac{q}{2} \frac{w^2 + h^2}{h} \quad \text{(11}^a\text{)}$$

folgt.

Der Verticaldruck des durch die Wand gestützten Balkens im Fußpunkte A beträgt nach (4^b):

$$V_1 = Q\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right),$$

während die stützende Wand bei dem einseitigen Sparren in Fig. 275 den Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2\alpha$$

und in Fig. 276 den doppelten Druck:

$$V_2 = Q \cos^2\alpha$$

empfängt.

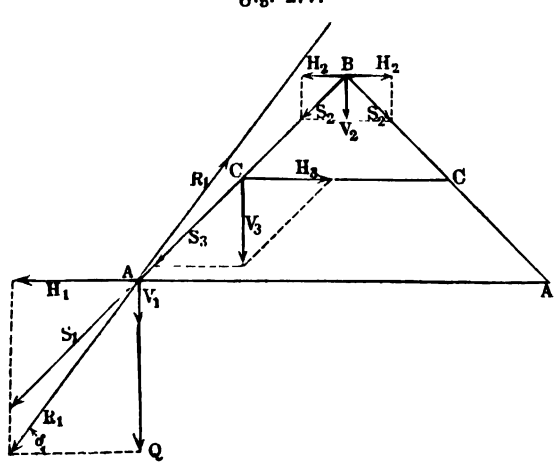
Damit die Säule BC in Fig. 275 durch den Horizontalschub H nicht umgestürzt werde, ist es nöthig, sie von rechts noch besonders durch eine Mauer zu stützen, während in Fig. 276 die beiderseits von den Sparren ausgeübten horizontalen Schubkräfte sich gegenseitig aufheben, wenn die Anordnung und Belastung symmetrisch vorausgesetzt werden. Die Richtung der Reaction im Fußpunkte ist nach (6^b) durch

$$tg\,\delta = 2\,tg\,\alpha + cotg\,\alpha = \frac{2h}{w} + \frac{w}{h}$$

gegeben.

Wenn die Sparren AB, Fig. 277, durch einen Kehlbalken CC verbunden sind, so erhält man, wenn die Sparren selbst als vollkommen starr

Fig. 277.



angesehen werden, bei der Belastung der Längeneinheit durch das Gewicht q in A, B und C vertical abwärts wirkende Gewichte zu:

$$V_1 = \frac{1}{2}\,q\,l_1,\ V_2 = \frac{1}{2}\,q\,l_2 \text{ und } V_3 = \frac{1}{2}\,q\,l = \frac{Q}{2},$$

und aus der Zerlegung dieser Kräfte den horizontalen Schub im Scheitelpunkte B:

$$H_2 = \frac{1}{2}\,q\,l_2\,cotg\,\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

und die Spannung in dem oberen Sparrenstücke BC:

$$S_2 = \frac{V_2}{sin\,\alpha} = q\,\frac{l_2}{2\,sin\,\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Ebenso folgt für den Kehlbalken CC der Horizontalschub:

$$H_3 = \frac{1}{2}\, q\, l\, cotg\, \alpha = \frac{Q}{2}\, cotg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

sowie für das untere Sparrenstück CA die Kraft:

$$S_1 = S_2 + S_3 = S_2 + \frac{V_3}{sin\, \alpha} = q\, \frac{l_2 + l}{2\, sin\, \alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und der Horizontalschub in A:

$$H_1 = S_1\, cos\, \alpha = q\, \frac{l_2 + l}{2}\, cotg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}\, l$:

$$H_1 = \frac{3}{4}\, Q\, cotg\, \alpha = \frac{3}{4}\, Q\, \frac{w}{h}.$$

Setzt man die Spannung S_1 mit dem Verticaldrucke V_1 in A zusammen, so erhält man die gesammte Wirkung auf die Stütze A, oder die Reaction daselbst:

$$R_1 = \sqrt{H_1^2 + (V_1 + S_1\, sin\, \alpha)^2} = \sqrt{H_1^2 + Q^2}$$

$$= Q\, \sqrt{\left(\frac{l_2 + l}{2\, l}\, cotg\, \alpha\right)^2 + 1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

also für $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ wird:

$$R_1 = Q\, \sqrt{\left(\frac{3}{4}\, cotg\, \alpha\right)^2 + 1} = Q\, \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\, \frac{w}{h}\right)^2}\, . \quad (17^a)$$

Für die Sparren ohne Kehlbalken fand sich oben nach (1^a) und (5^a):

$$H_1 = \frac{1}{2}\, Q\, \frac{w}{h} \text{ und } R_1 = Q\, \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\, \frac{w}{h}\right)^2},$$

so daß also durch die Anwendung des Kehlbalkens der Sparrenschub und die Auflagerreaction vergrößert werden.

Der Neigungswinkel δ für die Reactionsrichtung ergiebt sich zu:

$$tg\, \delta = \frac{Q}{H_1} = \frac{2\, l}{l_2 + l}\, tg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

was mit $l_1 = l_2$ in $\frac{4}{3}\, tg\, \alpha$ und mit $l_2 = 0$ in $tg\, \delta = 2\, tg\, \alpha$ wie oben übergeht.

Wenn der Kehlbalken CC durch die Stuhlsäulen CD, Fig. 278 (a. f. S.), unterstützt ist, zerlegt sich der Verticaldruck $\frac{Q}{2}$ auf die Pfette in C nach der Richtung des Kehlbalkens und der unter α_1 geneigten Stuhlsäule in:

$$H_3 = \frac{Q}{2} \, cotg \, \alpha_1$$

und

$$S_3 = \frac{Q}{2 \sin \alpha_1}.$$

In diesem Falle ist der Horizontalschub in A durch:

$$H_1 = \frac{1}{4} \, Q \, cotg \, \alpha$$

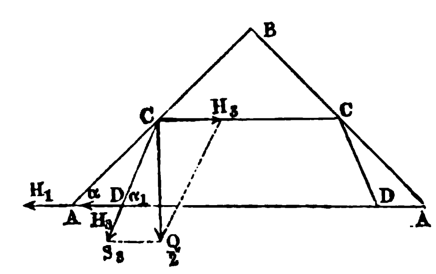
ausgedrückt, während die Stuhlsäule den Spannbalken AA in D mit der Kraft $H_3 = \frac{Q}{2} \, cotg \, \alpha_1$ angreift, so daß das mittlere Balkenstück DD einem Gesammtzuge

$$H = H_1 + H_3 = Q \, \frac{cotg \, \alpha + 2 \, cotg \, \alpha_1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ausgesetzt ist.

Wenn die beiden Sparren A_1B und A_2B, Fig. 279, unter verschiedenen Winkeln α_1 und α_2 gegen den Horizont geneigt sind, so weicht die Reaction R_3, mit welcher sie auf einander wirken, von der horizontalen Richtung um einen gewissen Winkel β ab, welcher sich wie folgt bestimmt.

Fig. 278.



Bezeichnet man mit H_3 die horizontale und mit V_3 die verticale Componente der Kraft R_3, so hat man für A_1 als Mittelpunkt der Momente:

$$Q_1 \frac{w_1}{2} - V_3 \, w_1 = H_3 \, h$$

oder

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3 \, tg \, \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Ebenso ist für den Momentenmittelpunkt in A_2:

$$Q_2 \frac{w_2}{2} + V_3 \, w_2 = H_3 \, h$$

oder

$$V_3 = H_3 \, tg \, \alpha_2 - \frac{Q_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke für V_3 folgt:

$$H_3 = \frac{1}{2} \frac{Q_1 + Q_2}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

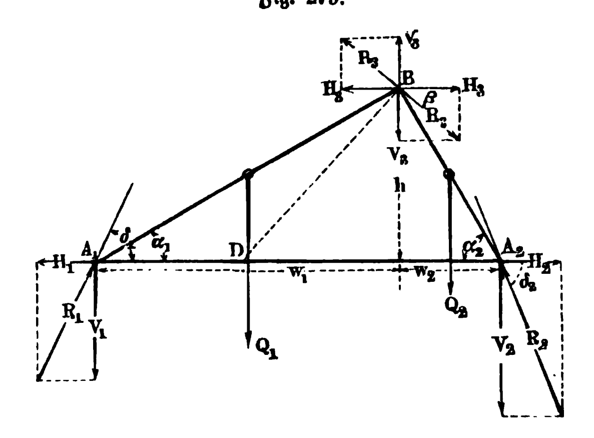
und daher

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3\,tg\,\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \ldots \quad (23)$$

Der Neigungswinkel β folgt daher aus:

$$tg\,\beta = \frac{V_3}{H_3} = \frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{Q_1 + Q_2} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Fig. 279.



Man hat die Ebene BD, in welcher sich die Sparrenköpfe berühren, senkrecht zur Richtung von R_3, d. h. den Winkel $BDA_2 = 90^0 - \beta$ zu machen.

Für die Sparrenfüße A_1 und A_2 sind die Horizontalschübe H_1 und H_2 ebenfalls gleich H_3, während die Verticalkräfte durch:

$$V_1 = Q_1 - V_3 = Q_1 - \frac{1}{2} \frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \ldots \quad (25)$$

in A_1 und durch

$$V_2 = Q_2 + V_3 = Q_2 + \frac{1}{2} \frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \ldots \quad (26)$$

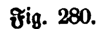
in A_2 gegeben sind.

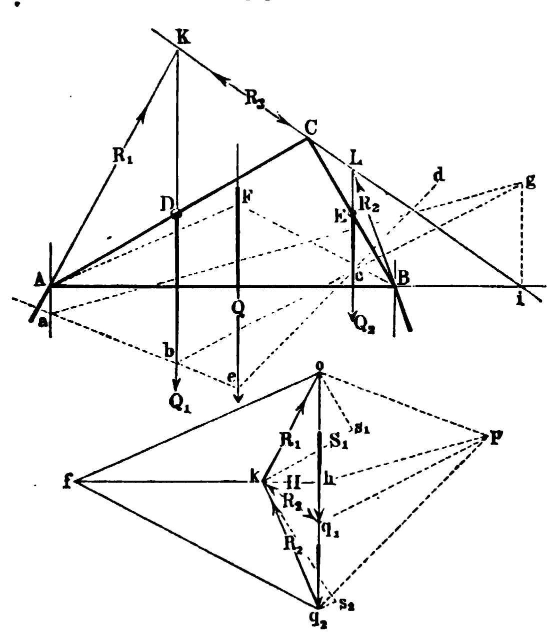
Für die Winkel δ_1 und δ_2 der Reactionen R_1 und R_2 hat man daher:

$$tg\,\delta_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{(2\,Q_1 + Q_2)\,tg\,\alpha_1 + Q_1\,tg\,\alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$tg\,\delta_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{Q_2\,tg\,\alpha_1 + (2\,Q_2 + Q_1)\,tg\,\alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Man findet auch leicht in jedem Falle die auf die Sparren wirkenden Kräfte auf graphischem Wege, welcher an dem allgemeinen Beispiele der Fig. 280

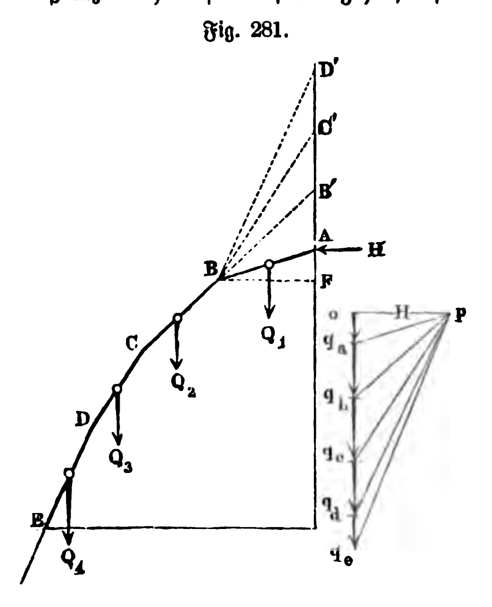

Fig. 280.



gezeigt werden soll, in welchem die Sparren AC und BC beliebig gegen den Horizont geneigt sein mögen, und auch die Belastungen Q_1 und Q_2 in beliebigen Punkten D und E angreifend gedacht werden sollen. Man trägt zunächst auf einer Verticalen die Belastungen $Q_1 = o\,q_1$ und $Q_2 = q_1\,q_2$ auf, wählt ganz beliebig den Pol p und zeichnet zu den Polstrahlen $p\,o$, $p\,q_1$ und $p\,q_2$ parallel das Seilpolygon $a\,b\,c\,d$, wodurch man in dem Schnittpunkte e der Endseile einen Punkt für die Gesammtbelastung $Q = Q_1 + Q_2$ erhält. Durch dieses Gesammtgewicht Q werden in den Stützpunkten A und B verticale Auflagerdrucke Q_a und Q_b erzeugt, welche man erhält, wenn man Q in einem beliebigen Punkte F nach den Richtungen FA und FB zerlegt denkt. Zieht man daher im Kräftepolygone durch o eine

Parallele of mit AF und durch q_2 eine Parallele $q_2 f$ mit BF, so theilt die durch f gezogene Horizontale fh die Belastung Q bekanntlich in die beiden verticalen Stützendrucke $oh = Q_a$ und $hq_2 = Q_b$. Da der Punkt F beliebig gewählt worden, so ist durch fh noch nicht der Horizontalschub H gegeben; um denselben zu erlangen, muß noch die Richtung der Reaction R_3 bestimmt werden, mit welcher die Sparren in C gegen einander wirken. Hierzu denkt man sich einen Sparren, z. B. AC, im Gleichgewichte unter dem Einflusse der Kräfte Q_1 in D, R_3 in C und R_1 in A. R_3 ist noch der Richtung und Größe nach unbekannt, und von der Reaction R_1 ist nur die verticale Componente $Q_a = ho$ gefunden. Man setzt nun Q_1 mit Q_a zu einer Mittelkraft zusammen, deren Lage man erhält, wenn man parallel mit den Polstrahlen pq_1, po und ph das Seilpolygon gba zeichnet, indem die gesuchte Mittelkraft in die Verticale durch den Schnitt g der Endseile fällt. Diese Mittelkraft hq_1 von Q_1 und Q_a muß mit H und R_3 im Gleichgewichte sein, und da sie die in A wirksame Horizontalcomponente H in i schneidet, so muß R_3 durch denselben Punkt gehen, also in die Richtung iC fallen.

Fig. 281.



Daher erhält man H und R_3, wenn man im Kräftepolygon durch q_1 eine Parallele $q_1 k$ mit iC zieht, wodurch $kq_1 = R_3$ und $kh = H$ festgestellt sind. Zieht man nach ko und kq_2, welche Linien mit AK und BL parallel ausfallen müssen, so erhält man der Richtung und Größe nach die Stützreactionen $R_1 = ko$ in A und $R_2 = q_2 k$ in B. Will man endlich die Spannkräfte in den Sparren finden, so hat man nur durch k Parallelen zu denselben zu ziehen und die Kräfte R_1 und R_2 auf diese Linien zu projiciren, um die Spannung von AC in $S_1 = ks_1$ und diejenige von BC in $S_2 = s_2 k$ zu finden.

Ebenso kann das Kräftepolygon dazu dienen, die Kräfte für ein Gespärre zu finden, bei welchem der Sparren AB, Fig. 281, mit seinem Fuße A

nicht auf einem Balken oder **Bundtrame**, sondern auf einem zweiten Sparren BC, dieser wieder auf einem dritten CD u. s. w. aufruht, wie dies bei den bekannten **Mansarddächern** der Fall ist. Hierbei ist jedem der unteren Sparren diejenige Richtung zu geben, in welcher der auf ihn sich stützende Sparren drückt. Seien die Gewichte $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ der einzelnen Sparren, welche in deren Mitten wirksam gedacht werden mögen, jedes in die beiden verticalen Componenten zerlegt, die in den Enden des Sparrens angreifen, und seien also die Belastungen der Knotenpunkte A, B, C, D durch

$$Q_a = \frac{Q_1}{2}, \quad Q_b = \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \quad Q_c = \frac{Q_2 + Q_3}{2} \ldots$$

ausgedrückt, so trägt man diese Kräfte nach einem beliebigen Kräftemaßstabe auf einer Verticalen zu

$$o\,q_a = Q_a, \quad q_a\,q_b = Q_b, \quad q_b\,q_c = Q_c \ldots$$

an, und wählt auf der Horizontalen durch o willkürlich den Pol p.

Es ist nun ohne Weiteres klar, daß die einzelnen Polstrahlen $p\,q_a$, $p\,q_b \ldots$ die Reactionen in $B, C \ldots$ der Richtung und Größe nach ergeben, und daß man daher die Sparren nach diesen Richtungen anordnen muß, d. h. man hat AB parallel mit $p\,q_a$, BC parallel mit $p\,q_b \ldots$ zu stellen. Die Poldistanz op stellt hierbei den überall gleichen Horizontalschub des Gespärres dar.

Wenn hierbei die Neigung irgend eines Sparrens, z. B. des untersten ED, vorgeschrieben wäre, so hätte man den Pol nicht willkürlich zu wählen, sondern man wird ihn finden, wenn man durch den Punkt q_d, welcher die Belastung des Knotenpunktes D begrenzt, eine Gerade $q_d\,p$ unter der gewünschten Sparrenneigung zieht. Die Analogie dieser Construction mit der bei Gewölben zur Ermittelung der Stützlinie angegebenen fällt ins Auge. Auch erkennt man, daß bei gleichem Gewichte der einzelnen Sparren die an den Punkt B angetragenen Richtungen derselben die Verticallinie durch den Scheitel in Punkten A, B', C', D' schneiden, deren Abstände von der durch B gelegten Horizontalen BF sich verhalten wie 1, 3, 5, 7, worauf eine öfter angegebene Construction zur Bestimmung der Sparrenrichtungen solcher Dächer beruht.

Beispiel. Ein Dach nach Art der Fig. 274 habe 12 m Tiefe und 8 m Höhe, die um 1 m von einander abstehenden Sparren haben 0,16 m Breite und 0,20 m Höhe des Querschnitts, wie groß ist der Sparrenschub für eine Belastung des Daches von 200 kg pro Quadratmeter Grundfläche?

Hier beträgt die Belastung eines Sparrens durch die Dachfläche 6 . 1 . 200 = 1200 kg, wozu das Gewicht des Sparrens bei einem specifischen Gewichte des Holzes von 0,6 mit

$$0{,}16 \,.\, 0{,}20 \,.\, 0{,}6 \,.\, 1000 \sqrt{8^2 + 6^2} = 192 = rot\ 200\,kg$$

tritt, so daß man

$$Q = 1200 + 200 = 1400\,kg$$

hat. Demgemäß folgt nach (10) der Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2}\, 1400\, \frac{6}{8} = 525\,kg.$$

Der Gesammtdruck des Sparrens im Fußpunkte ist nach (5^a):

$$R_1 = 1400 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{16}\right)^2} = 1495\,kg,$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont findet man aus:

$$tg\,\delta = 2\,\frac{8}{6} = 2{,}667 \text{ zu } \delta = 69^0\,27'.$$

Der Neigungswinkel α des Sparrens folgt aus:

$$tg\,\alpha = \frac{4}{3} \text{ zu } \alpha = 53^0\,10'.$$

Würde man nach Fig. 276 eine Säule anwenden, so würde man den Horizontalschub nach (10^b) zu

$$H = \frac{1}{2}\, 1400\, \frac{6\,.\,8}{36 + 64} = 336\,kg,$$

und den Verticaldruck der Säule, welcher von jedem Sparren ausgeübt wird, zu

$$V_2 = \frac{1}{2}\, 1400\, cos^2\, 53^0\,10' = 251\,kg$$

erhalten. Der Verticaldruck im Fußpunkte jedes Sparrens beträgt daher

$$1400 - 251 = 1149\,kg,$$

der Gesammtdruck auf die Säule

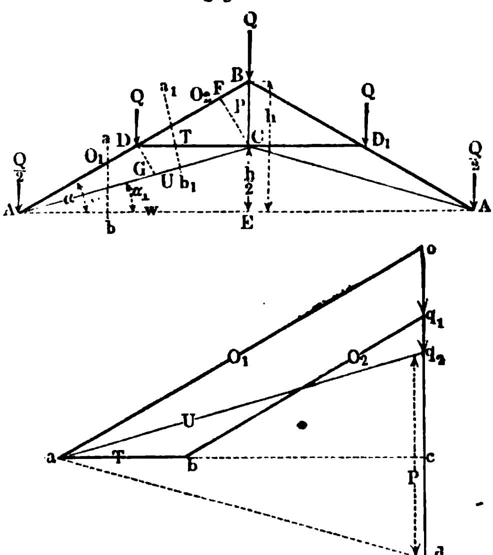
$$2\,.\,251 = 502\,kg.$$

Dachstühle. Bei größerer Weite der zu überdachenden Räume werden zusammengesetzte Dachconstructionen oder Dachstühle angewendet, deren Beanspruchung in derselben Weise zu beurtheilen ist, wie die der Fachwerke. Als Beispiele mögen die in der Ausführung gebräuchlichsten Dachconstructionen angeführt werden. §. 60.

Bei dem deutschen Dachstuhle, Fig. 282 (a. f. S.), sind die beiden symmetrisch gegen einander gestellten Sparren AB und A_1B in ihren Mitten D und D_1 durch einen horizontalen Kehlbalken oder Spannriegel unterstützt, dessen Mitte C durch Zugstangen mit den Enden AA_1 und dem First B verbunden ist. Die Belastung drückt hier, wie bei allen Fachwerken, auf die Knotenpunkte A, D und B, indem in diesen Punkten Pfetten angeordnet sind, auf welchen die Sparren ruhen. Diese Lastpunkte werden fast immer in gleichen horizontalen Entfernungen von einander angeordnet, und es möge hier und bei den folgenden Dachconstructionen mit a dieser

horizontale Abstand zweier Lastpunkte, mit $2w = AA_1$ die Spannweite und mit h die Höhe BE des Firstes über den Auflagern AA_1 bezeichnet werden. Die Belastung eines inneren Knotenpunktes sei Q; dann kommt auf jedes Auflager A und A_1 eine Last gleich $\frac{Q}{2}$, welche direct von der Mauer aufgenommen wird, daher auf die Spannungen der Fachwerksglieder ohne Einfluß ist und bei deren Bestimmung nicht besonders in Rechnung

Fig. 282.



gebracht werden soll. Der Auflagerdruck in A und in A_1 beträgt daher im vorliegenden Falle

$$R_1 = R_2 = \frac{3}{2}\,Q,$$

oder im Allgemeinen bei n Intervallen (n ist hier stets eine gerade Zahl)

$$R = \frac{n-1}{2}\,Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Um die Pressungen O_1 und O_2 in den Strecken des Sparrens oder der oberen Gurtung AD und DB zu bestimmen, denkt man sich einen Schnitt nach ab oder $a_1 b_1$ und wählt C zum Momentenmittelpunkte, wodurch man, wenn CF senkrecht zu AB gezogen ist,

$$O_1 \,.\, CF = R \,.\, 2a = \frac{3}{2}\,Qw \text{ und}$$

$$O_2 \,.\, CF = R \,.\, 2a - Qa = Qw$$

erhält.

Führt man noch die Neigungswinkel α des Sparrens AB und α_1 der Zugstange AC gegen den Horizont ein, so hat man

$$CF = CB\cos\alpha = \frac{h}{2}\cos\alpha,$$

und auch

$$AC\sin(\alpha - \alpha_1) = w\,\frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos\alpha_1} = \frac{h}{2}\cos\alpha,$$

und erhält damit

$$O_1 = 3\,Q\,\frac{w}{h\cos\alpha} = \frac{3}{2}\,Q\,\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$O_2 = 2\,Q\,\frac{w}{h\cos\alpha} = Q\,\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha - \alpha_1)} = \frac{2}{3}\,O_1 \quad . \quad . \quad (3)$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung AC, wenn man den Schnitt in ab und den Momentenpunkt in D wählt, und das Loth

$$DG = \frac{w}{2}\sin\alpha_1 = \frac{w}{2}\,\frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos\alpha}$$

setzt:

$$U.DG = U\,\frac{w}{2}\sin\alpha_1 = U\,\frac{w}{2}\,\frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos\alpha} = \frac{3}{2}\,Q\,\frac{w}{2},$$

also

$$U = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{\sin\alpha_1} = \frac{3}{2}\,Q\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und zwar ist U eine Zugspannung, während O_1 und O_2 Pressungen bedeuten.

Um die Pressung T in dem Kehlbalken DC zu bestimmen, wählt man für den Schnitt $a_1 b_1$ den Auflagerpunkt A zum Momentenmittelpunkte, wodurch die Momente von R, U und O_2 herausfallen und man aus

$$Q\,\frac{w}{2} = T\,\frac{h}{2};\quad T = Q\,\frac{w}{h} = Q\,cotg\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Druckspannung erhält. Endlich hat die Hängestange BC einer Zugkraft P zu widerstehen, welche sich aus der Summe der Verticalcomponenten der beiden Zugstangen AC und A_1C ergiebt zu

$$P = 2\,U\sin\alpha_1 = 3\,Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

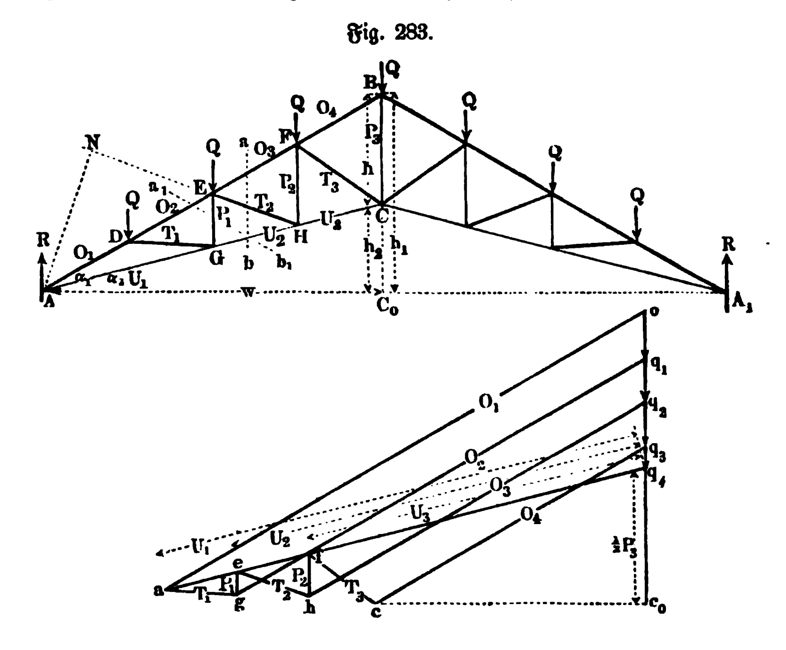
Denselben Werth muß man für P auch erhalten, wenn man die Belastung Q des Firstes von der Summe der verticalen Componenten der Sparrenkräfte in BD und BD_1 abzieht, es ist dann

$$2\,O_2\sin\alpha - Q = 4\,Q\,\frac{w}{h}\,tg\,\alpha - Q = 3\,Q.$$

Anstatt die Anstrengungen der einzelnen Glieder durch Rechnung, wie oben geschehen, zu ermitteln, führt auch eine einfache Zerlegung der Kräfte

auf graphischem Wege schnell und sicher zum Ziele. Zu dem Ende hat man nur auf einer Verticalen durch o in Fig. 282 die Belastung Q von D gleich $o q_1$ und die halbe Belastung $\frac{Q}{2}$ von B gleich $q_1 q_2$ anzutragen, und $o a$ parallel mit AB, und $q_2 a$ parallel mit AC zu ziehen, um O_1 in ao und U in $q_2 a$ zu erhalten. Zieht man ferner durch a eine mit dem Spannriegel DD_1 parallele also horizontale Gerade und legt durch q_1 eine Parallele zu AB, so stellt, wie leicht ersichtlich ist, ab die Kraft T im Spannriegel und $b q_1$ die Pressung im oberen Sparrenstücke DB vor. Um auch

Fig. 283.



die Zugkraft P in der Hängestange BC zu finden, hat man nur nöthig, die Horizontale ab bis nach c zu verlängern, so ist $q_2 c = \frac{P}{2}$, also P durch $q_2 d$ gegeben, wenn noch ad symmetrisch zu $a q_2$ gezogen wird. Die Figur zeigt auch, daß die verticale Componente $c q_1$ der Sparrenkraft O_2 um die Größe $\frac{Q}{2}$ der halben Firstbelastung größer ist, als die Verticalkraft $q_2 c$ jeder Zugstange AC.

Für größere Spannweiten, bei denen die Sparren in mehreren Zwischenpunkten zwischen dem Auflager und dem Firste gestützt werden müssen, wird vielfach der englische Dachstuhl angewendet, von welchem in Fig. 283

eine Anordnung mit drei Zwischenpfetten D, E und F angegeben ist. Dieser Dachstuhl kann, da man in der Anzahl solcher Knotenpunkte wie D, E und F nicht beschränkt ist, für beliebig große Spannweiten $2w$ angewandt werden. Die Ermittelung der Anstrengung irgend eines Theiles geschieht genau in derselben Art, wie für die Fachwerke im Allgemeinen gezeigt worden, indem man für irgend einen Schnitt ab, den unteren Knotenpunkt H oder den oberen Knotenpunkt E der durchschnittenen Strebe EH als Momentenpunkt wählt, je nachdem man die Spannung der oberen oder unteren Gurtung bestimmen will, während für die Spannung in dem durchschnittenen Zwischenstücke der Auflagerpunkt A als Momentenpunkt ausgewählt wird. Selbstverständlich denkt man sich zur Bestimmung der Kraft in einem verticalen Pfosten wie EG einen Schnitt nach $a_1 b_1$ hindurchgelegt. Im Folgenden bedeute $l_1 = AB$ die Länge eines Sparrens, $h_1 = BC_0 = l_1 \sin \alpha_1$ seine Verticalprojection, $l_2 = AC$ die Länge der Zugstange, $h_2 = CC_0 = l_2 \sin \alpha_2$ deren Verticalprojection und $h = h_1 - h_2$ die Höhe BC des Binders in der Mitte, ferner $2w = na$ die Spannweite, die in n Intervalle von der Breite a getheilt sein mag, und es seien mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ die Neigungswinkel der Streben $DG, EH, FC \ldots$ gegen den Horizont, und mit

$$c_1 = \frac{a}{\cos \beta_1};\quad c_2 = \frac{a}{\cos \beta_2} \cdots$$

die Längen dieser Streben verstanden. Ist jede Pfette wiederum mit Q belastet, so hat man den Auflagerdruck in A und A_1 zu

$$R = \frac{n-1}{2} Q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Bezeichnet nun ν die Anzahl der belasteten Pfetten zwischen einem beliebigen Schnitte ab und dem der Mitte abgewandten Auflager A, so findet man nach dem Vorstehenden die Spannungen $O_{\nu+1}$ und U_ν der durchschnittenen Gurtungen durch

$$\frac{n-1}{2} Q (\nu+1) a - Q (1 + 2 + \cdots \nu) a = O_{\nu+1} \frac{(\nu+1) a}{\cos \alpha_2} \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

oder, da aus dem Dreiecke ABC sich $\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{h}{l_1}$ ergiebt:

$$Q\left(\frac{n-1}{2}(\nu+1) - \nu \frac{\nu+1}{2}\right) = O_{\nu+1} (\nu+1) \frac{h}{l_1},$$

woraus

$$O_{\nu+1} = \frac{n-(\nu+1)}{2} Q \frac{l_1}{h} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

folgt.

In gleicher Weise findet man für den oberen Knotenpunkt als Momentenmitte:

$$\frac{n-1}{2}Qva - Q(1+2+\cdots v-1)a = U_\nu \frac{va}{\cos\alpha_1}\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= U_\nu va\frac{h}{l_2},$$

d. h.

$$U_\nu = \frac{n-v}{2}Q\frac{l_2}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für die Strebe erhält man mit A als Momentenpunkt die Spannung T_ν aus:

$$Q(1+2+\cdots v)a = T_\nu . AN = T_\nu \frac{va}{\cos\alpha_1}\sin(\alpha_1+\beta_\nu)$$

oder, da aus dem Dreiecke EHF:

$$\frac{\sin(\alpha_1+\beta_\nu)}{\cos\alpha_1} = \frac{HF}{EH} = \frac{2\frac{v+1}{n}h}{c_\nu} = 2\frac{v+1}{n}\frac{h}{c_\nu}$$

folgt, so hat man

$$Qv\frac{v+1}{2}a = T_\nu 2va\frac{v+1}{n}\frac{h}{c_\nu},$$

also

$$T_\nu = \frac{n}{4}\frac{c_\nu}{h}Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Für die Verticalstiele endlich hat man, wenn man nach $a_1 b_1$ schneidet, mit A als Momentenpunkt:

$$Q(1+2+\cdots v)a = P_\nu(v+1)a,$$

woraus

$$P_\nu = \frac{v}{2}Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Setzt man in den Gleichungen (8) bis (11) für v die Werthe $0, 1, 2, 3\ldots$, so erhält man die Spannungen der Gurtungen, Streben und Verticalstangen. Für die mittlere Hängestange BC ergiebt sich die Spannung wieder durch

$$P_\nu = 2\,O_{\nu+1}\sin\alpha_1 - Q,$$

oder, wenn man darin $v = \frac{n}{2} - 1$ setzt, nach (8):

$$P = 2\frac{n}{4}Q\frac{l_1}{h}\frac{h_1}{l_1} - Q = \left(\frac{n}{2}\frac{h_1}{h} - 1\right)Q \quad . \quad . \quad (12)$$

Denselben Werth erhält man natürlich auch durch

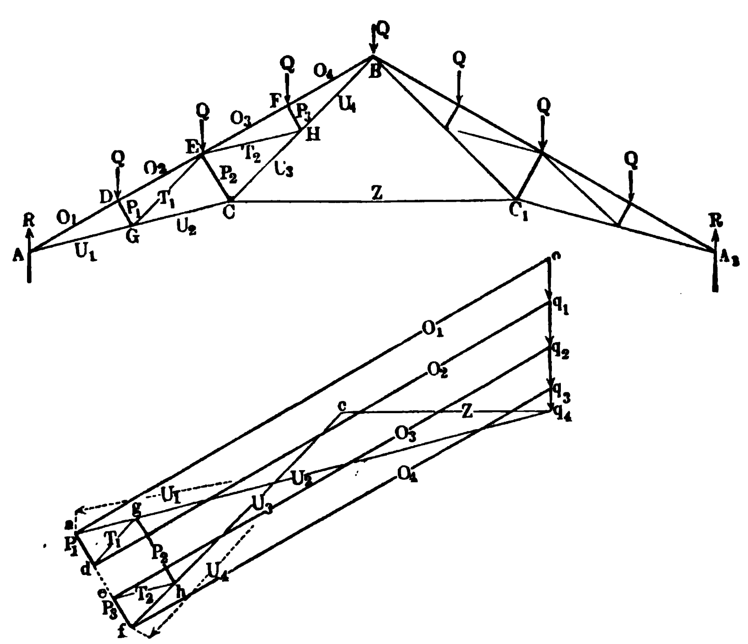
$$P = 2\, U_\nu \sin \alpha_2 + 2\, T_\nu \sin \beta_\nu.$$

Um die Spannungen der einzelnen Glieder graphisch zu ermitteln, hat man wieder auf einer Verticallinie $o\, c_0$ die Belastungen der Pfetten $o\, q_1 = q_1\, q_2 = q_2\, q_3 = Q$ und $q_3\, q_4 = \frac{Q}{2}$ anzutragen und den Auflagerdruck $q_4\, o = R$ nach den Richtungen $q_4\, a$ der Zugstange und $a\, o$ des Sparrens zu zerlegen, um in $a\, o$ die Druckspannung O_1 in AD und in $q_4\, a$ die Zugspannung U_1 in AG zu erhalten. Im Knotenpunkte D halten sich nun die vier Kräfte O_1, Q, O_2 und T_1 das Gleichgewicht. Setzt man daher $O_1 = a\, o$ und $Q = o\, q_1$ zu einer Mittelkraft $a\, q_1$ zusammen, so hat man diese zu zerlegen in $a\, g = T_1$ parallel der Strebe DG und in $g\, q_1 = O_2$ parallel dem Sparren AB. Zieht man ferner durch g eine verticale Gerade $g\, e$ bis zum Durchschnitte mit $a\, q_4$, so erhält man in $g\, e$ die Zugkraft P_1 für die verticale Stange GE, und in $e\, q_4$ die Zugspannung U_2 in dem unteren Gurtungsstücke GH, denn die auf den Knotenpunkt G wirkenden vier Kräfte U_1, T_1, P_1 und U_2 bilden im Kräfteplane das geschlossene Polygon $q_4\, a\, g\, e\, q_4$. In derselben Weise hat man durch q_2 und q_3 Parallellinien mit dem Sparren, durch e eine Parallele $e\, h$ mit EH, $h\, f$ vertical und durch f wieder parallel zu FC zu ziehen. Die eingeschriebenen Bezeichnungen lassen die einzelnen Spannungen leicht erkennen. Die Spannung der mittleren Hängestange P_3 ist durch die doppelte Strecke $q_4\, c_0$ gegeben, welche die Verticalprojection von $q_4\, f\, c$, also von U_3 und T_3 darstellt, und welche auch gleich der Verticalcomponente $c_0\, q_3$ von O_4 vermindert um die halbe Belastung $q_3\, q_4$ des Firstpunktes ist.

In derselben Weise kann man auch leicht für andere in der Praxis vorkommende Dachstühle durch Rechnung oder durch Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons die Anstrengungen der einzelnen Fachwerksglieder ermitteln. Als ein weiteres Beispiel für die Zeichnung des Kräftepolygons sei hier noch der sogenannte französische Dachstuhl (System Polonceau), Fig. 284 (a. f. S.), angeführt. Man kann diesen Dachstuhl gewissermaßen als die Verbindung der beiden armirten, d. h. zu besonderen Fachwerken gestalteten Sparren ABC und A_1BC_1 durch die Zugstange CC_1 ansehen. Die Zwischenglieder DG, EC und FH werden hierbei senkrecht zu der Sparrenrichtung gestellt, und daher haben wegen der gleichen Entfernung der Pfetten D, E, F, B auch die Stangen AG, GE, EH und HB gleiche Neigungen gegen den Sparren AB. Zur Zeichnung des Kräftepolygons mache man wieder $q_4\, o = R = \frac{n-1}{2}\, Q$ und zerlege diese Kraft in $a\, o = O_1$ und $q_4\, a = U_1$ nach den Richtungen des Sparrens AB und der Zugstange AC. In gleicher Weise wie im vorigen Beispiele zieht man

nun $q_1 d$ parallel dem Sparren und durch a eine zur Strebe DG parallele Gerade, wodurch man in ad die Strebenkraft P_1 und in $d q_1$ den Sparrendruck in DE erhält, denn das geschlossene Kräfteviereck $o q_1 d a o$ stellt das Gleichgewicht der vier auf den Punkt D wirkenden Kräfte Q, O_2, P_1 und O_1 dar. Zieht man ferner durch d eine mit GE parallele Gerade dg, so erhält man in dieser die Größe T_1 und in $g q_4$ die Spannung U_2 in GC,

Fig. 284.

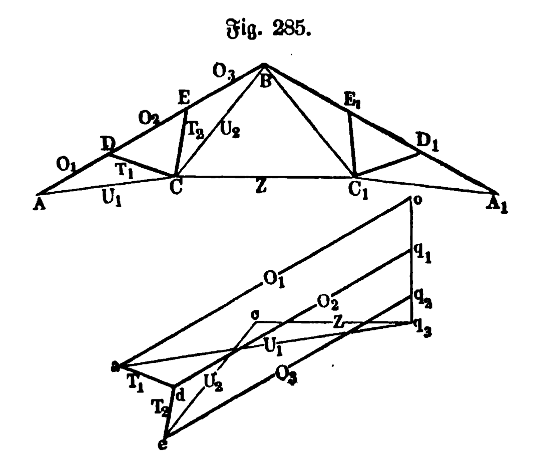


denn für den Punkt G gilt das den darauf wirkenden Kräften U_1, P_1, T_1 und U_2 entsprechende geschlossene Viereck $q_4 a d g q_4$ als Kräfteplan. Um ferner für den Punkt E die Zerlegung vorzunehmen, hat man nur zu beachten, daß die Spannungen T_1 und T_2 wegen der ganz symmetrischen Anordnung und Belastung dieser Stangen gleiche Größe haben müssen. Setzt man daher die Kräfte T_1, O_2 und Q zu dem Linienzuge $g d q_1 q_2$ zusammen, zieht durch g eine Parallele zu EC und durch q_2 eine solche zum Sparren, so wird man in der Verlängerung von ad einen Punkt e finden, so daß $eh = dg$ ist, wenn eh parallel EH gezogen wird. Mit Hülfe der so gefundenen Pressung $P_2 = gh$ in dem Pfosten EC ergeben sich nun ferner die Spannungen U_3 in CH und Z in der Verbindungsstange CC_1, wenn man durch q_4 die Horizontale $q_4 c$ und durch h eine Parallele zu CB zieht,

d. h. wenn man fh verlängert. Dann stellt die geschlossene Figur $q_4 g h c q_4$ in ihren Seiten die vier auf C wirkenden Kräfte U_2, P_2, U_3 und Z vor. Endlich erhält man die Zugspannung U_4 in BH in der Strecke fc, welche als die Schlußlinie des zu den Kräften U_3, T_2 und P_3 gehörigen Kräftepolygons $chef$ betrachtet werden kann.

Von dem französischen Dachstuhle weicht der belgische, Fig. 285, nur unwesentlich dadurch ab, daß von jedem unteren Eckpunkte C und C_1 des charakteristischen Mitteldreiecks zwei Streben CD und CE zur Unterstützung der oberen Gurtung AB abgeführt sind.

Fig. 285.

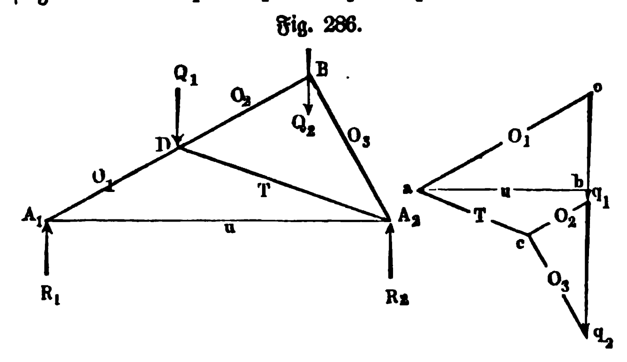


Das Kräftepolygon zeichnet man wieder, indem man zunächst den Auflagerdruck $R = q_3 o$ in die Spannung $U_1 = q_3 a$ und den Sparrendruck $O_1 = a o_1$ zerlegt. Durch eine Parallele ad mit der Strebe DC und eine solche mit dem Sparren durch q_1 gezogen erhält man $T_1 = ad$ und $O_2 = d q_1$, beide als Druckkräfte. Zieht man in gleicher Art durch q_2 parallel zu dem Sparren und durch d eine Gerade de in der Richtung der Strebe CE, so liefert de die Druckkraft T_2 dieser Strebe und $e q_2$ diejenige O_3 des obersten Sparrenstückes. Zur Ermittelung der Zugkräfte $Z = c q_3$ in der Verbindungsstange $C C_1$ und $U_2 = ec$ in BC hat man nur durch q_3 und e mit diesen betreffenden Gliedern Parallelen zu zeichnen.

Bisher wurde immer angenommen, daß das Dach symmetrisch zu der durch den First gehenden Verticalebene angeordnet sei; wenn dagegen nach Fig. 286 (a. f. S.) die Sparren $A_1 B$ und $A_2 B$ verschiedene Neigung gegen den Horizont haben, wie dies häufig bei den sogenannten Sägedächern (Sheds) über Fabrikräumen der Fall ist, bei denen die steilere Dachfläche AB mit Glas eingedeckt wird, so hat man zunächst wieder die Belastungen

Q_1 von D und Q_2 von B durch die verticalen Strecken $o q_1 = Q_1$ und $q_1 q_2 = Q_2$ darzustellen. Eine Zerlegung von $q_1 q_2$ nach den Richtungen der Sparren liefert dann in $c q_2$ und $c q_1$ die Druckkräfte O_3 und O_2 für $A_2 B$ und DB. Zieht man alsdann durch o eine Parallele zu $A_1 B$ und durch c eine solche zur Strebe $A_2 D$, so ist auch die Druckkraft $a o = O_1$ in dem unteren Sparrenstücke $A_1 D_1$ sowie die Strebenkraft $T = a c$ gefunden. In der durch a geführten Horizontallinie $a b$ erhält man die Zugkraft U in der Spannstange $A_1 A_2$, und die Strecken $b o$ und $q_2 b$ stellen die Auflagerreactionen R_1 in A_1 und R_2 in A_2 vor.

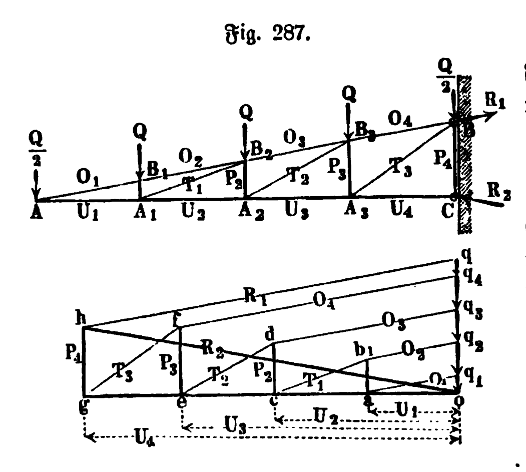
Fig. 286.



In gleich einfacher Weise ermitteln sich die Spannungen in den Fachwerksgliedern von Dachbindern, welche nur einseitig an einer Mauer befestigt sind und consolenartig frei herausragen (Perrondächer). Es sei ABC, Fig. 287, ein in der Mauer bei B und C befestigter Binder eines Perrondaches, dessen obere Gurtung AB außer in A und B noch in den Zwischenpunkten B_1, B_2, B_3 Pfetten trage, auf die je eine Last Q entfällt, während die Punkte A und B nur mit je $\frac{Q}{2}$ belastet anzunehmen sind. Trägt man wieder auf einer Verticalen die Strecken $q q_4 q_3 q_2 q_1 o$ gleich diesen Belastungen der Pfetten ab, so erhält man wie früher O_1 und U_1 in $q_1 a$ und $a o$ durch Zerlegung von $q_1 o = \frac{Q}{2}$ nach den Richtungen von AB und AC. In $B_1 B_2$ ist die Spannung $O_2 = O_1 = q_2 b_1$, während der Pfosten $A_1 B_1$ einer Pressung $P_1 = Q = b_1 a_1$ ausgesetzt ist. Zieht man ferner durch b_1 eine mit der Strebe $A_1 B_2$ Parallele $b_1 c$, so erhält man in derselben die Zugkraft T_1 dieser Strebe und in $o c$ die Pressung U_2 in der unteren Gurtung zwischen A_1 und A_2. Die Wiederholung dieser Construction liefert in den mit der oberen Gurtung Parallelen $q_3 d$ und $q_4 f$ die Spannungen O_3 und O_4 und in $q h$ diejenige Kraft R_1, welche den Festpunkt B aus der Mauer herauszuziehen bestrebt ist, während der

untere Festpunkt C außer der horizontalen Druckkraft $U_4 = g o$ nach der durch den Pfosten $B C$ ausgeübten Verticalkraft $P_4 = h g$, zusammen also einer Kraft ausgesetzt ist, welche durch $R_2 = h o$ der Größe und Richtung nach ausgedrückt ist. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn wie hier angenommen, die untere Gurtung $A C$ horizontal und die Belastung gleichmäßig vertheilt ist, die beiden Kräfte R_1 und R_2 von gleicher Größe sein müssen, indem das Dreieck $h q o$ die Zerlegung der in der Mitte B_2 zwischen A und B wirkend zu denkenden Gesammtbelastung $4 Q$ nach den Richtungen $B_2 B$ und $B_2 C$ darstellt.

Fig. 287.

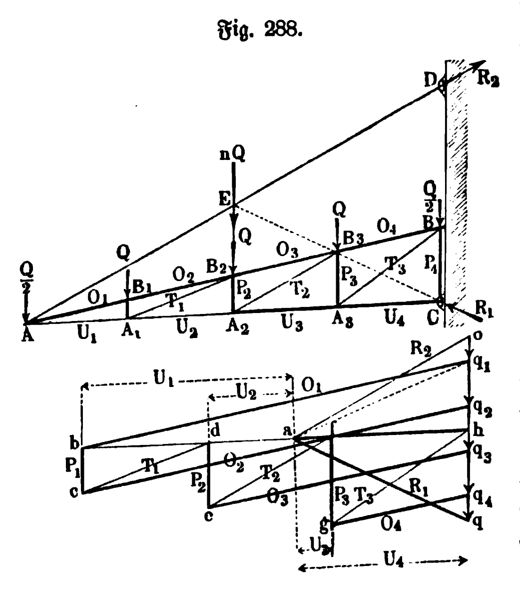


Zuweilen werden die Binder von Perrondächern oberhalb durch Hängestangen $A D$, Fig. 288 (a. f. S.), gestützt, welche fest mit der Mauer verbunden sind. In diesem Falle ist die Anstrengung der Träger eine wesentlich andere als bei der durch Fig. 287 dargestellten Anordnung, insofern der Träger in Fig. 288 gewissermaßen wie ein in A und C auf zwei Stützen ruhender Balken anzusehen ist, bei dessen Belastung also die obere Gurtung gedrückt wird, während der Träger in Fig. 287 einen an einem Ende eingeklemmten consolartigen Balken bildet, bei dessen Biegung die obere Gurtung convex, also gezogen wird. Durch die Hängestange in Fig. 288 wird nämlich auf das Ende A ein gewisser Zug R_2 ausgeübt, dessen verticale Componente genau so wirkt, wie die Reaction einer unterhalb A angebrachten Stütze, während die horizontale Componente in dem Träger eine Pressung nach der Richtung seiner Längenaxe hervorruft. Es möge zum Schlusse auch dieser Fall hier noch näher geprüft werden, und zwar soll der Allgemeinheit wegen die untere Gurtung $A C$ des Fachwerkes nicht horizontal, sondern beliebig gegen den Horizont geneigt gedacht werden. Es muß hierbei jedoch bemerkt werden, daß die Prüfung unter der Voraussetzung geführt wird, der Träger ruhe an der Mauer nur in einem Stützpunkte C auf, sei aber nicht, wie in Fig. 287, mit der Mauer unwandelbar befestigt. Wollte man nämlich eine solche starre Befestigung voraussetzen, so würde die Untersuchung nur unter Berücksichtigung

der elastischen Durchbiegungen zu führen sein, ähnlich wie dies für alle Balken zu geschehen hat, die in mehr als zwei Punkten gestützt werden.

Um die in der Hängestange AD hervorgerufene Spannung R_2 zu bestimmen, hat man nur den Durchschnitt E der Gesammtbelastung nQ des Trägers mit dem Stützpunkte C zu verbinden, und Q nach den Richtungen ED und EC zu zerlegen. Trägt man daher auf einer Verticallinie die Belastungen $\frac{Q}{2}, Q, Q \ldots \frac{Q}{2}$ der Punkte $A, B_1, B_2 \ldots B$ gleich $oq_1, q_1q_2, q_2q_3 \ldots$ an und zerlegt die Gesammtbelastung $nQ = oq$ nach den Richtungen von ED und EC, so erhält man in oa die Zugkraft R_2 der Hängestange AD und in aq die Druckkraft R_1 gegen den Stützpunkt C.

Fig. 288.

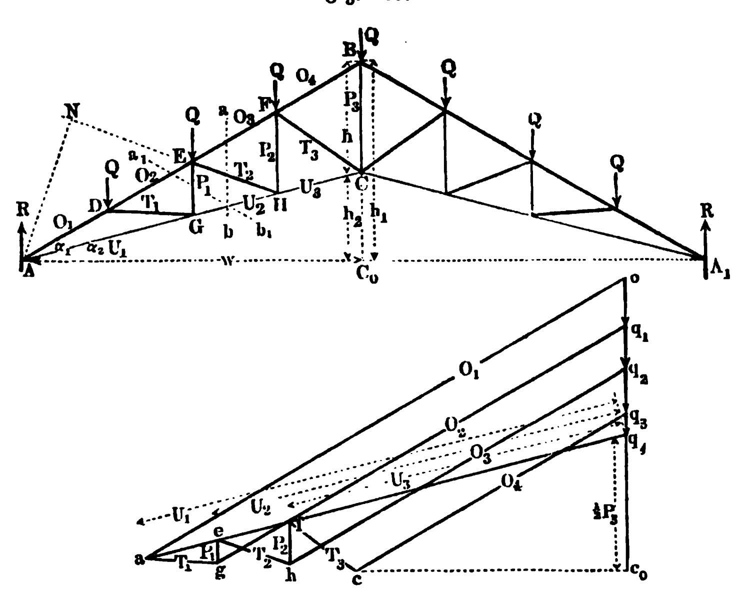


Mit Hülfe der Zugstangenkraft R_2, welche man als die in A auf den Träger geäußerte Reaction anzusehen hat, zeichnet man nun in der bekannten Art das Kräftepolygon, dessen einzelne Strecken die Anstrengungen der Fachwerksglieder vorstellen.

Setzt man für den Punkt A die Kraft $R_2 = ao$ in AD mit dem Gewichte $\frac{Q}{2} = oq_1$ in A zu der Resultirenden aq_1 zusammen, zieht durch q_1 eine Parallele zur oberen Gurtung AB und durch a eine solche zur unteren Gurtung AC, so erhält man die Pressung O_1 des Stückes AB_1 in der Strecke bq_1, während die Spannung U_1 in AA_1 durch ab dargestellt ist. Für den Punkt B_1, auf welchen die Kräfte O_1, Q, O_2 und P_1 wirken, gilt dann das Kräftepolygon bq_1q_2c, aus welchem $cq_2 = O_2 = O_1$ und $cb = P_1$ als Druckkraft in der ersten Verticalen A_1B_1 folgt. Ebenso zeichnet man für den Punkt A_1 aus U_1, P_1, T_1 und U_2 das Kräftepolygon $abcda$, welches in cd die Zugkraft T_1 der Diagonale A_1B_2 und in da die Zugkraft U_2 in A_1A_2 liefert. Die weitere Ausführung der Zeichnung führt für den Punkt B_2 zu dem Polygon dcq_2q_3ed, also zu der Druck-

kraft $O_3 = e q_3$ in $B_2 B_3$ und zu derjenigen $P_2 = e d$ in $A_2 B_2$. Wenn man nun weiter für A_2 die Kräfte U_2, P_2, T_2 und U_3 zu dem Vierecke $a d e f a$ zusammensetzt, so findet man, daß die untere Gurtung $A_2 A_3$ mit $U_3 = f a$ gedrückt wird, während die Diagonale $A_2 B_3$ einem Zuge von $T_2 = e f$ ausgesetzt ist. Eine weitere Fortsetzung führt in derselben Weise zu $O_4 = g q_4$, $U_4 = a h$, $P_3 = g f$, $P_4 = q h$ und $T_3 = g h$. Der Punkt C ist einer Einwirkung der Kraft $P_4 = h q$ des Endpfostens und einer Druckkraft $U_4 = a h$ der Gurtung $A_3 C$, also wie oben schon gefunden wurde, einer resultirenden Kraft $R_1 = a q$ ausgesetzt.

Fig. 289.



Diese graphischen Ermittelungen geben unter der Voraussetzung eines nicht zu kleinen Maßstabes die gesuchten Kräfte in jedem Falle mit genügender Schärfe. Auch ist es leicht, aus dem Kräftepolygone die analytischen Ausdrücke für die einzelnen Anstrengungen zu ermitteln, wenn man die Neigungen bezw. Längen der einzelnen Fachwerksglieder einführt, eine solche Entwickelung der Formeln für verschiedene Fälle soll hier nicht vorgenommen werden.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß der Dachbinder über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist, wie dies dem thatsächlichen Zustande entspricht. Es ist auch leicht zu erkennen, daß bei den gewöhnlichen Dachstühlen diesem Zustande der vollen Belastung die ungünstigste Bean-

spruchung der einzelnen Fachwerksglieder entspricht. Denkt man sich nämlich durch irgend einen Dachstuhl, wie in Fig. 289 (a. v. S.), einen beliebigen Schnitt ab gelegt, und wählt zur Bestimmung der Spannung O der oberen Gurtung den Momentenmittelpunkt in H, so erkennt man, daß die Belastung jedes beliebigen Knotenpunktes das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf H und somit die Pressung O in EF vergrößert. Wirkt nämlich die betreffende Last rechts von dem Schnitte, z. B. in F, so bringt sie nur eine Vergrößerung der Auflagerreaction R in A, folglich eine Vergrößerung des rechts drehenden Momentes um H hervor. Das letztere gilt auch für die Belastung eines links vom Schnitte ab gelegenen Punktes wie z. B. D, da man die Mittelkraft aus der hier aufgebrachten Last Q und der durch dieselbe in A erzeugten aufwärts gerichteten Vergrößerung der Auflagerreaction gleich dem abwärts gerichteten Auflagerdrucke zu setzen hat, welchen die in D wirkende Last Q in A_1 erzeugt. Das Moment dieses Auflagerdruckes um H ist ebenfalls rechtsdrehend, daher auch durch diese Belastung eine Pressung in der oberen Gurtung erzeugt wird. Da man eine ganz ähnliche Betrachtung auch für die Spannung U der unteren Gurtung anstellen kann, so geht hieraus hervor, daß die Gurtungen hier ebenso wie bei den Parallelträgern und Parabelträgern, bei der vollen Belastung der Dachbinder am ungünstigsten angestrengt werden. In Bezug auf die Anstrengung der Diagonalen, z. B. EH, erkennt man sogleich, daß irgend eine Belastung rechts von dem Schnitte ab, z. B. in F, nur eine Vergrößerung des Auflagerdruckes in A hervorruft, diese Kraft aber ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale ist, indem hier A den Momentenmittelpunkt darstellt. Daher werden nur die links von dem Schnitte, d. h. die zwischen diesem und dem der Mitte B abgewendeten Auflager angebrachten Belastungen in der Diagonale Spannungen hervorrufen. Hiernach wird aber die Diagonale in dem ungünstigsten Zustande, wo diese sämmtlichen Punkte links belastet sind, gerade so angestrengt, wie bei der vollen Belastung des Trägers, da die Belastungen rechts vom Schnitte ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale sind. Da eine gleiche Betrachtung auch für die Verticalstiele wie FH gilt, so geht daraus hervor, daß die volle Belastung des Dachbinders dem Zustande entspricht, in welchem sämmtliche Fachwerksglieder ihrer größten Anstrengung ausgesetzt sind.

Beispiel. Ueber einem Raume von 16 m Spannweite soll ein Dach nach Art der Fig. 289 angebracht werden, dessen Binder 2,5 m von einander entfernt sind. Die Höhe des Firstes über der Horizontalen durch die Auflager soll zu $h_1 = 3{,}5$ m angenommen werden, während der untere Knotenpunkt der Mitte, in welchem sich die Spannstangen vereinigen, um $h_2 = 0{,}5$ m über den Auflagern gelegen ist. Es sind die Anspannungen der einzelnen Constructionsglieder unter Annahme einer Gesammtbelastung des Daches durch Eigengewicht, Schnee und Wind, von 160 kg pro Quadratmeter Grundrißfläche zu ermitteln.

Man hat hier bei $n = 8$ Feldern $a = \frac{16}{n} = 2\,m$, und daher die Belastung jedes Knotenpunktes

$$Q = 2 . 2{,}5 . 160 = 800\,kg.$$

Ferner folgen die Längen eines Sparrens

$$AB = l_1 = \sqrt{8^2 + 3{,}5^2} = 8{,}732; \quad \frac{l_1}{4} = 2{,}18\,m,$$

einer Spannstange

$$AC = l_2 = \sqrt{8^2 + 0{,}5^2} = 8{,}015; \quad \frac{l_2}{4} = 2{,}004 \backsim 2{,}0\,m.$$

Der mittlere Verticalpfosten hat $h = 3\,m$ Länge, so daß die der beiden anderen Pfosten GE und HF zu

$$\frac{h}{2} = 1{,}5 \text{ bezw. } \frac{3}{4}\,h = 2{,}25\,m$$

sich ergeben. Der Neigungswinkel der Sparren gegen den Horizont folgt aus

$$tg\,\alpha_1 = \frac{3{,}5}{8} = 0{,}4375 \text{ zu } \alpha_1 = 23^0\,40',$$

derjenige der Spannstangen aus

$$tg\,\alpha_2 = \frac{0{,}5}{8} = 0{,}0625 \text{ zu } \alpha_2 = 3^0\,35',$$

mithin hat man

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 20^0\,5'.$$

Man erhält daher die Längen der Streben DG, EH und FC durch

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{l_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2\,l_2}{4}\right)^2 - 2\,\frac{l_1}{4}\,\frac{2\,l_2}{4}\,cos\,(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$= \sqrt{4{,}752 + 16 - 2 . 2{,}18 . 4 . 0{,}939} = 2{,}09\,m,$$

$$c_2 = \sqrt{(2 . 2{,}18)^2 + (3 . 2)^2 - 2 . 4{,}36 . 6 . 0{,}939} = 2{,}43\,m,$$

$$c_3 = \sqrt{(3 . 2{,}18)^2 + (4 . 2)^2 - 2 . 6{,}54 . 8 . 0{,}939} = 2{,}92\,m,$$

Demgemäß finden sich nun die Spannungen nach (8) bis (11) in dem Sparren:

$$O_1 = \frac{8-1}{2}\,800\,\frac{8{,}732}{3} = 8150\,kg \text{ in } AD,$$

$$O_2 = \frac{8-2}{2}\,800\,\frac{8{,}732}{3} = 6987\,kg \text{ in } DE,$$

$$O_3 = \frac{8-3}{2}\,800\,\frac{8{,}732}{3} = 5822\,kg \text{ in } EF,$$

$$O_4 = \frac{8-4}{2}\,800\,\frac{8{,}732}{3} = 4658\,kg \text{ in } FB;$$

in der Spannstange:

$$U_1 = \frac{8-1}{2}\,800\,\frac{8{,}015}{3} = 7481\,kg \text{ in } AG,$$

$$U_2 = \frac{8-2}{2}\,800\,\frac{8{,}015}{3} = 6413\,kg \text{ in } GH,$$

$$U_3 = \frac{8-3}{2}\,800\,\frac{8{,}015}{3} = 5344\,kg \text{ in } HC,$$

in den Streben:

$$T_1 = \frac{8}{4}\,\frac{2{,}09}{3}\,800 = 1115\,\text{kg in } DG,$$

$$T_2 = \frac{8}{4}\,\frac{2{,}43}{3}\,800 = 1296\,\text{kg in } EH,$$

$$T_3 = \frac{8}{4}\,\frac{2{,}92}{3}\,800 = 1557\,\text{kg in } FC;$$

in den Verticalen:

$$P_1 = \frac{1}{2}\,800 = 400\,\text{kg in } EG,$$

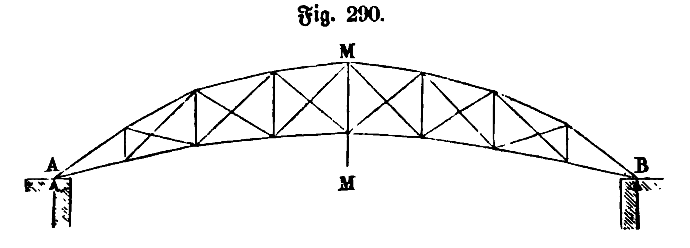
$$P_2 = 800\,\text{kg in } FH.$$

In der mittleren Hängestange BC hat man:

$$P_3 = \left(\frac{n}{2}\,\frac{h_1}{h} - 1\right) Q = \left(4\,\frac{3{,}5}{3} - 1\right) 800 = 2933\,\text{kg}.$$

§. 61. **Sichelförmige Träger.** Zur Ueberdeckung weiter Räume, z. B. der Bahnhofshallen, wendet man in neuerer Zeit häufig als Dachbinder eiserne Fachwerksträger an, deren obere sowohl wie untere Gurtungen nach krummen bezw. gebrochenen Linien gebildet sind, so daß die Träger die sichelförmige Gestalt der Fig. 290 annehmen.

Fig. 290.



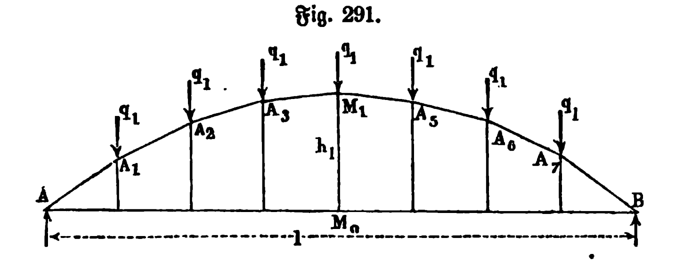
Diese Träger, welche kurz als Sichelträger bezeichnet werden mögen, sind wie die vorstehend besprochenen Brückenträger ebenfalls mit einem System von Füllungsgliedern zwischen den Gurtungen zu versehen, und es dienen die Knotenpunkte der oberen Gurtung zur Aufnahme der durch das Gewicht der Decke sowie des Schnees ꝛc. dargestellten Belastung. Das Eigengewicht der Träger selbst kann für die Berechnung ebenfalls genügend genau in den Knotenpunkten der oberen Gurtung wirksam gedacht werden, indem nur der kleinere Theil dieses Gewichtes, etwa $^1/_3$ desselben, thatsächlich in den unteren Knotenpunkten wirkt. Will man dem letzteren Umstande jedoch Rechnung tragen, so wird man leicht die dadurch veranlaßte geringe Correction der Resultate vornehmen können, welche die Rechnung unter der Annahme der Concentrirung des Eigengewichtes in den oberen Knotenpunkten ergiebt.

Die Form der Gurtungen ist für die Rechnung als eine gebrochene oder polygonale anzunehmen, denn wenn man auch, etwa aus Schönheitsrücksichten, die Gurtungen als stetig gekrümmte ausführt, so wird bei den meist beträchtlichen Spannweiten die gerade Verbindungslinie zweier auf einander folgenden Knotenpunkte einer Gurtung doch in der Regel ganz im Innern des zugehörigen Gurtungsstückes verbleiben.

Die zur verticalen Mittellinie MM symmetrische Curve, in welcher man die Knotenpunkte einer Gurtung anordnet, kann zwar beliebig gewählt werden, es empfiehlt sich aber, zu diesen Curven für beide Gurtungen Parabeln mit der Mittellinie MM als Hauptaxe zu wählen, weil unter dieser Annahme die Diagonalen für den Fall einer gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers gar keiner Anstrengung ausgesetzt sind, wie sich mit Rücksicht auf das für den Parabelträger in §. 56 Gesagte wie folgt ergiebt.

Es wurde daselbst gefunden, daß bei einem Fachwerksträger AB, Fig. 291, mit horizontaler unterer Gurtung, dessen obere Knotenpunkte in einer Parabel

Fig. 291.



gelegen sind, die Spannung der unteren Gurtung für alle Punkte denselben Betrag U hat, wenn der Träger auf seiner ganzen Länge mit einer gleichmäßig über die Horizontalprojection verbreiteten Belastung bedeckt ist, und daß die horizontale Componente H der Spannung auch für jeden Punkt der oberen Gurtung denselben Betrag gleich U haben muß. Die Diagonalen sind für diesen vorausgesetzten Belastungszustand keinerlei Anstrengungen ausgesetzt. Es ergab sich nach (3) des gedachten Paragraphen diese Spannung:

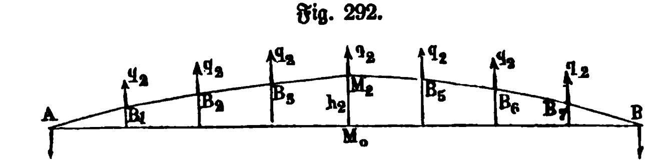
$$U_1 = H_1 = q_1 n \frac{l}{8 h_1}, \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

wenn $l = AB$ die freie Spannweite, $h_1 = M_1 M_0$ die Höhe des Parabelscheitels und q_1 die Belastung jedes Knotenpunktes, d. h. jedes der n Felder bedeutet. Wenn dabei die Belastungen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung wirken, so ist jeder Verticalständer einer Zugkraft gleich q_1 ausgesetzt, während bei einer Belastung der oberen Gurtung auch die Spannungen der Verticalpfosten gleich Null ausfallen, indem in jedem Punkte

wie A_2 die daselbst angebrachte Belastung q_1 von den beiden verticalen Spannungscomponenten der anstoßenden Gurtungsstücke $A_2 A_1$ und $A_2 A_3$ im Gleichgewichte gehalten wird. Man könnte sich daher vorstellen, daß die einzelnen Stücke der oberen Gurtung wie einzelne, in $A_1, A_2, A_3 \ldots$ lose gegen einander gestützte Wölbsteine wirken, wobei der Gegendruck der Widerlager A und B durch die Zugkraft $U = H$ der unteren Gurtung ersetzt wird.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für einen Parabelträger AB, Fig. 292, bei welchem die oberen Knotenpunkte durch vertical aufwärts gerichtete

Fig. 292.



Kräfte q_2 gezogen werden, mit dem einzigen Unterschiede, daß in diesem Falle die untere Gurtung mit der constanten Kraft

$$U_2 = H_2 = q_2 n \frac{l}{8 h_2} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

gedrückt wird, während in der oberen Gurtung nunmehr Zugspannungen eintreten, deren Horizontalcomponente überall gleich H_2 ist. Einen solchen Träger kann man sich wie eine nach der Parabel $A M_2 B$ geformte Kette vorstellen, deren Enden A und B durch eine horizontale Spreize AB aus einander gehalten werden, indem auch hier sowohl die Verticalstangen wie die Diagonalen als unwirksam fortgelassen werden können. Der verticale Auflagerdruck in A oder B ist natürlich für Fig. 291 zu $\frac{n q_1}{2}$ abwärts gerichtet und für Fig. 292 gleich $\frac{n q_2}{2}$ aufwärts gerichtet.

Denkt man sich nunmehr die beiden Träger hinsichtlich ihrer Pfeilhöhen und Belastungen so bemessen, daß die Horizontalspannungen H_1 und H_2 gleiche Größe annehmen, d. h. setzt man

$$q_1 n \frac{l}{8 h_1} = q_2 n \frac{l}{8 h_2} \text{ oder } \frac{q_1}{h_1} = \frac{q_2}{h_2} \quad \ldots \quad (3)$$

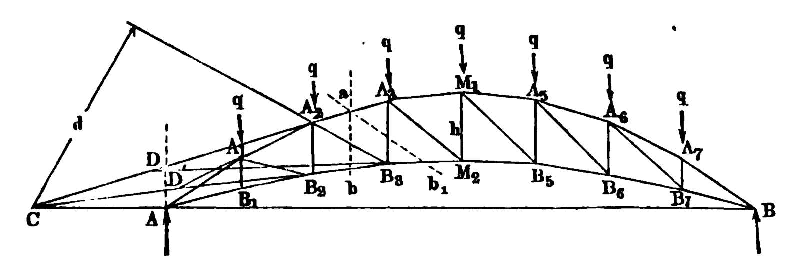
voraus, so kann man die beiden Träger der Figuren 291 und 292 zu einem einzigen von der sichelförmigen Gestalt $A M_1 B M_2$ der Fig. 293 vereinigt denken, indem die gerade Gurtung AB ganz fortgelassen wird, welche gänzlich wirkungslos wird, da die Zugspannung des Bandes AB der Fig. 291 sich mit der gleichen Druckspannung der Spreize in Fig. 292 aufhebt. Man

hat sich dann in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung eine Verticalkraft q_1 abwärts und in jedem unteren Knotenpunkte eine Verticalkraft q_2 aufwärts zu denken. Stellt man sich nun schließlich die unteren Knotenpunkte $B_1, B_2 \ldots$ mit den oberen $A_1, A_2 \ldots$ durch Verticalstangen verbunden vor, so ist es klar, daß für den Zustand des Gleichgewichtes jeder obere Punkt A dieser Stangen mit einer Kraft

$$q = q_1 - q_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

belastet zu denken ist, indem diese abwärts wirkende Last $q_1 - q_2$ zusammen mit dem abwärts gerichteten Zuge q_2 im unteren Knotenpunkte B dann

Fig. 293.



dem aufwärts gerichteten Zuge q_1 im oberen Knotenpunkte das Gleichgewicht hält.

Den Auflagerdruck und die Reactionen erhält man in A und B dann zu

$$R = \frac{n}{2}(q_1 - q_2) = \frac{n\,q}{2} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Aus (4) und (3) folgt übrigens:

$$q_1 = \frac{q}{1 - \frac{h_2}{h_1}} = q\,\frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und

$$q_2 = \frac{q}{\frac{h_1}{h_2} - 1} = q\,\frac{h_2}{h_1 - h_2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Hieraus geht hervor, daß die Diagonalen des parabelförmigen Sichelträgers für den Zustand der vollen Belastung desselben keinerlei Anstrengungen ausgesetzt sind. Ebenso ergiebt sich, wie bei dem Parabelträger, daß bei dieser Belastung die Spannungen der Gurtungen überall den größtmöglichen Betrag annehmen, und zwar berechnen sich diese Spannungen wie folgt.

Unter der gemachten Voraussetzung (3), daß die horizontalen Componenten H_1 und H_2 der Spannungen beider Gurtungen gleich groß sind, erhält man aus (1) und (2):

$$q_1 = H \frac{8}{n\,l}\, h_1 \text{ und } q_2 = H \frac{8}{n\,l}\, h_2,$$

und daher nach (4):

$$q = q_1 - q_2 = H \frac{8}{n\,l} (h_1 - h_2) = H \frac{8}{n\,l}\, h,$$

wenn die Trägerhöhe in der Mitte $h_1 - h_2 = h$ gesetzt wird. Hieraus ergiebt sich:

$$H = q\,n \frac{l}{8\,h} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (8)$$

als horizontale Spannungscomponente in allen Punkten beider Gurtungen. Um diese Spannungen selbst zu bestimmen, seien im ν ten Felde unter α_ν und β_ν die Neigungswinkel der oberen und unteren Gurtung gegen den Horizont verstanden, so erhält man die betreffende Gurtungsspannung wie beim Parabelträger zu:

$$O_\nu = \frac{H}{\cos\alpha_\nu} = \frac{q\,n}{8}\,\frac{l}{h \cos\alpha_\nu} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

und

$$U_\nu = \frac{H}{\cos\beta_\nu} = \frac{q\,n}{8}\,\frac{l}{h \cos\beta_\nu}, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

d. h. also, die Spannungen von irgend zwei Gurtungsstücken verhalten sich wie deren Längen, wenn eine gleiche Weite der einzelnen Felder vorausgesetzt wird.

Wenn der Träger nicht über seine ganze Länge, sondern nur über einen Theil derselben mit der zufälligen Belastung bedeckt ist, welcher Zustand bei Dächern in Folge einseitigen Schnee- und Winddrucks sich einstellen kann, so werden auch in den Diagonalen der Felder Anstrengungen hervorgerufen, und man wird auch hier die größten Beträge desselben zu ermitteln haben, um nach ihnen die Querschnitte der Diagonalen zu bemessen. Diese Ermittelung geschieht in derselben Weise, wie bei dem einfachen Parabelträger. Nimmt man zunächst, wie in Fig. 293, nur einfache nach links ansteigende Diagonalen an, und denkt sich durch irgend ein Feld wie $A_2 A_3$ einen Schnitt $a\,b$ gelegt, so hat man den Schnittpunkt C der beiden durchschnittenen Gurtungstheile als Momentenmittelpunkt anzunehmen, um aus der dafür aufzustellenden Momentengleichung die Spannung T der Diagonale $A_2 B_3$ zu finden. Dieser Schnittpunkt C je zweier demselben Felde angehörigen Diagonalen liegt auf der Horizontalen $A\,B$ und zwar außerhalb der Auflagerpunkte, und man findet durch eine ganz gleiche Betrachtung, wie sie in §. 56 für den Parabelträger angestellt worden ist, daß jede Belastung

eines rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunktes in der Diagonale Zugspannungen, dagegen jede Belastung des linken Trägertheiles Druckspannungen erzeugt. Man hat also, um die beiden größten Anstrengungen zu bestimmen, ein Mal den rechten und das andere Mal den linken Trägertheil mit der zufälligen Last bedeckt anzunehmen. Man erhält auf diese Weise für die größte Zug- und Druckspannung der Diagonale gleiche Werthe, da die Spannung zu Null wird, wenn beide Trägertheile gleichmäßig belastet werden. Da die permanente Belastung durch das Eigengewicht ohne Einfluß auf die Spannungen der Diagonalen ist, so genügt es, der Berechnung derselben lediglich die zufällige Belastung durch Schnee- und Winddruck zu Grunde zu legen.

Auch für die in den Verticalstreben durch einseitige Belastung hervorgerufenen Spannungen gilt eine ähnliche Betrachtung. Denkt man sich etwa durch den Stiel $A_3 B_3$ einen Schnitt $a b_1$ gelegt, so hat man den Schnittpunkt D der beiden Gurtungsglieder $A_2 A_3$ und $B_3 M_2$ als Momentenmittelpunkt anzunehmen. Auch hier ist sogleich zu erkennen, daß jede Belastung eines rechts von dem Schnitte $a b_1$ gelegenen Knotenpunktes in dem Verticalstiele Druckspannungen, und jede Belastung links Zugspannungen erzeugt, so lange der Schnittpunkt D außerhalb der Verticallinien durch die Auflager A und B fällt. Wenn dagegen ein solcher Schnittpunkt, wie dies z. B. mit demjenigen D' zwischen $A_1 A_2$ und $B_2 B_3$ der Fall ist, rechts von A innerhalb der durch A und B gehenden Verticalen gelegen ist, so erkennt man, daß die Belastungen aller Knotenpunkte in dem Pfosten Zugspannungen erzeugen.

Hiernach lassen sich die größten Spannungen der Zwischenglieder in bekannter Weise bestimmen, und man wird die Lage der Durchschnittspunkte C und D am einfachsten aus der Zeichnung entnehmen können. Diese so ermittelten Werthe gelten für die Anordnung einfacher Diagonalen nach Art der Fig. 293. Will man die Einrichtung so treffen, daß die Diagonalen nur durch Zugkräfte angesprochen werden sollen, so hat man, wie früher mehrfach angegeben, zu jeder der gezeichneten links ansteigenden Diagonalen noch eine rechts ansteigende Diagonale hinzuzufügen, welche der Kürze wegen hier als Gegendiagonale bezeichnet werden möge. Hierdurch erreicht man, daß die Diagonalen überall nur gezogen werden, und zwar wird für die Gegendiagonale in irgend einem Felde diejenige Spannungszahl maßgebend sein, welche nach der oben für einfache Diagonalen angegebenen Ermittelung derjenigen Diagonale zukommt, die in dem zu dem betrachteten Felde symmetrisch gelegenen Felde angebracht ist. Dies erkennt man leicht aus einer Vergleichung der Figuren 294 und 295 (a. f. S.). Während nämlich bei der Wirkung der links ansteigenden Diagonalen in Fig. 294, z. B. die Diagonale $A_5 B_6$ des sechsten Feldes ihre größte Zugspannung bei einer Be-

lastung von A_6 und A_7 annimmt, findet, wenn die Gegendiagonalen in Fig. 295 gespannt werden, die größte Zugspannung der Diagonale $B_2 A_3$ des zweiten Feldes bei einer Belastung von A_1 und A_2 statt. Es ist aber ersichtlich, daß die beiden in Fig. 294 und Fig. 295 dargestellten Belastungszustände mit einander übereinstimmen.

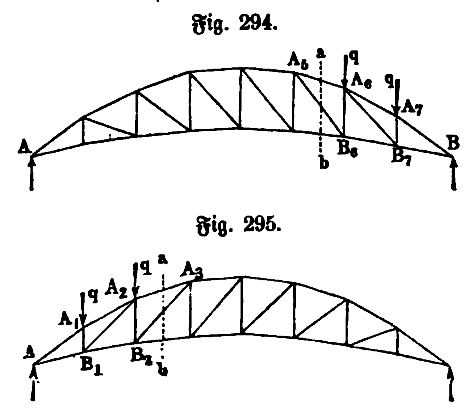


Fig. 294.

Fig. 295.

In Betreff der Verticalständer muß bemerkt werden, daß dieselben bei der Anwendung von gekreuzten, nur gegen Zugkräfte wirksamen Diagonalen ebensowohl gedrückt wie gezogen werden können. Die größten Zugspannungen stellen sich offenbar in den Verticalstielen ebenfalls bei der vollen Belastung des Trägers ein, da in diesem Falle die Spannungen U der unteren Gurtungen, welche allein Zug in den Stielen hervorzurufen geeignet sind, ihre größten Werthe annehmen, die Diagonalen dagegen, welche nur Pressungen in den Stielen erzeugen können, für diesen Zustand ohne Spannung sind. Wie bereits anfänglich gefunden wurde, ist diese größte Zugspannung der Stiele für den Zustand der vollen Trägerbelastung durch

$$q_1 = q \frac{h_2}{h_1 - h_2} = q \frac{h_2}{h}$$

ausgedrückt.

Um auch die größten Pressungen der Stiele zu finden, dienen die nach dem Vorstehenden unter Annahme eines einfachen Diagonalensystems, Fig. 293, gefundenen Druckspannungen der Verticalstiele. Hierbei hat man nur zu beachten, daß man für jeden Verticalpfosten von den beiden Druckspannungen, welche für diesen Stiel und für den ihm symmetrisch zur Mittellinie gelegenen gefunden wurden, immer die absolut größere Pressung anzunehmen hat. Von der Richtigkeit dieser Bemerkung überzeugt man sich leicht durch die Figuren 296 bis 298. Gesetzt, man erhielte für den Stiel $A_3 B_3$, Fig. 296, in dem Falle, daß die links ansteigenden Diagonalen wirksam sind, die größte Druckspannung bei einer

Belastung der Knotenpunkte A_3, M, A_5, A_6, A_7 zu P_3, und für den Stiel A_5B_5, unter derselben Voraussetzung bezüglich der activen Diagonalen, Fig. 297, den größeren Werth P_5, so hat man diesen Werth P_5 auch für A_3B_3 anzunehmen. Denn wenn man für diesen letztgedachten Pfosten A_3B_3 unter der Annahme, daß die rechts ansteigenden Diagonalen, Fig. 298, zur

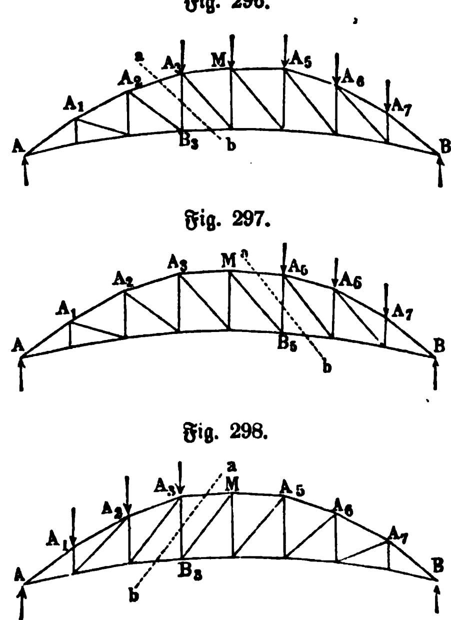


Fig. 296.

Fig. 297.

Fig. 298.

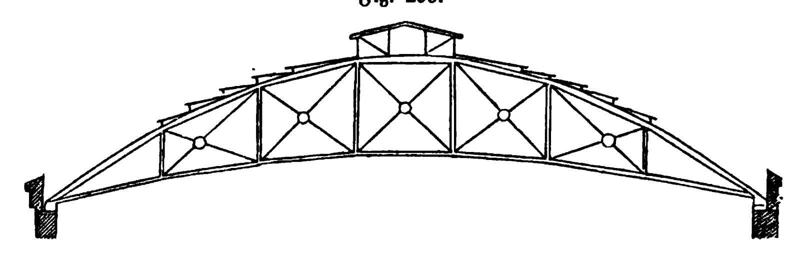
Wirkung kommen, die größte Pressung entsprechend einer Belastung der Knotenpunkte A_1, A_2, A_3 links vom Schnitte ab ermittelt, so gelangt man wegen der übereinstimmenden Belastungszustände zu demselben Werthe P_5, welcher nach Fig. 297 für A_5B_5 gefunden wurde. Andererseits hätte man den für A_3B_3 gefundenen Werth P_3 auch für A_5B_5 zu Grunde zu legen, für den Fall, daß P_3 größer als P_5 sich ergeben würde. Ein Beispiel wird den Gang der Ermittelung näher erläutern.

In Fig. 299 (a. f. S.) ist ein Sichelträger dargestellt, wie solche über der Empfangshalle des Berliner Bahnhofs der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn *) aufgestellt sind. Die Spannweite dieser Binder beträgt $120' = 37{,}66$ m und es sind die Pfeilhöhen der Parabeln, in denen die Knotenpunkte der oberen und unteren Gurtung angeordnet sind, zu $^1/_5$ bezw. $^1/_{15}$ der Spannweite angenommen. Von den 54 in $12' = 3{,}75$ m

*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1870.

von einander entfernten Bindern ist jeder durch sechs Verticalpfosten in sieben Felder getheilt, von welchen die beiden äußeren, je 20′ = 6,276 m weiten, mit Zinkblech, die fünf mittleren Felder von je 5,02 m Weite mit Glas abgedeckt sind. Die oberen Gurtungstheile sind, da sie wegen der

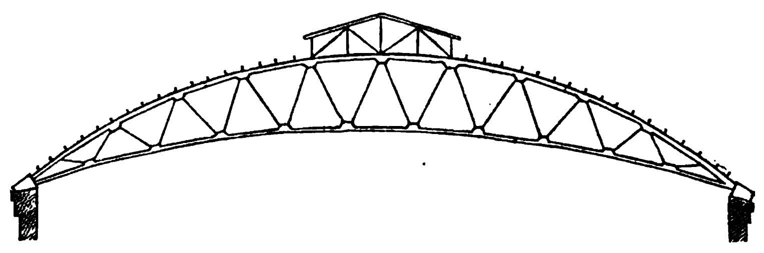
Fig. 299.



großen Entfernung der Knotenpunkte zwischen den letzteren noch durch Pfetten belastet sind, als Gitterbalken construirt, um ihnen die genügende Festigkeit gegen Durchbiegung zu geben. Von den 50′ = 15,69 m über dem Perron gelegenen Enden der Träger ist das eine fest, das andere auf Rollen gelagert. Das Eigengewicht der Construction setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Eisentheile mit 12,2 Pfd. pro Quadratfuß (62 kg pro Quadratmeter) und dem der Glas und Zinkdecke mit 4 Pfd. pro Quadratfuß (20,3 kg pro Quadratmeter). Als zufällige Belastung ist ein Winddruck von 6 Pfd. und eine Schneelast von 14 Pfd. für jeden Quadratfuß Grundfläche (30,5 kg und bezw. 71 kg pro Quadratmeter) der Berechnung zu Grunde gelegt.

Man kann die Füllungsglieder dieser Sichelträger natürlich auch nach einem anderen Systeme anordnen, so z. B. ist bei dem in Fig. 300 dargestellten Binder über der Empfangshalle des Görlitzer Bahnhofs zu Berlin*) ein System von Zwischengliedern nach Art des Neville'schen gewählt. Für diese Träger, deren Spannweite 121′ = 38 m beträgt, hat

Fig. 300.

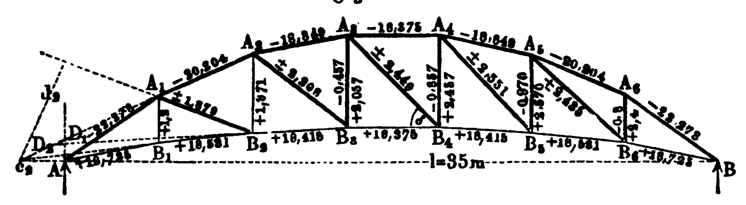


*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1872.

die Obergurtung die Form eines Kreisbogens von $95{,}5' = 30$ m Halbmesser erhalten. Die Berechnung derartiger Sichelträger bietet nach dem Vorstehenden und mit Berücksichtigung des über die Neville'schen Träger in §. 55 Gesagten keine Schwierigkeiten dar.

Beispiel. Als Beispiel sei ein Binder von 35 m Spannweite gewählt, welcher nach Art der über der Empfangshalle des Berliner Bahnhofes der Niederschlesischen Bahn aufgestellten in sieben gleiche Felder von 5 m Weite getheilt sein mag. Für die Parabeln der Gurtungen sollen bezw. 7 m und 2 m Pfeilhöhe gewählt werden, und es möge für jeden Knotenpunkt die permanente Belastung zu $p = 1000$ kg $= 1$ t, die zufällige Belastung durch Schnee und Wind zu $k = 2$ t, also die Gesammtbelastung zu $q = 3$ t angenommen werden.

Fig. 301.



Zur Verzeichnung der parabolischen Gurtungen erhält man zunächst die Höhen der Knotenpunkte über der Horizontalen AB, Fig. 301, von der Mitte aus beiderseits zu

$$7\left(1 - \frac{1}{7^2}\right) = 6{,}857 \text{ m für } A_3 \text{ und } A_4,$$

$$7\left(1 - \frac{9}{49}\right) = 5{,}714 \text{ m für } A_2 \text{ und } A_5,$$

$$7\left(1 - \frac{25}{49}\right) = 3{,}429 \text{ m für } A_1 \text{ und } A_6,$$

$$2\left(1 - \frac{1}{49}\right) = 1{,}959 \text{ m für } B_3 \text{ und } B_4,$$

$$2\left(1 - \frac{9}{49}\right) = 1{,}633 \text{ m für } B_2 \text{ und } B_5,$$

$$2\left(1 - \frac{25}{49}\right) = 0{,}979 \text{ m für } B_1 \text{ und } B_6,$$

Demgemäß ergeben sich ferner die Neigungswinkel α und β der Gurtungsstücke gegen den Horizont durch

$$tg\,\alpha_1 = \frac{3{,}429}{5} = 0{,}6858; \qquad \alpha_1 = 34^0\,26' \text{ für } AA_1,$$

$$tg\,\alpha_2 = \frac{5{,}714 - 3{,}429}{5} = 0{,}4571; \quad \alpha_2 = 24^0\,34' \text{ für } A_1A_2,$$

$$tg\,\alpha_3 = \frac{6{,}857 - 5{,}714}{5} = 0{,}2286; \quad \alpha_3 = 12^0\,52' \text{ für } A_2A_3,$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung die entsprechenden Winkel

$$\beta_1 = 11^0\,5' \text{ für } AB_1,$$
$$\beta_2 = 7^0\,26' \text{ für } B_1B_2 \text{ und}$$
$$\beta_3 = 3^0\,44' \text{ für } B_2B_3.$$

Für die Gurtungen des Mittelfeldes ist

$$\alpha_4 = \beta_4 = 0.$$

Zunächst findet sich die größte Horizontalspannung der Gurtungen nach (8) zu

$$H = O_4 = U_4 = q\,n\,\frac{l}{8\,(h_1 - h_2)} = 3\,.\,7\,\frac{35}{8\,(7-2)} = 18{,}375\,\text{t},$$

und daher mit den oben ermittelten Neigungswinkeln der Gurtungen die Spannungen der letzteren:

$$O_1 = \frac{18{,}375}{\cos\,34^0\,26'} = 22{,}278\,\text{t} = O_7,$$

$$O_2 = \frac{18{,}375}{\cos\,24^0\,34'} = 20{,}204\,\text{t} = O_6,$$

$$O_3 = \frac{18{,}375}{\cos\,12^0\,52'} = 18{,}849\,\text{t} = O_5,$$

und für die untere Gurtung:

$$U_1 = \frac{18{,}375}{\cos\,11^0\,5'} = 18{,}725\,\text{t} = U_7,$$

$$U_2 = \frac{18{,}375}{\cos\,7^0\,26'} = 18{,}531\,\text{t} = U_6,$$

$$U_3 = \frac{18{,}375}{\cos\,3^0\,44'} = 18{,}415\,\text{t} = U_5.$$

Um die größten Spannungen der Zwischenglieder zu bestimmen, seien zunächst einfache, nach links ansteigende Diagonalen angenommen. Für den Schnittpunkt C_2 der Gurtungen des zweiten Feldes findet man durch Rechnung oder nach der Zeichnung den Abstand von der Stütze A zu $c_2 = 2{,}5$ m, und denjenigen von der Diagonale A_1B_2 zu $d_2 = 5{,}7$ m. Daher erhält man für diese Diagonale die Spannung T_2, wenn man die Knotenpunkte A_2, A_3, A_4, A_5 und A_6 mit je $k = 2$ t belastet denkt, wobei das Eigengewicht als ohne Einfluß vernachlässigt werden kann, aus:

$$2\,\frac{1+2+3+4+5}{7}\,2{,}5 - T_2\,5{,}7 = 0 \text{ zu } T_2 = +\,1{,}879\,\text{t}.$$

Ebenso erhält man für eine Belastung nur des ersten Knotenpunktes A_1:

$$2\,\frac{6}{7}\,2{,}5 - 2\,.\,(5 + 2{,}5) - T_2\,5{,}7 = 0 \text{ zu } T_2 = -\,1{,}879\,\text{t}.$$

In gleicher Weise bestimmen sich die Spannungen in den Diagonalen der übrigen Felder mit Ausnahme des mittleren, und es wird genügen, für diese Bestimmung einfach die Ansätze anzugeben. Es ist für die

Diagonale A_2B_3: $c_3 = 15$ m, $d_3 = 19{,}4$ m:

$$2\,\frac{1+2+3+4}{7}\,15 = T_3\,19{,}4;\quad T_3 = \pm\,2{,}208\,\text{t}.$$

Diagonale $A_4 B_5$: $c_4 = 15\,\text{m}$, $d_4 = 16{,}8\,\text{m}$:

$$2\,\frac{1+2}{7}\,(35+15) = T_5\,.\,16{,}8; \qquad T_5 = \pm\,2{,}551\,\text{t}.$$

Diagonale $A_5 B_6$: $c_5 = 2{,}5\,\text{m}$, $d_5 = 4{,}4\,\text{m}$:

$$2\,\frac{1}{7}\,(35+2{,}5) = T_6\,.\,4{,}4; \qquad T_6 = \pm\,2{,}435\,\text{t}.$$

Für das mittlere Feld, für welches der Schnittpunkt der Gurtungen ins Unendliche rückt, setzt man wieder die Verticalcomponente der Diagonalspannung $T_4 \sin \delta$ gleich der verticalen Scheerkraft in diesem Felde bei einer Belastung des halben Trägers. Der Neigungswinkel δ folgt aus:

$$tg\,\delta = \frac{A_3 B_3}{5} = \frac{6{,}8571 - 1{,}9592}{5} = 0{,}9796 \text{ zu } \delta = 44^0\,25',$$

daher erhält man aus:

$$T_4 \sin 44^0\,25' = 2\,\frac{1+2+3}{7};\; T_4 = \pm\,2{,}449\,\text{t}.$$

Die Bestimmung der Spannkräfte in den Verticalpfosten geschieht gleichfalls unter der Voraussetzung einfacher Diagonalen, welche auf Zug und Druck wirksam sind, wie folgt:

Der Durchschnittspunkt D_1 zwischen den Gurtungen $A A_1$ und $B_1 B_2$ fällt zwischen A und B und hat von A den horizontalen Abstand $b_1 = 0{,}588\,\text{m}$, wie aus der Zeichnung oder durch Rechnung gefunden wird. In Folge dessen erzeugen alle Belastungen Zugspannungen, so daß man P_{1max} erhält, wenn der Träger voll belastet ist, während für den leeren Träger P_{1min} eintritt. Man hat daher aus:

$$\frac{6.3}{2}\,0{,}588 - P_{1max}\,(5 - 0{,}588) = 0;\; P_{1max} = +\,1{,}199 = rot\;1{,}2\,\text{t Zug}$$

und

$$\frac{6.1}{2}\,0{,}588 - P_{1min}\,(5 - 0{,}588) = 0;\; P_{1min} = +\,0{,}4\,\text{t Zug}.$$

Für die übrigen Pfosten fallen die betreffenden Durchschnitte D der Gurtungen außerhalb der Stützen und man findet die äußersten Anstrengungen der Pfosten nach dem Vorstehenden durch die folgenden Ansätze. Es ist für $A_2 B_2$, $b_2 = 0{,}416\,\text{m}$ (links von A). Daher wird für eine Belastung von A_2 bis A_6:

$$\left(3 + 2\,\frac{1+2+3+4+5}{7}\right)0{,}416 - 1\,.\,5{,}416 + P_{2min}\,10{,}416 = 0;$$

$$P_{2min} = +\,0{,}229\,\text{t Zug},$$

während man für eine Belastung von A_1 den Werth P_{2max} aus:

$$\left(3 + 2\,\frac{6}{7}\right)0{,}416 - 3\,.\,5{,}416 + P_{2max}\,10{,}416 = 0;$$

$$P_{2max} = +\,1{,}371\,\text{t Zug}$$

erhält. Man hat ebenso für $A_3 B_3$ den Abstand des Schnittpunktes von A, $b_3 = 6{,}429$, daher:

$$\left(3 + 2\,\frac{1+2+3+4}{7}\right)6{,}429 - 1\,(11{,}429 + 16{,}429) + P_{3min}\,21{,}429 = 0;$$

$$P_{3min} = -\,0{,}457\,\text{t Druck},$$

$$\left(3 + 2\,\frac{6+5}{7}\right) 6{,}429 - 3\,(11{,}429 + 16{,}429) + P_{3max}\,21{,}429 = 0;$$

$$P_{3max} = +\,2{,}057 \text{ t Zug.}$$

$A_4 B_4$; $b_4 = 55$ m links von A:

$$\left(3 + 2\,\frac{1+2+3}{7}\right) 55 - 1\,(60 + 65 + 70) + P_{4min}\,75 = 0;$$

$$P_{4min} = -\,0{,}857 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2\,\frac{6+5+4}{7}\right) 55 - 3\,(60 + 65 + 70) + P_{4max}\,75 = 0;$$

$$P_{4max} = +\,2{,}457 \text{ t Zug.}$$

Für $A_5 B_5$ ist $b_5 = 66{,}67$ rechts von A, daher:

$$\left(3 + 2\,\frac{1+2}{7}\right) 66{,}67 - 1\,(61{,}67 + 56{,}67 + 51{,}67 + 46{,}67) + P_{5min}\,41{,}67 = 0;$$

$$P_{5min} = -\,0{,}970 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2\,\frac{6+5+4+3}{7}\right) 66{,}67 - 3\,(61{,}67 + 56{,}67 + 51{,}67 + 46{,}67) + P_{5max}\,41{,}67 = 0;$$

$$P_{5max} = +\,2{,}570 \text{ t Zug.}$$

$A_6 B_6$; $b_6 = 39{,}375$ rechts von A:

$$\left(3 + 2\,\frac{1}{7}\right) 39{,}375 - 1\,(34{,}375 + 29{,}375 + 24{,}375 + 19{,}375 + 14{,}375) + P_{5min}\,9{,}375 = 0;$$

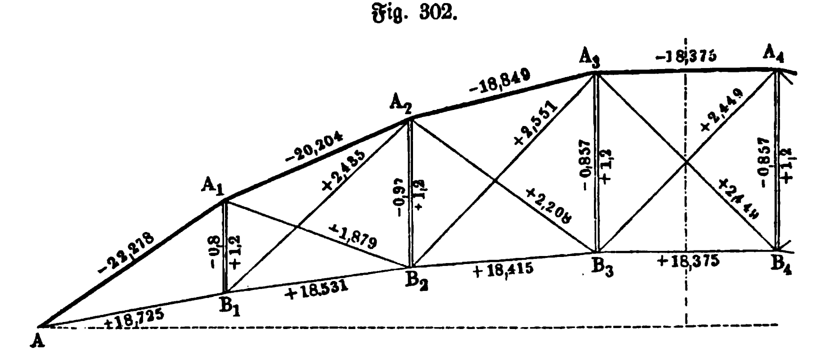
$$P_{6min} = -\,0{,}8 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2\,\frac{6+5+4+3+2}{7}\right) 39{,}375 - 3\,(34{,}375 + 29{,}375 + 24{,}375 + 19{,}375 + 14{,}375) + P_{6max}\,9{,}375 = 0;$$

$$P_{6max} = +\,2{,}4 \text{ t Zug.}$$

Die so gefundenen Spannungszahlen, welche in Fig. 301 eingetragen wurden, gelten für die Anordnung einfacher gegen Druck und Zug wirksamer Diagonalen. Wendet man jedoch nur zugfähige Kreuzbänder an, so behalten die gefundenen Spannungen überall für die links ansteigenden Diagonalen ihre Gültigkeit, wäh-

Fig. 302.



rend für jedes rechts ansteigende Diagonalband nach dem Obigen die Spannungszahl gilt, welche für das symmetrisch gelegene Feld berechnet wurde. Für diesen Fall sind ferner die Verticalstiele der größten Zugspannung bei der vollen Trägerbelastung ausgesetzt, und diese größte Zugspannung berechnet sich nach (7) zu

$$q_2 = q \frac{h_2}{h_1 - h_2} = 3 \frac{2}{7 - 2} = 1{,}2\,\mathrm{t}.$$

Als größte Druckspannung hat man für jeden Stiel den absolut größten Werth von denjenigen Beträgen anzunehmen, welche für diesen und den symmetrischen Stiel als P_{min} sich ergaben, z. B. hat man für $A_3 B_3$ und für $A_4 B_4$ die größte Druckkraft zu 0,857 t, und nicht, wie bei einfachen Diagonalen für $A_3 B_3$ sich fand, zu 0,457 t anzunehmen. Dementsprechend sind die für gekreuzte Diagonalen geltenden Spannungszahlen in die Fig. 302 eingetragen.

Häng- und Sprengwerke. In gleicher Weise wie die Fachwerke hat man auch die bei Bauausführungen häufigen sogenannten Häng- und Sprengwerke zu beurtheilen. Man versteht darunter im Allgemeinen solche Constructionen, welche dazu dienen, Balken von größerer Länge in einzelnen Punkten zwischen den Auflagern durch geeignet angeordnete Zwischenglieder derartig zu unterstützen, daß die Last der unterstützten Punkte durch eben diese Zwischenglieder nach den festen Auflagern hin übertragen wird. Wenn hierbei der Balken von oben unterstützt wird, so heißt die Construction ein Hängwerk, während vermittelst der Sprengwerke die Unterstützung von unten bewirkt wird. Bei allen Häng- und Sprengwerken treten als charakteristische Zwischenglieder geneigte Stäbe auf, welche ebensowohl als Druckstreben wie als Zugbänder wirken können. Verticale Pfosten werden hauptsächlich bei den Hängwerken als sogenannte Hängesäulen in Anwendung gebracht, kommen indessen auch bei einzelnen Sprengwerken als Druckstiele vor. Ebenso finden sich horizontale Glieder sowohl als Zuganker wie als gedrückte Spannriegel. Sehr häufig aber ersetzt man, insbesondere bei den Sprengwerken, die Wirkung solcher horizontalen Stangen durch die von festen Widerlagsmauern ausgeübten Reactionen. Je nachdem die Unterstützung des Balkens in nur einem oder in mehreren Punkten vorgenommen wird, werden wohl einfache und zusammengesetzte Häng- und Sprengwerke unterschieden. §. 62.

Ein einfaches Hängwerk, ein sogenannter Hängebock, ist durch Fig. 303 (a. f. S.) dargestellt. Der in AA auf Stützen ruhende Balken wird in der Mitte mittelst des Hängeeisens DE durch die Hängesäule BC getragen, welche letztere den auf sie ausgeübten Zug Q auf die beiden Streben BA überträgt. In jeder dieser Streben wird, wie aus der Zerlegung der Kraft Q sich ergiebt, eine Druckspannung

$$S = \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

hervorgerufen, welche an jedem Ende A einen Horizontalschub

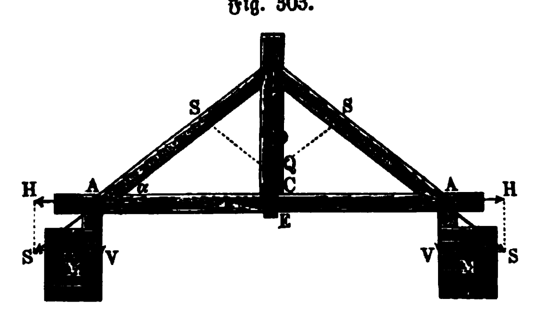
$$H = S \cos \alpha = \frac{1}{2} Q \operatorname{cotg} \alpha \ldots \ldots \quad (2)$$

und einen Verticaldruck

$$V = S \sin \alpha = \frac{Q}{2} \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

erzeugt. Für Q hat man außer dem Eigengewichte der Hängesäule BE und der halben Streben BA und BA noch die etwa direct in C angebrachte

Fig. 303.

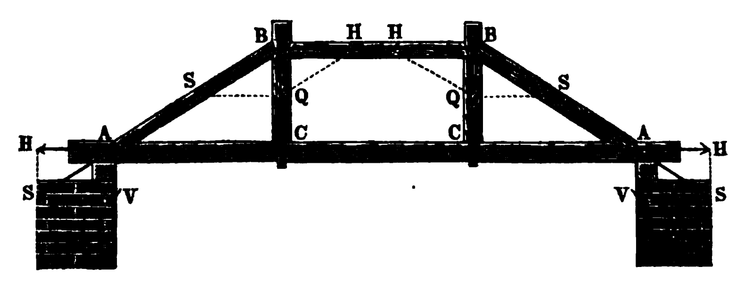


Belastung im vollen Betrage anzunehmen, während man von dem Eigengewichte des Balkens AA und der gleichmäßig darüber verbreiteten Last $^5/_8$ als in C wirkend zu denken hat, gemäß den Verhältnissen, welche für einen auf drei gleich hohen Stützen ruhenden Balken gelten (s. §. 38). Der Balken AA wird außer auf Biegung noch durch die Kraft H auf Zug beansprucht.

Bei einer größeren Länge des Balkens kann derselbe durch das Hängwerk, Fig. 304, in zwei Zwischenpunkten C und C gestützt werden, wobei der zwischen die Köpfe der beiden Streben eingesetzte horizontale Spannriegel BB der Druckkraft

$$H = Q \operatorname{cotg} \alpha \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Fig. 304.



zu widerstehen hat. Eine ebenso große Horizontalkraft spannt hierbei den Balken und sucht die Fasern an den Enden abzuscheeren. Von dem Eigengewichte des Balkens und der auf demselben gleichmäßig vertheilten Belastung hat man, wie bei einem Balken auf vier gleich weit entfernten Stützen, $^3/_8$ des ganzen Betrages in jedem Punkte C und $^1/_8$ je in A wirksam zu denken (s. §. 39).

In welcher Weise man zusammengesetzte Hängwerke nach Art der Figuren 305 und 306 zu berechnen hat, wird nach dem bisher Angeführten deutlich sein. In beiden Fällen läßt sich bei gleicher Entfernung der Stützpunkte annehmen, daß von der ganzen gleichmäßig über den Balken ausgebreiteten Belastung jede der äußeren Hängesäulen $^9/_{40}$, jede der inneren $^8/_{40}$, und jeder Auflagerpunkt $^3/_{40}$ zu tragen hat.

Fig. 305.

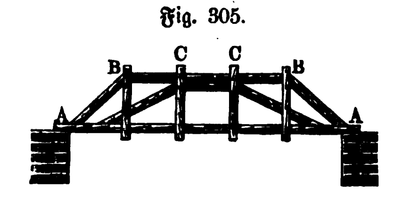
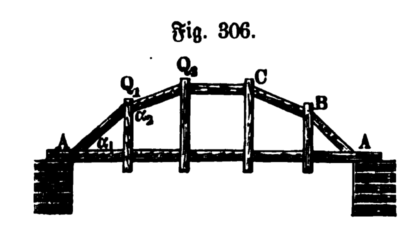


Fig. 306.



Daß bei der Construction der Fig. 306 die Neigungen der Streben nicht willkürlich sind, sondern in der Weise mit einander in Beziehung stehen, daß in allen Punkten der gleiche Horizontalschub H auftritt, wurde bereits in §. 59 gelegentlich der Sparren angeführt. Bezeichnet man mit Q_1 und Q_2 die Belastungen der Stiele B und C, und sind α_1 und α_2 die Neigungswinkel der Streben AB und BC gegen den Horizont, so gilt daher die Gleichung

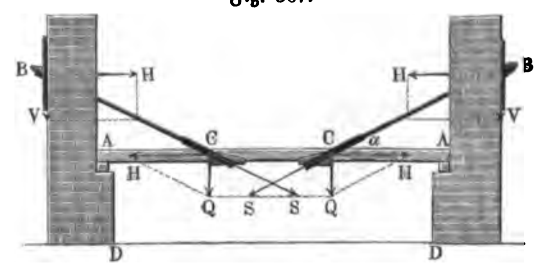
$$H = Q_2 \, cotg \, \alpha_2 = (Q_1 + Q_2) \, cotg \, \alpha_1$$

oder

$$\frac{tg \, \alpha_1}{tg \, \alpha_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ein Hängwerk, bei welchem die Streben durch Zugkräfte in Anspruch genommen sind, stellt Fig. 307 vor. Hier wird der Balken nur in seinem

Fig. 307.



mittleren Theile CC durch die Kraft $H = Q\,cotg\,\alpha$ gezogen, während die Widerlagsmauern in B den Zugspannungen der Streben $S = \frac{Q}{sin\,\alpha}$ widerstehen müssen. Es bedarf nur der Erwähnung, daß für die Stabilität dieser Mauern gegen Kippen und Gleiten die im zweiten Capitel angegebenen betreffenden Bemerkungen volle Gültigkeit haben.

Ein einfaches Sprengwerk ist durch Fig. 308 und ein doppeltes durch Fig. 309 dargestellt. Für die Vertheilung der Kräfte gelten genau dieselben

Fig. 308.

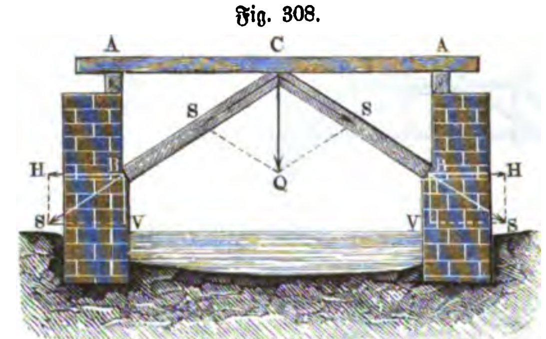
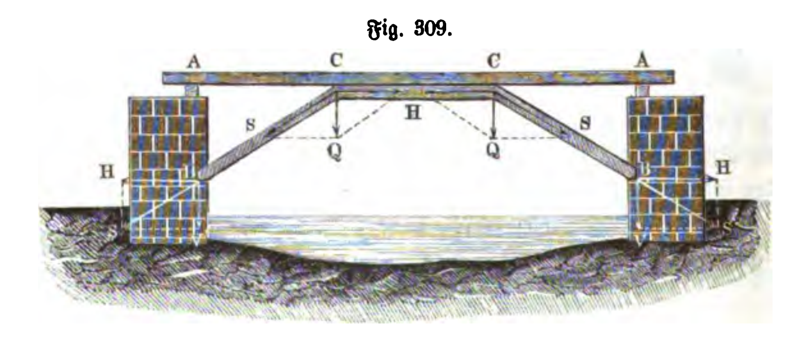
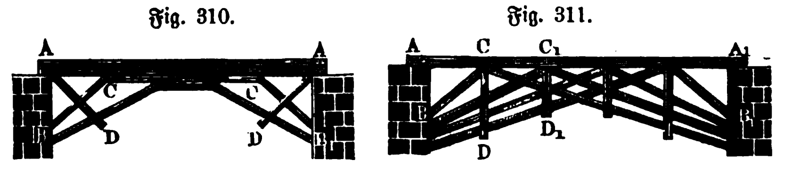


Fig. 309.



Regeln wie für die Hängwerke, Fig. 303 und Fig. 304. Bei einer größeren Anzahl zu unterstützender Punkte kann man die Construction nach Fig. 310 mit Spannriegeln oder nach Fig. 311 mit ungleichschenkeligen Sprengwerken

Fig. 310. Fig. 311.



wählen, und man pflegt in solchen Fällen die Streben vor dem seitlichen Ausbiegen, welches wegen ihrer größeren Länge zu befürchten ist, durch

Zangen D zu sichern. Bei ungleichen Neigungen α_1 und α_2 der Streben gegen den Horizont, Fig. 312, findet man die Spannkräfte S_1 und S_2 in den Streben nach der Figur ohne Weiteres aus:

$$S_1 : S_2 : Q = sin\,(90^0 - \alpha_2) : sin\,(90^0 - \alpha_1) : sin\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$

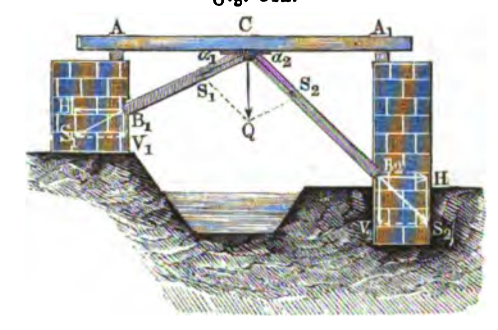
zu

$$S_1 = Q\,\frac{cos\,\alpha_2}{sin\,(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und

$$S_2 = Q\,\frac{cos\,\alpha_1}{sin\,(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Fig. 312.



während der Horizontalschub für jede Strebe und für jedes Widerlager durch

$$H = S_1\,cos\,\alpha_1 = S_2\,cos\,\alpha_2 = Q\,\frac{cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2}{sin\,(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{Q}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad (8)$$

ausgedrückt ist. Für die Verticalkräfte in B_1 und B_2 hat man:

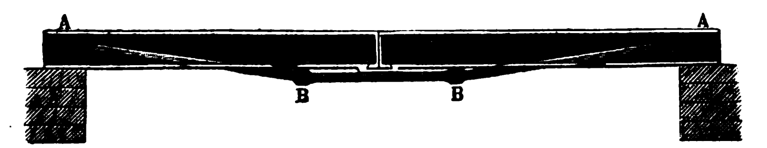
$$V_1 = H\,tg\,\alpha_1 = Q\,\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

und

$$V_2 = H\,tg\,\alpha_2 = Q\,\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

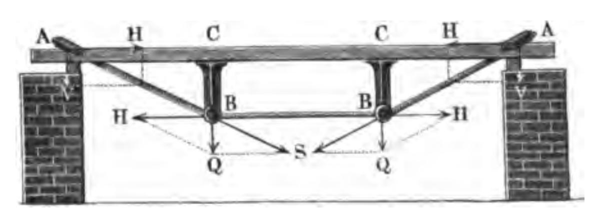
Man kann auch Sprengwerke, d. h. Constructionen, welche den Balken von unten unterstützen, so anordnen, daß die Streben gezogen werden, in welchem Falle man meistens den Horizontalzug der Streben nicht durch Widerlagsmauern, sondern durch die rückwirkende Festigkeit des gesprengten Balkens aufnimmt. Als Beispiel hierfür hat man den gesprengten oder armirten gußeisernen Balken, Fig. 313, und das Sprengwerk mit hölzernen

Fig. 313.



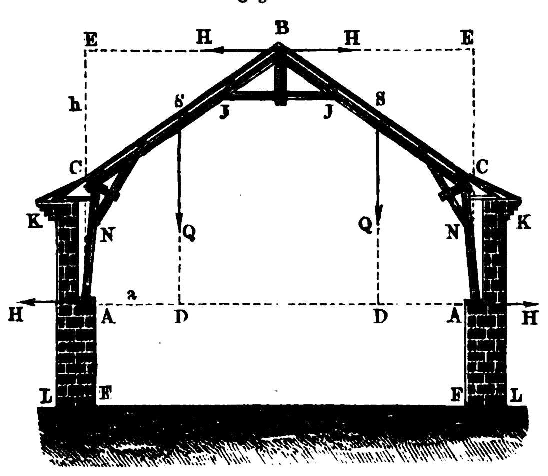
Balken, Fig. 314. Einen Horizontalschub auf die Unterstützungsmauern üben diese Constructionen natürlich nicht aus.

Fig. 314.



Die Sprengwerke finden auch wohl Anwendung zur Construction von Dachgesperren, besonders hölzernen, in solchen Fällen, wo man einen horizontalen Balken oder Durchzug zur Aufnahme des Sparrenschubes nicht anbringen will. Alsdann muß der Sparrenschub durch die Seiten- oder Stützmauern des Gebäudes aufgenommen werden. In den Figuren 315, 316 und 317 sind drei solche Gespärre vor Augen geführt. Hierbei sind in Fig. 315 die beiden oberhalb durch einen Kehlbalken verbundenen Sparren *B C* durch die schrägen Stiele oder Streben *A C* gestützt, und in den Ecken

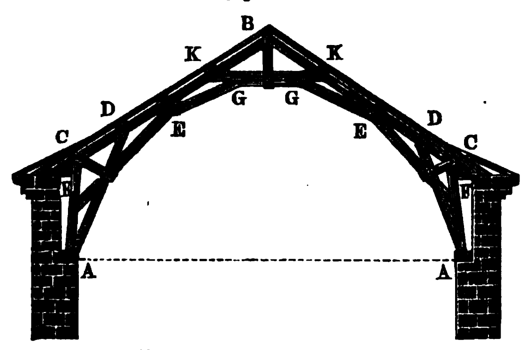
Fig. 315.



bei *C* durch besondere Streben versteift. Fig. 316 dagegen stellt ein Gespärre vor, bei welchem die Sparren *B C* durch die Streben *AD, FE, EG* und den Spannriegel *G G* unterstützt und gleichfalls durch den Kehlbalken *KK* verbunden sind. Bei dem Sparrwerk, Fig. 317, ist es ein aus Streben zusammengesetzter Bogen *A D E D A*, welcher die Sparren *B C* stützt.

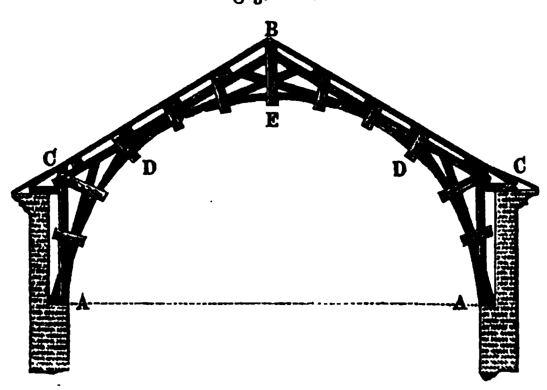
Die Ermittelung des Horizontalschubes dieser Sprengwerke ist in aller Strenge nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse der einzelnen Glieder möglich, und es möge dieserhalb auf das im Folgenden über den elastischen Bogen Angegebene verwiesen werden. Durch die Verbindung der

Fig. 316.



Sparren durch Zangen, Bänder ꝛc. läßt sich der auf die Mauern ausgeübte Horizontalschub zum Theil herabziehen, indem diese Verbindungstheile einen entsprechenden Theil der Schubkraft aufzunehmen vermögen, ebenso wie bei der Anwendung eines Durchzuges dieser gewissermaßen wie die untere Gurtung eines Fachwerkträgers den ganzen Horizontalzug aufnimmt, so daß die Stützmauern nur den verticalen Druck auszuhalten haben. Annähernd

Fig. 317.



kann man bei Gespärren, wie Fig. 315, wenn man von der Wirkung des Kehlbalkens JJ absieht, den Horizontalschub H im Scheitel B und den Fußpunkten A gleich

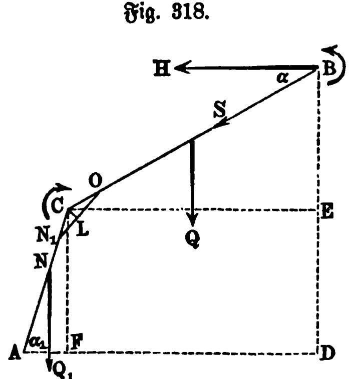
$$H = Q \frac{a}{h}$$

setzen, unter Q die gesammte Belastung eines Sparrens BC, unter h die

Höhe AE und unter a den horizontalen Abstand des Schwerpunktes S von dem Fuße A verstanden.

Die Dimensionen der einzelnen Theile des Gespärres sind nach den Regeln der zusammengesetzten Festigkeit (s. Thl. I, Abschn. IV, Cap. 5) zu bestimmen, indem man die Summe der aus der Biegung und Ausdehnung bezw. Zusammendrückung eines solchen Gliedes sich ergebenden Spannungen gleich dem höchsten zulässigen Betrage der Materialanstrengung setzt. Beispielsweise hat man für den Sparren BC, Fig. 318, von der Länge l und dem Neigungswinkel α und der gleichmäßig vertheilten Belastung Q für die Mitte das auf Biegung wirkende Moment

Fig. 318.



$$M = \frac{1}{2} H l \sin \alpha - \frac{1}{8} Q l \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und die auf Zusammendrücken wirkende Kraft ebenfalls in der Mitte:

$$S = H \cos \alpha + \frac{1}{2} Q \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

In gleicher Weise ist für die Strebe AC von der Länge l_1, der Neigung α_1 und dem Eigengewichte Q_1 das Bruchmoment in der Mitte

$$M_1 = H \left(l \sin \alpha + \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 \right) - \frac{1}{2} Q (l \cos \alpha + l_1 \cos \alpha_1)$$
$$- \frac{1}{8} Q_1 l_1 \cos \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und die Compressionskraft

$$S_1 = H \cos \alpha_1 + \left(Q + \frac{1}{2} Q_1 \right) \sin \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Um die Spannkraft S_2 in der Strebe NO zu erhalten, hat man das Drehungsmoment um die Ecke C:

$$M_2 = H l \sin \alpha - \frac{1}{2} Q l \cos \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

woraus man

$$S_2 = \frac{M_2}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

erhält, wenn d den normalen Abstand des Eckpunktes C von NO bedeutet.

Graphisch lassen sich aus den bekannten Belastungen der Knotenpunkte von Sprengwerken immer durch einfache Zerlegung der Kräfte die in den einzelnen Gliedern der Sprengwerke auftretenden Anstrengungen ermitteln, worüber im folgenden Paragraphen gelegentlich der Behandlung der Lehrgerüste ein Näheres angegeben werden soll.

Beispiele: 1. Wenn das doppelte Hängwerk in Fig. 304 eine 20 m lange und 4 m breite Brücke zu tragen bestimmt ist, und angenommen wird, daß jeder Quadratmeter dieser Brücke sammt Belastung 300 kg wiegt, so ergiebt sich das Gewicht der ganzen Brücke zu

$$Q = 20 \,.\, 4 \,.\, 300 = 24\,000\,\mathrm{kg},$$

wovon die Hälfte mit 12 000 kg von je einem der beiderseits angeordneten Hängwerke zu tragen ist. Von dieser Belastung entfällt auf jede Hängsäule der Betrag von

$$Q = \frac{3}{8}\, 12\,000 = 4\,500\,\mathrm{kg},$$

welcher bei einer Neigung der Streben von 22,5° gegen den Horizont, einen Horizontalschub

$$H = 4\,500\; cotg\; 22^1/_2{}^0 = 4\,500 \,.\, 2{,}4142 = 10\,864\,\mathrm{kg}$$

und eine Strebenkraft

$$S = \frac{4\,500}{sin\; 22^1/_2{}^0} = \frac{4\,500}{0{,}3827} = 11\,758\,\mathrm{kg}$$

erzeugt. Wenn man wegen der größeren Länge der Streben und Spannriegel in denselben eine Spannung von nur 0,2 kg pro Quadratmillimeter zulassen will, so hat man dem Spannriegel einen Querschnitt von 543,20 qcm und jeder Strebe einen solchen von 587,9 qcm zu geben, was bei 20 cm Breite der Hölzer bezw. 27 cm und 30 cm Höhe derselben ergiebt.

2. Bei einem Ziegeldache, wie Fig. 318, sei die Länge des oberen Sparrens $BC = l = 8$ m, die des unteren $AC = l_1 = 5$ m, der Neigungswinkel des ersteren $\alpha = 30^0$, der des letzteren $\alpha_1 = 75^0$ gegen den Horizont. Nimmt man incl. Schnee- und Winddruck eine Belastung von 250 kg pro Quadratmeter Grundfläche und eine Entfernung der Binder von 2 m an, so erhält man die Belastung des oberen Sparrens BC zu

$$Q = 2 \,.\, 8 \,.\, cos\; 30^0 \,.\, 250 = 3464\,\mathrm{kg},$$

und diejenige des unteren AB zu

$$Q_1 = 2 \,.\, 5 \,.\, cos\; 75^0 \,.\, 250 = 647\,\mathrm{kg}.$$

Man erhält daher den Sparrenschub H aus

$$H(8\, sin\, 30^0 + 5\, sin\, 75^0) = 3464\,(5\, cos\, 75^0 + 4\, cos\, 30^0) + 647 \,.\, 2{,}5 \,.\, cos\, 75^0$$

zu

$$H = \frac{16481{,}7 + 418{,}6}{4 + 4{,}83} = 1915\,\mathrm{kg}.$$

Für die Mitte S des Sparrens CB hat man daher nach (11) das Biegungsmoment:

$$M = \frac{1}{2}\, 1915 \,.\, 8 \,.\, 0{,}5 - \frac{1}{8}\, 3464 \,.\, 8 \,.\, 0{,}8660 = 3930 - 3000 = 930\,\mathrm{mkg},$$

und die Spannung nach (12):

$$S = 1915 . 0{,}8660 + \frac{1}{2} 3464 . 0{,}5 = 1658 + 866 = 2524 \text{ kg}.$$

In gleicher Weise erhält man für den unteren Sparren AC in der Mitte nach (13) und (14):

$$M_1 = 1915 \left(8 . 0{,}5 + \frac{5}{2} 0{,}9659\right) - \frac{1}{2} 3464 (8 . 0{,}8660 + 5 . 0{,}2588)$$

$$- \frac{1}{8} 647 . 5 . 0{,}2588 = 12\,285 - 14\,240 - 105 = -2060 \text{ mkg}$$

und

$$S_1 = 1915 . 0{,}2588 + \left(3464 + \frac{1}{2} 647\right) 0{,}9659 = 496 + 3659 = 4155 \text{ kg}.$$

Für die Ecke C endlich hat man nach (15) das Biegungsmoment:

$$M_2 = 1915 . 8 . 0{,}5 - \frac{1}{2} 3464 . 8 . 0{,}8660 = 7660 - 12\,000 = -4340 \text{ mkg},$$

so daß, bei einem Abstande der Strebe NO von der Ecke C gleich 0,5 m, die Druckspannung dieser Strebe zu

$$S_2 = \frac{4340}{0{,}5} = 8680 \text{ kg}$$

folgt. Das negative Vorzeichen von M_1 und M_2 deutet an, daß die Biegung in dem unteren Sparren AC nach rechts im Sinne des Pfeiles geschieht, d. h. daß der Sparren nach außen convex gebogen wird, während der positive Werth von M auf eine solche Biegung des oberen Sparrentheils deutet, vermöge deren dieser Theil nach außen concav gebogen wird, wie sich dies aus der für diese Stelle vorwiegenden Einwirkung von H gegenüber Q erklärt.

Aus den berechneten Momenten M und Spannungen S hat man nun die Querschnitte der Hölzer so zu bestimmen, daß die größte Faserspannung den für das Material nach §. 35 zulässigen Werth nicht überschreitet. Wählt man beispielsweise für den unteren Sparren AC eine Breite des rechteckigen Querschnittes von 180 mm und nimmt die Höhe desselben etwa $^7/_5$ mal so groß mit 250 mm an, so erzeugt das Moment $M_1 = 2060$ mkg eine äußerste Biegungsspannung s_b, welche sich aus

$$2060 . 1000 = \frac{1}{6} 180 . 250^2 \, s_b$$

zu

$$s_b = \frac{2060}{3 . 625} = 1{,}10 \text{ kg}$$

bestimmt. Außerdem wird durch die Pressung $S_1 = 4155$ kg noch eine specifische Druckspannung von

$$s_d = \frac{4155}{180 . 250} = 0{,}092 \text{ kg}$$

erzeugt, so daß das Holz daselbst auf der Innenseite mit der größten Spannung von

$$1{,}10 + 0{,}092 = 1{,}2 \text{ kg}$$

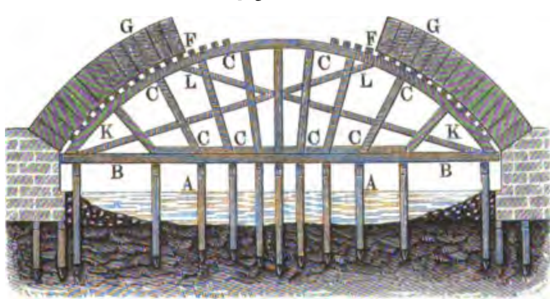
beansprucht wird, welcher Betrag für Dächer noch zulässig erscheint. Die Stärke der Mauer, auf welcher das Gespärre bei A aufruht, ist nach den in Cap. 1 angegebenen Regeln zu ermitteln, indem dabei ein auf Umsturz wirkender Horizontalschub $H = 1915$ kg und eine verticale Belastung von $Q + Q_1 = 4111$ kg für jede Mauerlänge von 2 m zwischen zwei Bindern einzuführen ist.

Lehrgerüste. Besonders häufige Verwendung finden die zusammengesetzten Sprengwerke als sogenannte Lehrgerüste bei der Ausführung der Gewölbe, wobei diese Gerüste dazu dienen, das Aneinanderfügen der einzelnen Wölbsteine genau in der beabsichtigten Art zu ermöglichen, und diesen Steinen so lange eine Unterstützung zu gewähren, so lange dies vor geschehenem Schluß des Gewölbes nöthig ist. Hierzu bestehen die Lehrgerüste in der Regel aus einer hinreichend großen Anzahl von bogenförmigen Tragrippen von der entsprechenden Form, welche unterhalb durch Sprengwerke gestützt werden und äußerlich mit neben einander liegenden Latten, sogenannten Schaallatten, versehen sind, welche die Form der beabsichtigten inneren Wölbleibung festlegen und auf welchen die Wölbsteine während des Baues direct aufruhen. §. 63.

Die Lehrgerüste unterscheidet man in gestützte, d. h. solche, welche unterhalb auf eingerammten Pfählen oder besonders zu diesem Zwecke aufgeführten Pfeilern ruhen, und in gesprengte, bei denen die Lehrbögen durch Sprengwerke getragen werden, welche sich gegen die Widerlagspfeiler des Gewölbes stemmen. Diese gesprengten Lehrgerüste, welche hier vorzugsweise betrachtet werden sollen, gewähren den Vortheil, daß sie die zu überbrückende Oeffnung (Straße, Canal ꝛc.) während des Baues nicht versperren, wie dies durch die gestützten Lehrgerüste geschieht.

Ein gestütztes Lehrgerüst zeigt Fig. 319, bei welchem das aus dem Kranze *KK*, den Streben *CC*... und den Zangen *L* bestehende Gerüst vermittelst

Fig. 319.



des horizontalen Balkens *BB* auf den eingerammten Pfeilern *A* ruht. Die über die einzelnen Lehrbögen *K* genagelten Schaallatten *F* sind mehr oder minder starke Hölzer, auf welchen direct die Wölbsteine ruhen.

Die Figuren 320 und 321 (a. f. S.) zeigen dagegen zwei gesprengte Lehrgerüste, welche sich gegen die Widerlagspfeiler *AA* stützen. Bei dem ersteren Gerüste findet sich zwischen je zwei zusammengehörigen Streben ein horizontaler Spannriegel, weshalb bei der Anwendung eines solchen Lehr-

gerüstes das Gewölbe gleichzeitig von beiden Seiten B und B her ausgeführt werden muß. Bei dem Gerüste Fig. 321 dagegen, bei welchem sich je zwei Streben direct gegen einander stemmen, könnte auch eine einseitige Ausführung des Gewölbes vorgenommen werden. Die angewendeten Bänder und Zangen haben vorzugsweise den Zweck, die seitlichen Ausbiegungen der Streben wirksam zu verhindern, welche bei der oft beträchtlichen Länge dieser Hölzer durch die Druckkräfte angestrebt werden.

Fig. 320.

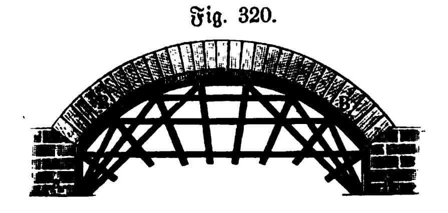


Fig. 321.



Damit sich das geschlossene Gewölbe allmälig und gleichmäßig setzen kann, muß die Einrichtung so getroffen werden, daß die Ausrüstung ebenfalls allmälig und ohne Stoßwirkung vorgenommen werden kann. Zu dem Ende läßt man wohl das Gerüst auf Keilen ruhen, welche nach Vollendung des Gewölbes nach und nach gelüftet werden, um eine allmälige Senkung des Gewölbes zu bewirken. Diese Keile können ebensowohl zwischen den Stützpfählen und dem Hauptträger, wie auch zwischen diesem und den Streben oder zwischen den letzteren und den Lehrbögen angebracht werden. Auch hat man in neuerer Zeit statt der Keile eiserne Schrauben, excentrische Scheiben ꝛc. angewendet, um die starken Erschütterungen zu vermeiden, welche mit dem Lösen der Keile verbunden zu sein pflegen. Ebenso hat man zur Unterstützung mit Sand gefüllte Säcke verwendet, deren allmälige Entleerung man durch Einschneiden von Löchern in der Gewalt hat. Ueber die eisernen Lehrgerüste, wie sie zum Bau von Tunneln von Rhziha vorgeschlagen und verwendet sind, ist dessen Werk *) nachzulesen.

Zur Feststellung der Verhältnisse dieser Lehrgerüste ist zunächst die Ermittelung des Druckes erforderlich, welcher von dem in der Ausführung befindlichen Gewölbe auf die Schaalung in verschiedenen Punkten ausgeübt wird.

Es sei zu dem Ende durch ABC, Fig. 322, ein im Bau begriffenes Gewölbe und durch $a b_1$ der zuletzt aufgelegte Wölbstein dargestellt, dessen Gewicht G_1 in dem Schwerpunkte s_1 wirksam zu denken ist. Damit dieser Stein auf der unter dem Winkel α_1 gegen den Horizont geneigten Lager-

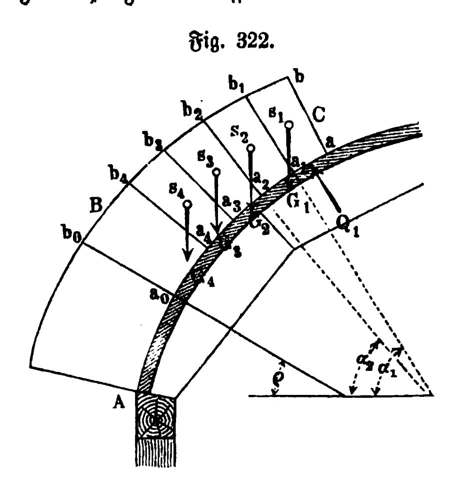
*) Rhziha, Die neue Tunnelbaumethode in Eisen, 1864.

fläche $a_1 b_1$, auf welcher er ruht, nicht abgleite, muß das Lehrgerüst in der Fläche $a a_1$ eine Reaction gegen den Stein ausüben, welche in der Richtung der Gleitfläche $a_1 b_1$ wirksam, nach den bekannten Gesetzen der schiefen Ebene den Werth:

$$Q_1 = G_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

hat, wenn φ den Reibungscoefficienten der Steine auf einander oder richtiger denjenigen des nassen Mörtels bedeutet. Denkt man sich diese Kraft Q_1 von der Schaalung $a a_1$ ausgeübt, und untersucht, welche Reaction Q_2 die Schaalung $a_1 a_2$ gegen den vorhergehenden Stein $a_1 b_2$ in der Richtung $a_2 b_2$ ausüben müsse, um auch diesen am Abgleiten zu verhindern, so findet sich, daß dieser Stein im Gleichgewichte sein muß unter Einwirkung seines Eigengewichtes G_2, der Reaction Q_2 in $a_1 a_2$ nach der Richtung der Fläche $a_2 b_2$, ferner der in der Fläche $a_1 b_1$ wirksam zu denkenden Reaction Q_1 und der Reibung, welche sich einem Abgleiten des Steins entlang der Lagerfuge $a_2 b_2$ entgegensetzt. Wenn diese letztere den Winkel α_2 mit dem Horizonte, also denjenigen $\alpha_1 - \alpha_2$ mit Q_1 bildet, so findet man die das Abgleiten anstrebende Kraft zu

Fig. 322.



$$G_2 \sin \alpha_2 - Q_1 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) - Q_2$$

und die das Abgleiten hindernde Reibung auf $a_2 b_2$ zu

$$\varphi \left[G_2 \cos \alpha_2 - Q_1 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \right],$$

so daß man für den Gleichgewichtszustand durch Gleichsetzung beider Ausdrücke die von $a_1 a_2$ auszuübende Reaction zu

$$Q_2 = G_2 (\sin \alpha_2 - \varphi \cos \alpha_2) - Q_1 \left[\cos (\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \right]$$
$$= A - B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erhält. Diese Gleichung gilt offenbar allgemein für jeden beliebigen Stein wie z. B. $a_3 b_4$, wenn man für G_2 dessen Gewicht und für Q_1 diejenige Reaction einführt, welche von dem Lehrgerüste auf alle oberhalb $a_3 b_3$ noch verlegten Steine $a_3 a$ ausgeübt wird.

Der Druck Q_2 besteht der Gleichung (2) zufolge aus einer Differenz $A - B$, welche immer kleiner sein wird als der Minuend A, da man leicht

erkennt, daß unter den gewöhnlichen Verhältnissen *) der Subtrahend $B = Q_1 [cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \, sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$ immer positiv sein wird. Der Werth $A = G_2 (sin \, \alpha + \varphi \, cos \, \alpha)$ bedeutet aber nach (1) für irgend welchen Stein denjenigen Druck Q, welchen er auf das Lehrgerüst ausübt, wenn er der zuletzt aufgelegte ist, so daß hieraus ohne Weiteres die Regel folgt: Der Druck auf das Lehrgerüst an irgend einer Stelle wird am größten, sobald das Gewölbe bis zu dieser Stelle vorgeschritten ist, jede weitere Fortsetzung der Einwölbung vermindert den specifischen Druck auf das Lehrgerüst an der betrachteten Stelle.

Aus (1) folgt unmittelbar, daß für $\varphi = tg \, \alpha_1$, d. h. für $\alpha_1 = \varrho$ der Druck Q gleich Null wird, daß also erst von derjenigen Lagerfuge $a_0 b_0$ an, deren Neigung gegen den Horizont gleich dem Reibungswinkel ϱ ist, ein Druck auf das Lehrgerüst ausgeübt wird. Es ergiebt sich übrigens aus (2), daß in diesem Grenzpunkte a_0 nur dann ein Druck sich einstellt, wenn das Gewölbe gerade bis zu diesem Punkte ausgeführt ist, bei weiterer Ausführung giebt (2) für den Punkt a_0 einen negativen Werth, und der Anfangspunkt, in welchem die Reaction des Lehrgerüstes zu wirken beginnt, rückt von a_0 aus um so mehr nach der Mitte hin, je weiter die Einwölbung fortschreitet.

Nachdem der Schlußstein eingesetzt und der Mörtel entsprechend erhärtet ist, hört natürlich jeder weitere Druck auf das Lehrgerüst auf, und das Gewölbe gewinnt nach dem Ausrüsten des Lehrgerüstes seine Stabilität durch den Eintritt des bezüglichen Horizontalschubes, wie im Cap. 2 ausführlich erörtert worden ist.

Nimmt man, um den Druck des Gewölbes auf das Lehrgerüst zu bestimmen, der Sicherheit wegen an, daß in jedem Punkte der maximale mögliche Druck in demselben auf das Lehrgerüst wirke, eine Voraussetzung, die in Wirklichkeit nach dem Vorstehenden niemals eintreten wird, da der Druck in jedem Punkte von dem maximalen Werthe mit dem Fortgange der Ausführung sich vermindert, so kann man am einfachsten graphisch durch folgende Construction die Gesammtbelastung des Lehrgerüstes ermitteln.

Der Druck auf das Lehrgerüst in einem Elemente $a_1 a_2$, Fig. 323, in centraler zu $a_1 a_2$ senkrechter Richtung bestimmt sich, wenn das Gewölbe von AB bis $a_1 b_1$ ausgeführt ist, nach (1) zu $\partial Q_1 = \partial G_1 (sin \, \alpha_1 - \varphi \, cos \, \alpha_1)$, wenn ∂G_1 das Gewicht eines Wölbsteinelementes $a_1 b_2$ von der unendlich

*) Für gewöhnlich ist $\varphi = tg \, 22^0 = 0{,}4$; α_1 höchstens 90^0, α_2 nach dem Folgenden mindestens 22^0, daher äußersten Falles

$$cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \, (sin \, \alpha_1 - \alpha_2) = cos \, 68^0 - 0{,}4 \, sin \, 68^0 = 0{,}374 - 0{,}374 = 0,$$

in allen anderen Fällen aber größer.

geringen Breite $a_1 a_2$ und α_1 die Neigung dieses Elementes gegen den Horizont bezeichnet. Dieses Gewicht bestimmt sich für die Einheit in der Breitenrichtung parallel der Gewölbaxe zu

$$\partial G_1 = a_1 b_1 . a_1 a_2 . \gamma,$$

unter γ das specifische Gewicht des Wölbmaterials verstanden. Der specifische Druck auf die Flächeneinheit in a_1 ist daher durch

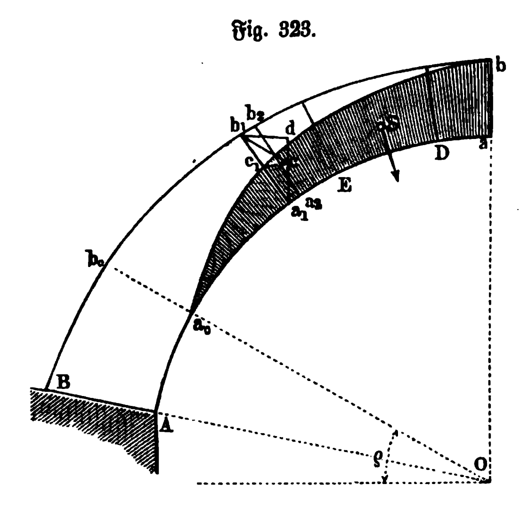
$$\frac{\partial Q_1}{a_1 a_2} = a_1 b_1 . \gamma \, (sin\, \alpha_1 - \varphi \, cos\, \alpha_1)$$

gegeben. Zieht man daher durch a_1 eine Verticallinie $a_1 d$ und durch b_1 eine gegen die Horizontale $b_1 d$ unter dem Reibungswinkel ϱ geneigte Gerade $b_1 c$, so erhält man

$$a_1 c = a_1 d - d c = a_1 b_1 \, (sin\, \alpha_1 - cos\, \alpha_1 \, tg\, \varrho)$$
$$= a_1 b_1 \, (sin\, \alpha_1 - \varphi \, cos\, \alpha_1).$$

Legt man daher einen Maßstab für die Kräfte zu Grunde, nach welchem die Einheit gleich dem Gewichte γ einer Cubikeinheit Gewölbmasse ist, so kann man die Strecke $a_1 c$ als das Maß für den in a_1 nach der centralen Richtung $b_1 a_1$ auf das Lehrgerüst ausgeübten Druck ansehen. Wenn man daher $a_1 c_1 = a_1 c$ macht, und diese Construction für eine hinreichend große Anzahl von Fugen wiederholt, so liefert die Verbindung aller so erhaltenen Punkte c_1 eine Curve $a_0 c_1 b$, welche sich im Scheitel b tangential an die äußere Wölbung anschließt und in der inneren Wölbung in dem Punkte a_0 verläuft, für welchen die Fuge $a_0 b_0$ unter dem Winkel ϱ gegen den Horizont geneigt ist. Man kann daher die zwischen dieser Curve und der inneren Wölbung enthaltene, in der Figur schraffirte Fläche als die Belastungsfläche des Lehrgerüstes ansehen, derart nämlich, daß auf jedes Element wie $a_1 a_2$ des Lehrbogens in der **Fugenrichtung** $b_1 a_1$ das Gewicht eines Steinprismas von der Dicke $a_1 a_2$ und der Höhe $a_1 c_1$ wirkt. Mit Rücksicht hierauf kann man in der bekannten

Fig. 323.



Weise durch Flächenverwandlung für jedes Stück DE des Lehrbogens zwischen zwei Stützpunkten D und E, wie sie durch die Streben hergestellt werden, den centralen Druck ermitteln, der, im Schwerpunkte S der zugehörigen Belastungsfläche angreifend, das Lehrgerüst belastet, und daraus findet man wieder die auf die Stützpunkte D und E selbst entfallenden Belastungen.

Auf eine nähere Bestimmung dieser Belastungen für die verschiedenen Gewölbe soll hier nicht eingegangen werden; es möge genügen, darauf hinzuweisen, daß diese Bestimmung auf analytischem Wege u. A. von Heinzerling in einem Artikel der Berliner Bauzeitung*) ausführlich vorgenommen ist.

Anmerkung. Es muß hier bemerkt werden, daß die vorstehende Untersuchung den Druck auf das Lehrgerüst nur unter der Voraussetzung eines angestrebten Abgleitens der Gewölbtheile bestimmt. Da nun aber auch ein Einsturz durch Kippen geschehen kann und geschehen wird, sobald das Lehrgerüst den zur Verhinderung des Kantens erforderlichen Gegendruck nicht zu äußern vermag, so hat man die Inanspruchnahme auch in dieser Hinsicht zu prüfen. Culmann giebt hierfür im Wesentlichen die folgende graphische Construction an.

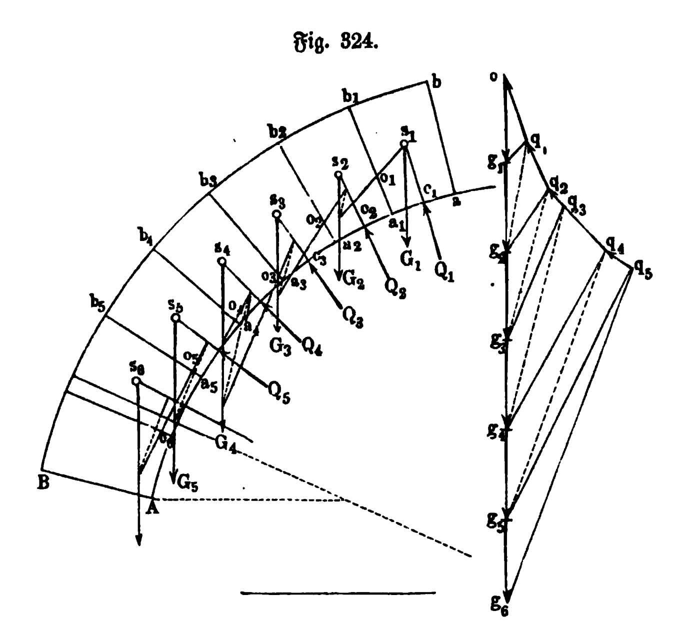
Es sei der Bau des Gewölbes, Fig. 324, von AB bis ab vorgeschritten, so theile man dasselbe durch die Lagerfugen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ . . . in eine beliebige Anzahl gleicher oder ungleicher Theile, und trage deren in den Schwerpunkten s_1, s_2 . . . wirksam zu denkende Gewichte G_1, G_2 . . . auf einer verticalen Kräftelinie als die einzelnen Strecken $o g_1$, $g_1 g_2$, $g_2 g_3$ . . . hinter einander auf. Die Belastungen oder Reactionen Q_1, Q_2, Q_3 . . . des Lehrgerüstes für die einzelnen Theile $a a_1$, $a_1 a_2$ . . . der inneren Wölbleibung denkt man sich in den Mitten c_1, c_2, c_3 . . . dieser Flächen senkrecht zu den letzteren wirksam.

Zerlegt man nun $o g_1 = G_1$ nach $o q_1 g_1$, d. h. nach der Richtung von Q_1 und einer solchen $o_1 s_1$, welche von der Normalen zu $a_1 b_1$ um den Reibungswinkel ϱ abweicht, so erhält man in $o q_1$ das Maß für die Belastung Q_1 des Lehrbogens $a a_1$, während $q_1 g_1$ die Pressung P_1 ergiebt, mit welcher der Stein $a b_1$ in o_1 gegen den folgenden Stein $a_1 b_2$ gepreßt wird. Setzt man daher diese Kraft $P_1 = q_1 g_1$ mit dem Gewichte $G_2 = g_1 g_2$ des zweiten Steines zu einer Mittelkraft $q_1 g_2$ zusammen, so erhält man durch Zerlegung dieser letzteren nach $q_1 q_2$ und $q_2 g_2$ die Belastung Q_2 des Lehrgerüstes in $a_1 a_2$ und die Pressung P_2, mit welcher die Fuge $a_2 b_2$ gepreßt wird, vorausgesetzt, daß $q_1 q_2$ parallel der Kraft Q_2 in c_2 gezogen wird, und daß $g_2 q_2$ wieder um den Reibungswinkel ϱ von der Normalen zur Fuge $a_2 b_2$ abweicht. Indem man in bekannter Weise parallel zu den Kräften des Kräftepolygons das Seilpolygon zeichnet, erhält man in o_2 den Angriffspunkt der Pressung P_2 in der Fuge $a_2 b_2$. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man in den Strecken $o q_1$, $q_1 q_2$, $q_2 q_3$ . . . die Druckkräfte, denen das Lehrgerüst in c_1, c_2, c_3 . . . widerstehen muß, um ein Abgleiten der betreffenden Gewölbschichten zu verhindern, so lange die Angriffspunkte o_1, o_2, o_3 der Fugenpressungen noch in das Gewölbe selbst hinein-

*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1874.

fallen. Wenn indessen, wie dies in der Figur für die Fuge $a_4 b_4$ der Fall ist, die wie angegeben gezeichnete Pressung P_4 die Fuge $a_4 b_4$ außerhalb der Wölbstärke trifft, so ist dies ein Beweis, daß das Gewölbe in dieser Fuge nicht mehr durch Gleiten, sondern durch Kippen gefährdet ist. Man hat daher jetzt die Mittelkraft $q_3 g_4$, welche den Stein $a_3 b_4$ angreift, nach $q_3 q_4$ parallel mit Q_4 und nach einer solchen Richtung $q_4 g_4$ zu zerlegen, daß die hiermit parallele Fugenpressung P_4 die Fuge $a_4 b_4$ selbst noch innerhalb des Gewölbes, also mindestens in der inneren Kante a_4 trifft. Besser

Fig. 324.



wird es sein, um ein Zerbröckeln der Kante a_4 zu vermeiden, den Angriffspunkt o_4 noch um eine gewisse Größe $a_4 o_4$ (0,09 bis 0,120 m nach Culmann) von der Kante entfernt anzunehmen. In derselben Weise hat man weiter im Kräftepolygone die Richtungen für die Fugenpressungen P_5, P_6 ... zu bestimmen, und man erkennt aus der Zeichnung, daß diese mit Rücksicht auf das Kanten anzunehmenden Richtungen von P_4, P_5 ... flacher, daher die betreffenden Stützkräfte Q_4, Q_5 ... des Lehrgerüstes größer ausfallen, als dieselben für die gleichen Fugen mit Rücksicht auf das Gleiten werden würden. Während sonach die obersten Schichten bei nicht genügend starkem Lehrgerüste abgleiten, findet eine Gefährdung des Baues durch ein Kippen der unteren Schichten statt.

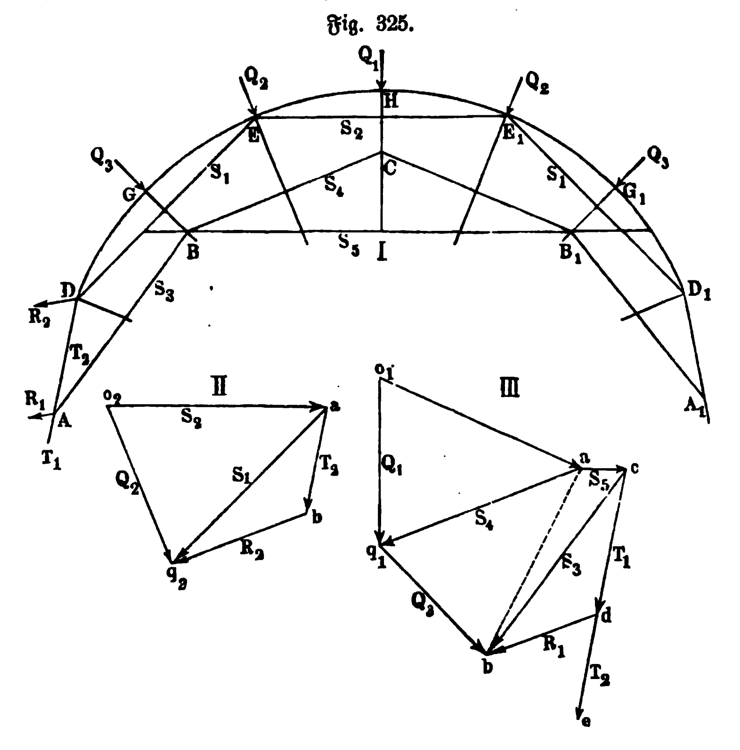
Die Kräfte, welchen die Streben eines Lehrgerüstes ausgesetzt sind, lassen sich nach dem oben über Sparren und über Sprengwerke Gesagten leicht ermitteln. Ist Q der centrale Druck, welchen die Belastung des Lehrbogens auf den Vereinigungspunkt zweier Streben ausübt, die unter den Winkeln

β_1 und β_2 gegen diese Kraft geneigt sein mögen, so findet man diese Strebenkräfte durch Zerlegung von Q ohne Weiteres zu:

$$S_1 = Q \frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \text{ und } S_2 = Q \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Schließlich möge noch die graphische Ermittelung der in den Gliedern eines Lehrgerüstes auftretenden Kräfte gezeigt werden, zu welchen Zwecke man nur

Fig. 325.

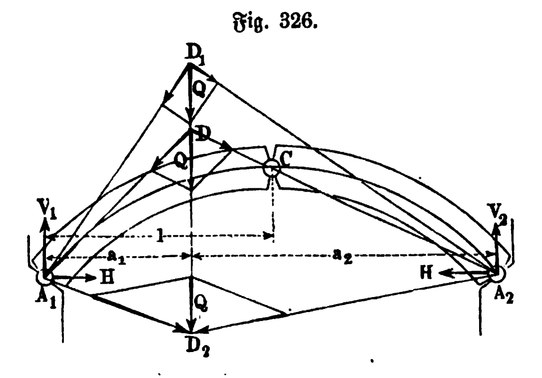


die Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons auszuführen hat. Es sei etwa das Lehrgerüst, Fig. 325, zu Grunde gelegt, welches aus den beiden einfachen Systemen $ABCB_1A_1$ und DEE_1D_1 besteht, deren centrale Belastungen in HC durch Q_1, in E und E_1 durch Q_2 und in GB und G_1B_1 durch Q_3 bezeichnet sein mögen. Trägt man in Fig. 325 II nach dem gewählten Kräftemaßstabe die Belastung $Q_2 = o_2q_2$ der Richtung und Größe nach auf, zieht durch o_2 eine Horizontale o_2a und durch q_2 eine Parallele zur Strebe DE, so erhält man die Druckkräfte $S_2 = o_2a$ in dem Spannriegel EE_1 und $S_1 = aq_2$ in der Strebe ED. Letztere Kraft $S_1 = aq_2$ kann man ferner zerlegen in ab parallel dem Stiele DA und

$b q_2$ nach einer Richtung, welche von der Normalen zur Widerlagsmauer in D um den Reibungswinkel zwischen Holz und Mauerwerk abweicht. Alsdann erhält man in $a b = T_2$ die Pressung des Stieles $A D$ unterhalb D, und in $b q_2 = R_2$ den Druck gegen die Mauer in D. Ganz in derselben Weise giebt das Kräftepolygon, Fig. III, die Kräfte, welche in den Gliedern des zweiten Sprengwerkes $A B C B_1 A_1$ wirken, wenn man $o_1 q_1 = Q_1$ macht, durch die Endpunkte o_1 und q_1 mit $C B_1$ und $C B$ Parallelen zieht, die Strebenkraft $S_4 = a q_1$ in $C B$ mit der Belastung $Q_3 = q_1 b$ zusammensetzt, und die Resultirende $a b$ nach der Richtung $a c$ des Spannriegels $B B_1$ und $c b$ der Strebe $B A$ zerlegt. Aus dieser letzteren Kraft S_3 erhält man wieder die in dem Stiele $D A$ unterhalb A zur Wirkung kommende Druckkraft $T_1 = c d$ und die in A gegen das Widerlager ausgeübte Pressung $d b$ in einer Richtung, welche von der Normalen zu $D A$ um den Reibungswinkel zwischen Holz und Mauerwerk abweicht. Der Stiel $D A$ ist daher zwischen D und A der Pressung $T_2 = a b$ in II und unterhalb A der Summe der Pressungen T_2 und $T_1 = c d$, also der Kraft $c e$ in III ausgesetzt. In ähnlicher Art hat man auch bei anders angeordneten Lehrgerüsten die Kräftezerlegung vorzunehmen.

Bogenträger mit Scharnieren. Unter Bogenträgern sollen im Folgenden solche Träger mit einer gekrümmten oder polygonalen Gurtung $A_1 C A_2$, Fig. 326, verstanden werden, bei denen die andere Gurtung fehlt, indem deren Wirkung durch die horizontalen Reactionen der Widerlager in §. 64.

Fig. 326.



ähnlicher Weise wie bei den Sprengwerken und Gewölben ersetzt wird. Denkt man sich einen irgendwie gekrümmten Balken $A_1 C A_2$, für welchen in der Folge immer eine zur Mitte C symmetrische Form, also auch gleiche Höhe der Stützpunkte A_1 und A_2 vorausgesetzt werden sollen, in einem beliebigen Punkte D durch eine Last Q angegriffen, so erkennt man, daß

durch diese Belastung Q in den Stützpunkten A_1 und A_2 Reactionen R_1 und R_2 hervorgerufen werden, welche, so verschieden auch ihre Richtung und Größe sein mag, jedenfalls in einem Punkte D_1 oder D_2 der Kraftrichtung von Q sich schneiden müssen. Da über die Lage D_1 oder D_2 dieses Schnittpunktes von vornherein nichts Bestimmtes angegeben werden kann, so muß man, ähnlich wie bei den Gewölben, annehmen, daß zunächst den Bedingungen des Gleichgewichtes in unendlich mannigfacher Weise genügt werden kann. Es wird nur so viel aus den Gleichgewichtsbedingungen mit Bestimmtheit sich angeben lassen, daß für die verticalen Componenten V_1 und V_2 der beiden Reactionen R die Beziehungen gelten:

$$V_1 + V_2 = Q \text{ und } V_1 a_1 = V_2 a_2,$$

wenn a_1 und a_2 die Abschnitte bedeuten, in welchen die ganze Spannweite $A_1 A_2 = 2l$ durch die Richtung von Q getheilt wird. Ferner müssen die horizontalen Componenten H_1 und H_2 der Reactionen R einander gleich und entgegengesetzt sein. Während also unter allen Umständen, unabhängig von der Höhenlage des Schnittpunktes D, die Verticalkräfte durch:

$$V_1 = Q\frac{a_2}{2l} \text{ und } V_2 = Q\frac{a_1}{2l}$$

gegeben sind, kann die Horizontalkraft H jeden beliebigen Werth nach der einen oder anderen Richtung annehmen. Man erkennt aus der Figur, daß die Horizontalkraft um so kleiner ausfällt, je größer die Entfernung des besagten Schnittpunktes D von der Horizontalen $A_1 A_2$ ist, und daß die Widerlager nach außen gepreßt oder nach innen gezogen werden, je nachdem der Schnittpunkt D oberhalb (D_1) oder unterhalb (D_2) der Horizontalen $A_1 A_2$ gelegen ist. Ersteres ist bei den Sprengwerksbrücken, letzteres bei den Hängebrücken der Fall. Welche von den unendlich vielen möglichen Reactionen R_1 und R_2 in Wirklichkeit eintreten, läßt sich nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse bestimmen, worüber in dem folgenden Paragraphen ein Weiteres angegeben werden soll. Für die vorliegende Untersuchung soll zunächst eine Voraussetzung gemacht werden, durch welche die oben angegebene Unbestimmtheit gänzlich verschwindet. Es sei nämlich angenommen, daß der Träger aus zwei symmetrischen, in der Mitte C in einem Scharniere drehbar zusammenstoßenden Theilen bestehe, und ebenso möge vorausgesetzt werden, daß durch Anordnung von Scharnieren in den Kämpfern A_1 und A_2 die Angriffspunkte der ausgeübten Widerlagsreactionen festgelegt seien. Die Richtung dieser letzteren ist unter diesen Voraussetzungen unzweideutig dadurch bestimmt, daß die von der Belastung Q der linken Trägerhälfte in dem Berührungspunkte C auf die rechte Trägerhälfte ausgeübte Druckkraft auch durch den Punkt A_2 gehen muß, weil sonst diese rechte Hälfte einer Drehung um A_2 ausgesetzt wäre. Zieht man daher von

A_2 durch C eine Gerade, so erhält man in deren Durchschnittspunkte D mit der Richtung von Q denjenigen Punkt, durch welchen auch die Reactionsrichtung von A_1 hindurchgehen muß. Es ist ohne Weiteres klar, daß der horizontale Druck in dem Scheitelscharniere C dieselbe Größe H haben muß, wie in den Kämpferscharnieren A_1 und A_2, und daß auch hier genau wie bei den Gewölben ein constanter Horizontalschub auftreten muß.

Durch die Anwendung solcher Scharniere ist nicht nur die Möglichkeit geboten, die von den Widerlagern ausgeübten Reactionen in jedem Falle mit vollständiger Sicherheit nach den Regeln der Statik zu bestimmen, sondern diese Einwirkungen sind auch unabhängig gemacht von den Elasticitätsverhältnissen der Träger und Widerlager, sowie von den Schwankungen der Temperatur. Wie bedeutend aber durch diese Verhältnisse die Spannungen in den Bogenträgern ohne Scharniere beeinflußt werden können, wird aus der Betrachtung des elastischen Bogenträgers im folgenden Paragraphen sich ergeben. Mit Rücksicht hierauf sind denn in der neueren Zeit vielfach derartige Scharnierbogenträger ausgeführt, und zwar können dieselben ebensowohl als Sprengwerksträger nach Fig. 327, wie auch als Hängwerksträger, Fig. 328, ausgeführt werden, je nachdem man die bogenförmige (richtiger polygonale) Gurtung unterhalb oder oberhalb der Fahrbahn $E_1 E_2$ anbringt, welche in jedem Falle durch ein System von verticalen und diagonalen Zwischengliedern mit der Bogengurtung verbunden wird.

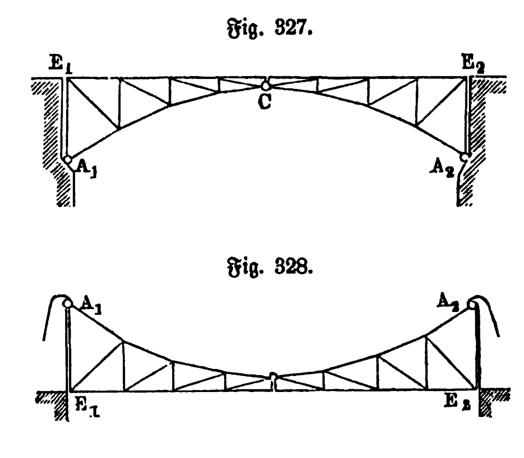


Fig. 327.

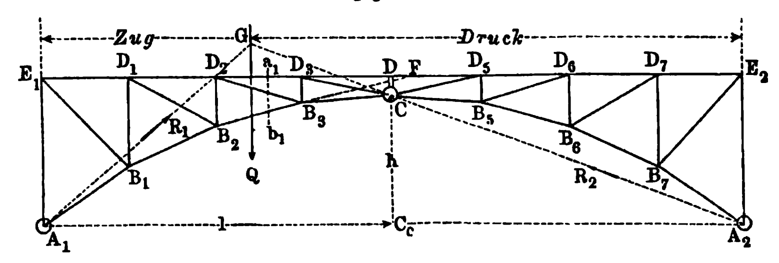
Fig. 328.

Die Untersuchung ist in beiden Fällen wesentlich dieselbe, sie möge im Folgenden für einen Sprengwerksträger, Fig. 329 (a. f. S.), angeführt werden.

Wenn der Träger $A_1 C A_2$, Fig. 329, nach der Gestalt eines Parabelsegmentes mit der Sehne $A_1 A_2 = 2l$ und der Pfeilhöhe $C C_0 = h$ gebildet ist, und man denkt denselben mit einer gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilten Last bedeckt, welche in einzelnen Punkten $A_1 B_1 B_2 \ldots A_2$ angreifen möge, so sind nach dem in §. 56 über die Parabelträger Gesagten in dem oberhalb des Bogens angebrachten Fachwerksysteme

sowohl in der oberen Gurtung wie in den Diagonalen keinerlei Spannungen vorhanden, und nur die Verticalpfosten BD werden durch die von ihnen zu übertragenden Belastungen gedrückt. Wenn dagegen der Träger einer einseitigen Belastung durch die Verkehrslast ausgesetzt ist, so stellen sich auch in

Fig. 329.



den Fachwerksgliedern gewisse Zug- oder Druckspannungen ein, deren Maximalwerthe in ähnlicher Art zu bestimmen sind, wie dies für die vorstehend besprochenen Fachwerke geschehen ist. Man denkt sich zu dem Ende wieder durch den Träger einen Schnitt gelegt, welcher außer dem betreffenden Gliede nur noch zwei andere Theile trifft, deren Durchschnittspunkt als Momentenmittelpunkt für alle diejenigen Kräfte angesehen wird, die auf das zwischen dem gedachten Schnitte und dem Scheitelscharniere C gelegene Trägerstück wirken. So z. B. wählt man, dem Durchschnitte $a_1 b_1$ entsprechend, den Punkt B_3 als Momentenpunkt für das Stück $a_1 D C b_1$, um die Spannung O_3 in $D_2 D_3$ zu bestimmen, während für die untere Gurtung $B_2 B_3$ der obere Knotenpunkt D_2, und für die Diagonalenspannung T_3 in $D_2 B_3$ der Punkt F als Momentenmittelpunkt gilt, in welchem die Richtungen von $D_2 D_3$ und $B_2 B_3$ sich treffen. Hierbei hat man denjenigen Belastungszustand zu Grunde zu legen, für welchen die gesuchte Spannung den größten Absolutwerth annimmt, und für diesen Belastungszustand die betreffenden Werthe der Horizontalkraft H und der Verticalkraft V zu bestimmen, mit welchen die jenseitige Trägerhälfte im Scheitelscharnier C auf das betrachtete Trägerstück wirkt. Diese Rechnung ist also genau in der oben mehrfach gezeigten Art auszuführen, und es bleibt daher hier nur noch übrig, die für die einzelnen Constructionsglieder ungünstigsten Belastungszustände zu bestimmen.

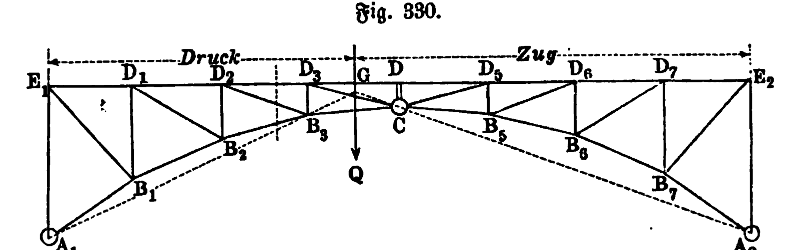
Um diesen Zustand für irgend ein Stück der unteren Bogengurtung z. B. $B_2 B_3$ zu ermitteln, ziehe man durch den betreffenden Momentenpunkt D_2 und den Auflagerpunkt A_1 eine Gerade, welche die durch A_2 und C geführte Gerade in G schneiden mag. Es ist nun sofort deutlich, daß ein in der Verticalebene durch G wirkendes Gewicht Q auf das Trägerstück $a_1 b_1 C$ eine Gesammtwirkung äußert, welche in die Richtung $G D_2 A_1$ hineinfällt,

da diese Gesammtwirkung sich aus dem Gewichte Q selbst und aus der durch dasselbe in C hervorgerufenen Reaction R_2 zusammensetzt, die Mittelkraft dieser beiden Kräfte aber der Reaction R_1 des Auflagerpunktes A_1 gleich und entgegengesetzt ist. Bei der Aufstellung der Momente in Bezug auf D_2 fällt daher das Moment der gedachten Mittelkraft — R_1 von Q und R_2 gleich Null aus, d. h. die in G wirkende Belastung Q ist ohne Einfluß auf die Spannung U_3 in dem Bogenstücke $B_2 B_3$. Wenn dagegen die Belastung Q zwischen diesem Punkte G und der Mitte C wirkt, so geht die gedachte Resultirende von Q und R_2 unterhalb von D_2 vorüber und sucht das betreffende Balkenstück $C a_1 b_1$ rechtsläufig um D_2 zu drehen, welche Drehung nur durch eine Druckspannung in $B_2 B_3$ aufgehoben werden kann. Dasselbe gilt auch noch für eine Stellung der Last Q in irgend einem Punkte der rechten Trägerhälfte CA_2, für welche Stellung die gesammte Einwirkung von Q auf das betrachtete Balkenstück $C a_1 b_1$ lediglich auf Erzeugung der nach der Richtung von C nach A_1 wirkenden Kraft — R_1 hinausläuft, welche Kraft ebenfalls eine Rechtsdrehung um D_2 anstrebt, d. h. eine Druckspannung in dem Bogentheile $B_2 B_3$ hervorruft. Wenn dagegen Q in einem Punkte links von G wirkt, so wird die durch Q auf das Trägerstück $C a_1 b_1$ ausgeübte Einwirkung in jedem Falle eine Linksdrehung um D_2 anstreben, sei es nun, daß Q zwischen G und D_2 oder über D_2 hinaus zwischen E_1 und D_2 wirkt. Im ersteren Falle, bei einer Stellung von Q zwischen G und D_2, ist die gedachte Einwirkung von Q als die Resultirende aus Q und R_2, also als $-R_1$ zu denken, während bei einer Stellung von Q links von D_2 die ganze Einwirkung aus der in der Richtung $A_2 C$ wirkenden Reaction R_2 des Auflagerpunktes A_2 besteht. Jede Belastung des Trägers links von G bringt daher in dem Gurtungsstücke $B_2 B_3$ Zugspannungen hervor. Man hat daher die Verticale durch G als die Grenze anzusehen zwischen denjenigen Belastungen, welche Zug- (links) und Druckspannungen (rechts) in dem Bogenstücke $B_2 B_3$ hervorrufen, wie dies in der Figur angedeutet ist. Um daher für dieses Bogenstück die äußersten Spannungen zu ermitteln, hat man den Träger, außer durch das gleichmäßig vertheilte Eigengewicht p, einmal in der Strecke GE_1 und einmal in der Strecke GE_2 mit der beweglichen Last k bedeckt anzunehmen. Es ist übrigens ersichtlich, daß für die Bestimmung der Dimensionen nur diejenige Spannung U_2 maßgebend sein wird, welche durch die Belastung der Druckabtheilung GE_2 erzeugt wird, da durch die Belastung der Zugabtheilung GE_1 die durch das Eigengewicht schon erzeugte Druckpressung in $B_2 B_3$ ihrer Größe nach vermindert wird und also einen kleineren Werth annimmt als die größte Druckspannung.

In ganz derselben Weise lassen sich für die übrigen Glieder des Fachwerkes die Grenzen angeben, welche die auf Zug oder Druck wirkenden

Belastungen von einander trennen. So erhält man in Bezug auf die obere Gurtung $D_2 D_3$, Fig. 330, die Belastungsscheide in dem Durchschnittspunkte G zwischen der Reactionsrichtung $A_2 C$ und der Verbindungslinie von A_1 und dem Momentenpunkte B_3. Eine der vorstehenden ganz ähnliche

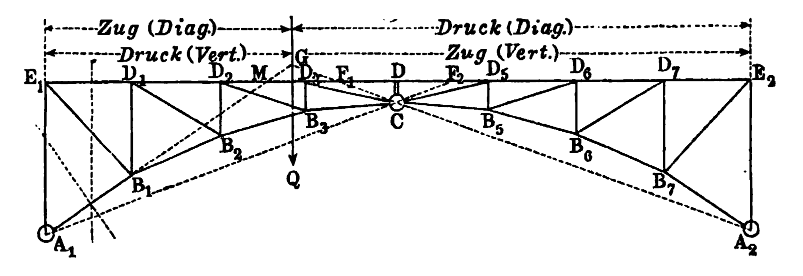
Fig. 330.



Betrachtung führt dann zu dem Resultate, daß jede Belastung links von G Druckspannungen, und jede Belastung rechts von G Zugspannungen in dem Gurtungsstücke $D_2 D_3$ hervorruft. Man erhält daher die äußersten Spannungswerthe für O_3, wenn man einmal die eine, das andere Mal die andere Abtheilung mit k belastet denkt. Das Eigengewicht p kann hierbei ganz vernachlässigt werden, da nach dem vorstehend Bemerkten die gleichförmig vertheilte Belastung Spannungen in der oberen Gurtung gar nicht hervorruft. Aus dem letzteren Grunde müssen denn auch die beiden äußersten Werthe von O_3 der Größe nach übereinstimmen, da diese entgegengesetzten Spannungen sich gegenseitig aufheben müssen, wenn beide Abtheilungen $G E_1$ und $G E_2$ belastet werden.

Für eine Diagonale wie $B_1 E_1$ sowie für die Verticale $A_1 E_1$, Fig. 331, gilt der Durchschnitt M der oberen Gurtung mit derjenigen $A_1 B_1$ als

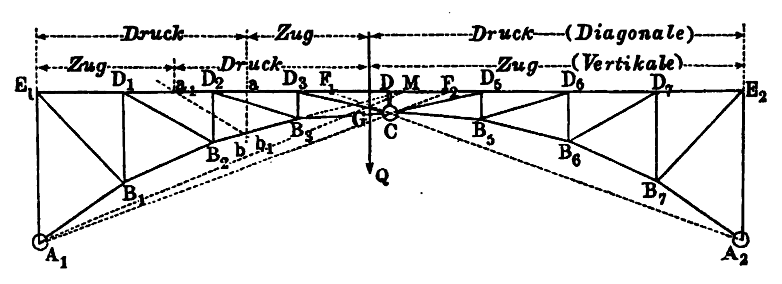
Fig. 331.



Momentenpunkt, und daher wird die Gerade $A_1 M$ in ihrem Durchschnittspunkte G mit $A_2 C$ diejenige Stelle ergeben, in welcher ein Gewicht Q wirken muß, um keine Spannung in $B_1 E_1$ und $A_1 E_1$ hervorzurufen. Es gilt daher $G Q$ als Belastungsscheide, und man erkennt leicht, daß eine

Belastung des links gelegenen Theiles $E_1 G_1$ in der Diagonale Zug- und in der Verticale Druckspannungen hervorbringen muß, während die rechts von G angebrachten Belastungen die entgegengesetzten Spannungen in der Diagonale und Verticale erzeugen. Diese Beziehung gilt aber nur so lange, als der Momentenmittelpunkt M außerhalb der beiden Punkte F_1 und F_2 gelegen ist, in denen die obere Gurtung $E_1 E_2$ von den Reactionsrichtungen $A_1 C$ und $A_2 C$ getroffen wird. Wenn dagegen der Momentenmittelpunkt M zwischen F_1 und F_2 fällt, wie dies für die Diagonale $D_2 B_3$ und die Verticale $D_2 B_2$, Fig. 332, der Fall ist, so findet man zunächst wieder in dem

Fig. 332.



Durchschnitte G zwischen der Geraden $A_1 M$ und derjenigen $A_2 C$ eine Belastungsscheide, indem wieder eine Belastung Q in G keine Spannung, und jede Belastung rechts von $G Q$ wie vorher eine Druckspannung in der Diagonale $D_2 B_3$ und eine Zugspannung in dem Verticalstiele $D_2 B_2$ hervorruft. In dem links von $G Q$ befindlichen Trägertheile $G E_1$ indessen stellt sich jetzt noch eine zweite Belastungsscheide ein, welche mit dem geführten Schnitte, also für die Diagonale mit $a b$ und für die Verticale mit $a_1 b_1$ übereinstimmt; denn es ist ersichtlich, daß eine Belastung links von $G Q$ das abgeschnittene Stück $C a b$ bezw. $C a_1 b_1$ um den Momentenpunkt M links- oder rechtsum zu drehen bestrebt ist, je nachdem diese Belastung rechts oder links von der bezüglichen Schnittstelle a und a_1 wirkt.

Aus den der Figur eingeschriebenen Bezeichnungen ist die Art der Spannung ersichtlich, welche eine Belastung der betreffenden Abtheilung in dem zugehörigen Füllungsgliede hervorruft.

In ähnlicher Art hat man auch diejenige Belastung der Brücke festzustellen, bei welcher auf den Pfeiler $B D E$, Fig. 333 (a. f. S.), das größte Umsturzmoment wirkt. Der Horizontaldruck in A_2 sucht offenbar diesen Pfeiler um die Kante E durch Rechtsdrehung umzukanten, während der Verticaldruck V_2 ebensowohl wie der Druck R_1' des benachbarten Bogens $A_1' C'$ die entgegengesetzte Drehungsrichtung um E haben, also für die Stabilität günstig wirken. Zieht man durch diesen Punkt E und A_2 eine

Gerade, so findet man in dem Schnittpunkte G derselben mit A_1C diejenige Stelle, an welcher ein Gewicht wirken muß, um ohne Einfluß auf die Stabilität zu sein, denn das Gewicht Q, vereinigt mit der Reaction R_1 der linken Bogenhälfte, ergiebt eine Resultirende, welche den Pfeiler in der Richtung A_2E angreift. Man erkennt daher, daß jede links von G wirkende Belastung das Umsturzmoment vergrößert, während jede Belastung rechts von G und zwar sowohl zwischen G und B wie auch jede Belastung der benachbarten Oeffnung BC' die Stabilität des Pfeilers erhöht, indem die dadurch auf denselben ausgeübte Wirkung die Grundfläche DE links von E trifft. Als den für den Pfeiler ungünstigsten Belastungszustand hat man daher denjenigen anzunehmen, in welchem die linke Strecke von A_1 bis G belastet ist, während die Strecke rechts von G und die anstoßende Oeffnung unbelastet sind.

Fig. 333.

Die Untersuchung der Stabilität dieser Pfeiler ist ganz ebenso vorzunehmen, wie die der Pfeiler und Widerlager der Gewölbe (§. 28).

Beispiel. Es sollen für einen Bogenträger nach Art der Fig. 329, von 20 m Spannweite und 3 m Pfeilhöhe die größten Anstrengungen der Gurtungen und Füllungsglieder bestimmt werden, wenn auf jeden laufenden Meter eine Eigenlast von 800 kg und eine zufällige Belastung von 2000 kg gerechnet wird?

Da bei acht Feldern die Weite eines Feldes 2,5 m beträgt, so hat man für jeden Knotenpunkt 2,5 . 0,8 = 2 t Eigenlast und 2,5 . 2 = 5 t zufällige Belastung zu rechnen. Nimmt man im Scheitel einen Abstand zwischen den Schwerpunkten der Gurtungsquerschnitte $CD = 0{,}5$ m an, so bestimmen sich bei einer parabolischen Untergurtung die Längen der Stiele zu:

$$CD = 0{,}5;\; B_3D_3 = 0{,}5 + \frac{1}{16}\,3 = 0{,}688\,\text{m};$$

$$B_2D_2 = 0{,}5 + \frac{1}{4}\,3 = 1{,}25\,\text{m};\; B_1D_1 = 0{,}5 + \frac{9}{16}\,3 = 2{,}188\,\text{m und}$$

$$A_1E_1 = 3{,}5\,\text{m}.$$

Es sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, nur die Anstrengungen der Glieder eines und zwar etwa des dritten Feldes $B_2B_3D_3D_2$ ermittelt werden.

Für die untere Gurtung U_3 dient D_2 als Momentenpunkt und die Belastungsscheide liegt im dritten Felde. Man erhält daher die größte Druckspannung U_3, wenn man nach Fig. 329 die Punkte D_3, D, D_5, D_6, D_7 und E_2 je mit $2 + 5 = 7$ t, die übrigen Knotenpunkte mit 2 t belastet. Für diesen Zustand bestimmen sich V und H im Scheitel durch die beiden Momentengleichungen für die Trägerhälften in Bezug auf ihre Auflagerpunkte A_1 und A_2. Man hat nämlich für A_1C in Bezug auf A_1:

$$10\,V - 3\,H + 2\,.\,2{,}5\,(1 + 2) + 7\,.\,2{,}5\left(3 + \frac{1}{2}\,.\,4\right) = 0,$$

und für $A_2 C$ in Bezug auf A_2:

$$10\,V + 3\,H - 7\,.\,2{,}5\left(1 + 2 + 3 + \frac{1}{2}\,.\,4\right) = 0.$$

Durch Addition und durch Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man für den betrachteten Belastungszustand die Kräfte V und H im Scheitel, und zwar wird:

$$V = 1{,}875\,\text{t};\quad H = 40{,}41\,\text{t}.$$

Da nun der Momentenmittelpunkt D_2 von der Gurtung $B_2 B_3$ einen normalen Abstand gleich 1,25 m hat (nach der Zeichnung), so erhält man die Spannung U_{3max} aus:

$$U_{3max}\,1{,}25 = V\,.\,5 + H\,.\,0{,}5 + 7\,.\,2{,}5\left(1 + \frac{1}{2}\,.\,2\right) = 64{,}58\,\text{mt},$$

woraus

$$U_{3max} = 51{,}67\ \text{t Druck}$$

folgt. Will man auch U_{3min} bestimmen, so hat man die Knotenpunkte E_1, D_1, D_2 mit 7 t, alle übrigen mit 2 t zu belasten, man erhält dann V und H aus:

$$-\,10\,V - 3\,H + 7\,.\,2{,}5\,(1 + 2) + 2\,.\,2{,}5\left(3 + \frac{4}{2}\right) = 0,$$

und

$$-\,10\,V + 3\,H - 2\,.\,2{,}5\left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0,$$

woraus

$$V = 1{,}875\,\text{t und } H = 19{,}59\,\text{t}$$

folgt. Hiermit erhält man U_{3min} aus:

$$U_{3min}\,1{,}25 = H\,.\,0{,}5 - V\,.\,5 + 2\,.\,2{,}5\left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

zu

$$U_{3min} = 8{,}33\ \text{t ebenfalls Druck}.$$

In gleicher Weise sind die Spannungen für die übrigen Glieder zu bestimmen, es wird genügen, hierfür nur die Ansätze hinzuschreiben. Für die Obergurtung O_3 ist B_3 Momentenmittelpunkt, die Belastungsscheide liegt im vierten Felde, folglich ist für O_{3max}:

$$10\,V - 3\,H + 2\,.\,2{,}5\,(1 + 2 + 3) + 7\,.\,2{,}5\,\frac{4}{2} = 0;$$

$$10\,V + 3\,H - 7\,.\,2{,}5\left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$

$$V = 3{,}75\,\text{t};\quad H = 34{,}17\,\text{t},$$

daher

$$O_{3max}\,0{,}688 = V\,.\,2{,}5 - H\,.\,0{,}188 + \frac{7}{2}\,.\,2{,}5 = 11{,}70\,\text{mt}$$

woraus

$$O_{3max} = \frac{11{,}70}{0{,}688} = 17{,}0\ \text{t Zug folgt.}$$

Für O_{3min} würde man durch Belastung von E_1, D_1, D_2 und D_3:

$$O_{3min} = -\,17\ \text{t Druck}$$

erhalten.

Für die Diagonale $B_3 D_2$ liegt der Momentenmittelpunkt auf der oberen Gurtung um 0,555 m rechts vom Scheitel und in einem normalen Abstande von der Diagonale gleich 1,5 m. Die beiden Belastungsscheiden liegen nach Fig. 332 im dritten und vierten Felde, man erhält daher den größten Zug in der Diagonale, wenn man nur D_3 belastet, und da man hierfür das Eigengewicht unberücksichtigt lassen kann, so hat man:

$$- 10\,V - 3\,H + 5 \,.\, 2{,}5 \,.\, 3 = 0,$$

$$- 10\,V + 3\,H = 0,$$

woraus

$$V = 1{,}875\,\mathrm{t};\;\; H = 6{,}25\,\mathrm{t},$$

und daher aus

$$T_{3max}\, 1{,}5 = 5 \,.\, (2{,}5 + 0{,}555) - V \,.\, 0{,}555 - H \,.\, 0{,}5 = +\, 11{,}10\,\mathrm{mt}$$

$$T_{3max} = 7{,}4\,\mathrm{t}\ \text{Zug}$$

folgt. T_{3min} würde man bei Belastung der übrigen Knotenpunkte zu

$$T_{3min} = -\, 7{,}4\,\mathrm{t}\ \text{Druck}$$

erhalten.

Für den Verticalstiel $D_2 B_2$ gilt derselbe Momentenmittelpunkt wie für die Diagonale, die beiden Belastungsscheiden liegen aber hier nach Fig. 332 im zweiten und vierten Felde, daher die beiden Knotenpunkte D_2 und D_3 das eine Mal allein belastet, das andere Mal unbelastet anzunehmen sind. Wenn D_2 und D_3 belastet sind, erhält man die größte Druckkraft P_{3min} und zwar ist:

$$- 10\,V - 3\,H + 2 \,.\, 2{,}5 + 7 \,.\, 2{,}5\ (2 + 3) + \frac{1}{2} \,.\, 2 \,.\, 2{,}5 \,.\, 4 = 0;$$

$$- 10\,V + 3\,H - 2 \,.\, 2{,}5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$

$$V = 3{,}125\,\mathrm{t};\;\; H = 23{,}75\,\mathrm{t};$$

daher

$$P_{3min}\, 5{,}555 = -\, 1 \,.\, 0{,}555 - 7\ (3{,}055 + 5{,}555) + H \,.\, 0{,}5 + V \,.\, 0{,}555,$$

$$P_{3min} = -\, 8{,}5\,\mathrm{t}\ \text{Druck}.$$

Belastet man die anderen Knotenpunkte, so hat man aus:

$$10\,V - 3\,H + 7 \,.\, 2{,}5 + 2 \,.\, 2{,}5\ (2 + 3) + \frac{1}{2} \,.\, 7 \,.\, 2{,}5 \,.\, 4 = 0,$$

$$10\,V + 3\,H - 7 \,.\, 2{,}5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$

$$V = 3{,}125\,\mathrm{t};\;\; H = 36{,}25\,\mathrm{t};$$

womit man

$$P_{3max}\, 5{,}555 = H \,.\, 0{,}5 - V \,.\, 0{,}555 - \frac{1}{2}\, 7 \,.\, 0{,}555 - 2\ (3{,}055 + 5{,}555),$$

und hieraus

$$P_{3max} = -\, 0{,}5\,\mathrm{t}\ \text{Druck}$$

erhält.

§. 65. **Elastische Bogenträger.** Um die Verhältnisse der Bogenträger ohne Scheitelscharnier zu prüfen, welche Prüfung, wie vorstehend bemerkt wurde, nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse möglich ist, hat man zunächst die Bedingungen für die Biegung eines krummen Balkens über-

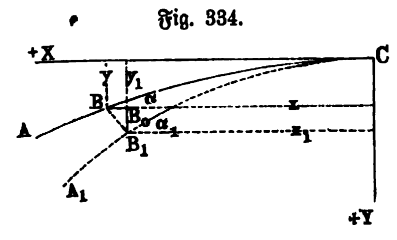
haupt festzustellen. Hierzu kann die allgemeine Gleichung der elastischen Linie für den geraden Balken dienen, welche in §. 35, II durch $\varrho = \frac{TE}{M}$ ausgedrückt wurde, wenn E den Elasticitätsmodul des Materials bedeutet und unter T das Trägheitsmoment des Querschnitts, sowie unter ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für irgend welche Stelle des Balkens verstanden wird, für welche das Biegungsmoment der äußeren Kräfte gleich M ist. Bezieht man die Balkenaxe auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und bezeichnet mit α den Winkel, welchen die Balkenaxe im Punkte x, y mit der horizontalen X Axe bildet, so kann man bekanntlich das Balkenelement an dieser Stelle durch $\partial s = \varrho \, \partial \alpha$ ausdrücken, worin $\partial \alpha$ den Contingenzwinkel oder die Aenderung der Neigung α in zwei unendlich nahe gelegenen Punkten x, y und $x + \partial x,\ y + \partial y$ bedeutet. Hieraus folgt $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$ und die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher auch:

$$M = TE \frac{\partial \alpha}{\partial s} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Diese zunächst für Balken mit ursprünglich gerader Axe gültige Gleichung kann auch noch genau genug für die schwach gekrümmten Balken angewendet werden, wie sie bei Bogenbrücken vorzukommen pflegen, vorausgesetzt, daß man hier unter dem Werthe $\partial \alpha = \frac{\partial s}{\varrho}$ ebenfalls die Veränderung der Neigung versteht, welche durch das Biegungsmoment in dem betreffenden Elemente hervorgerufen wird.

Es möge etwa ein an dem einen Ende C horizontal eingeklemmter Balken, Fig. 334, von Hause aus die gekrümmte Axenform ABC haben, und unter dem Einflusse von irgend welchen biegenden Kräften in die Form $A_1 B_1 C$ übergehen, so gilt für irgend ein Element von der Länge ∂s in B, für welches die Neigung der Tangente gegen die horizontale X Axe ursprünglich durch α und in der nachherigen Stellung durch α_1 bezeichnet sein mag:

Fig. 334.



$$M = TE \frac{\partial \alpha_1 - \partial \alpha}{\partial s} = TE \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right), \quad \dots \quad (2)$$

wenn ϱ und ϱ_1 die Krümmungshalbmesser in B und B_1 vor und nach der Biegung bedeuten. Durch Integration der Gleichung (2) erhält man:

$$\alpha_1 - \alpha = \int \frac{M}{TE} \partial s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welche Gleichung für irgend einen Punkt B die Aenderung $\alpha_1 - \alpha$ in der Neigung der Tangente gegen den Horizont ergiebt, sobald man das Integral zwischen den Grenzen $s = 0$ in C und s in B vornimmt.

Bezeichnet man ferner mit x und y die Ordinaten des Punktes B und mit x_1 und y_1 diejenigen des Punktes B_1, so kann man die horizontale Verschiebung $B_0 B = x_1 - x$ und die verticale Senkung $B_0 B_1 = y_1 - y$ in folgender Weise berechnen. Setzt man bei der immer nur geringen Größe der Neigungsänderung $\alpha_1 - \alpha$ annähernd:

$$\sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \sin \alpha$$

und

$$\cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \cos \alpha,$$

so erhält man aus den bekannten trigometrischen Formeln:

$$\sin \alpha_1 - \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \cos \alpha . (\alpha_1 - \alpha)$$

$$= \cos \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s;$$

$$\cos \alpha_1 - \cos \alpha = -2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = - \sin \alpha . (\alpha_1 - \alpha)$$

$$= - \sin \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s.$$

Wenn hierin

$$\sin \alpha = \frac{\partial y}{\partial s}, \ \sin \alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial s}$$

und

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \ \cos \alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s}$$

eingeführt wird, so findet man

$$\frac{\partial y_1 - \partial y}{\partial x} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

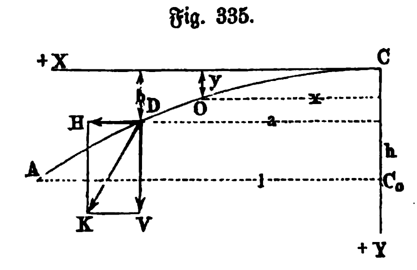
$$\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial y} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichungen können, wenn sie integrirt werden, dazu dienen, in jedem gegebenen Falle, d. h. bei bestimmter Form und Belastung des Bal-

kens, die Senkung und horizontale Verschiebung für jeden Punkt des Balkens zu bestimmen.

In den meisten Fällen der Praxis können die immer sehr flachen Bögen der Brückenträger als parabelförmige angesehen werden, unter welcher Voraussetzung im Folgenden die Untersuchung geführt werden möge *).

Fig. 335.



Es sei ABC, Fig. 335, ein parabolischer, im Scheitel C horizontal eingespannter Balken von der horizontalen Ausladung $AC_0 = l$ und der Pfeilhöhe $CC_0 = h$, dessen Scheitelgleichung also durch

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dargestellt ist, wenn $n = \frac{h}{l^2}$ gesetzt wird. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 n x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und annähernd

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + 4 n^2 x^2} = (1 + 2 n^2 x^2)\, \partial x, \quad . \quad (8)$$

da für die hier in Betracht kommenden Fälle $n^2 x^2 = \frac{h^2 x^2}{l^4}$ nur klein ist gegen die Einheit.

Setzt man nun für den Balken überall gleiche Querschnitte, also T constant voraus, so geht die Gleichung (3) mit dem aus (8) folgenden Werthe von ∂s über in:

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{TE} \int M (1 + 2 n^2 x^2)\, \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Es sei der Balken in irgend einem Punkte D, dessen Ordinaten a und $b = n a^2$ sind, durch eine beliebige Kraft K angegriffen, deren verticale und horizontale Componenten durch V und H ausgedrückt sein mögen, wobei diese Componenten positiv oder negativ genommen sein sollen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenaxen wirksam sind. Für diesen Fall hat man das Biegungsmoment für irgend einen

*) Handelt es sich um die Untersuchung anders geformter krummer Balken, z. B. kreisförmiger, so ändert sich die Rechnung nur insofern, daß anstatt der Parabelgleichung (6) die zugehörige Gleichung der Trägerform zu Grunde zu legen ist.

zwischen D und C gelegenen Punkt, z. B. O, mit den Coordinaten x und $y = nx^2$ zu:

$$M = V(a-x) - H(b-y) = V(a-x) - Hn(a^2-x^2) \quad . (10)$$

Mit diesem Werthe von M liefert daher die Gleichung (9):

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{TE}\int [V(a-x) - Hn(a^2-x^2)](1+2n^2x^2)\partial x$$

$$= \frac{V}{TE}\left(ax - \frac{x^2}{2} + 2n^2\frac{ax^3}{3} - 2n^2\frac{x^4}{4}\right) - \frac{H}{TE}n\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right.$$

$$\left. + 2n^2\frac{a^2x^3}{3} - 2n^2\frac{x^5}{5}\right) = \frac{\mathfrak{B}}{TE} - \frac{\mathfrak{H}}{TE} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

wenn man der Kürze wegen die beiden Faktoren von $\frac{1}{TE}$ mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Um die verticale und horizontale Verschiebung des Punktes O zu ermitteln, dienen die Gleichungen (4) und (5), wenn man darin für $\alpha_1 - \alpha$ den Ausdruck aus (11) einführt und zwischen den Grenzen 0 für C und x für O integrirt, wobei man nach (7) $\partial y = 2nx\partial x$ zu setzen hat. Danach wird:

$$y_1 - y = \frac{V}{TE}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} + n^2\frac{ax^4}{6} - n^2\frac{x^5}{10}\right) - \frac{H}{TE}n\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right.$$

$$\left. + n^2\frac{a^2x^4}{6} - n^2\frac{x^6}{15}\right) = \frac{\mathfrak{B}_1}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_1}{TE} = \eta_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

und

$$x - x_1 = \frac{V}{TE}2n\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} + 2n^2\frac{ax^5}{15} - n^2\frac{x^6}{12}\right) - \frac{H}{TE}2n^2\left(\frac{a^2x^3}{3}\right.$$

$$\left. - \frac{x^5}{15} + 2n^2\frac{a^2x^5}{15} - 2n^2\frac{x^7}{35}\right) = \frac{\mathfrak{B}_2}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_2}{TE} = \xi_x \quad . \; . \; . \; (13)$$

Die Gleichungen (11) bis (13) gelten nur für das Trägerstück zwischen C und dem Angriffspunkte D der Kraft K, da auf das freie Stück AD ein Biegungsmoment M gar nicht ausgeübt wird. Mit $x = a$ erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die Richtungsänderung und die verticale sowie die horizontale Verschiebung in dem Angriffspunkte D der Kraft K zu:

$$\varphi_d = \alpha_1 - \alpha = \frac{V}{TE}\left(\frac{a^2}{2} + n^2\frac{a^4}{6}\right) - \frac{H}{TE}n\left(2\frac{a^3}{3} + n^2\frac{4a^5}{15}\right) \cdot \cdot \; (11^a)$$

$$\eta_d = y_1 - y = \frac{V}{TE}\left(\frac{a^3}{3} + n^2\frac{a^5}{15}\right) - \frac{H}{TE}n\left(5\frac{a^4}{12} + n^2\frac{a^6}{10}\right) \cdot \cdot \; (12^a)$$

$$\xi_d = x - x_1 = \frac{V}{TE}n\left(5\frac{a^4}{12} + n^2\frac{a^6}{10}\right) - \frac{H}{TE}n^2\left(8\frac{a^5}{15} + n^2\frac{16a^7}{105}\right) (13^a)$$

Wenn man wegen der Kleinheit von n in vorstehenden Formeln die Glieder in den Klammern, welche mit n^2 behaftet sind, gegen die anderen vernachlässigt, so erhält man annähernd:

$$\varphi_a = \frac{V}{TE}\frac{a^2}{2} - \frac{H}{TE} 2n \frac{a^3}{3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11^b)$$

$$\eta_a = \frac{V}{TE}\frac{a^3}{3} - \frac{H}{TE} 5n \frac{a^4}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12^b)$$

$$\xi_a = \frac{V}{TE} 5n \frac{a^4}{12} - \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{a^5}{15} \quad \ldots \ldots \quad (13^b)$$

Für das freie Ende A des Trägers ist die Richtungsänderung $\alpha_1 - \alpha$ der Balkentangente durch denselben Werth φ_a aus (11^a), wie für den Angriffspunkt D der Kraft K ausgedrückt, da das Balkenstück AD einer Biegung nicht unterworfen ist. Dagegen setzt sich die Senkung η des Punktes A zusammen aus derjenigen η_a des Punktes D und einem zweiten Betrage, welcher aus der Richtungsänderung um φ_a in D hervorgeht und für den Endpunkt A wegen des horizontalen Abstandes $l - a$ desselben von D den Werth $(l - a)\, \varphi_a$ hat. Folglich hat man für das freie Ende A die verticale Senkung

$$\eta = \eta_a + (l - a)\, \varphi_a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

und ebenso findet sich die horizontale Verschiebung wegen des verticalen Abstandes $h - b = n\,(l^2 - a^2)$ zwischen D und A zu:

$$\xi = \xi_a + n\,(l^2 - a^2)\, \varphi_a \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Um auch die Biegungsverhältnisse für einen gekrümmten Balken zu ermitteln, welcher durch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection ausgebreitete Last q pro Längeneinheit angegriffen wird, hat man in obige Ausdrücke $H = 0$ und für V das Lastelement $q\,\partial x$ einzuführen. Setzt man dann für den Abstand a allgemein die Abscisse x und integrirt zwischen den Werthen x_1 und x_2, zwischen denen die Last ausgebreitet ist, so erhält man die entsprechenden Gleichungen. Es sollen hier nur die Verschiebungen des freien Endes A unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß der Träger seiner ganzen Länge nach, also zwischen den Abscissen $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ mit der Last $q\,l$ bedeckt ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Verschiebungen des freien Endes A aus den Gleichungen (14) und (15), wenn man darin die Werthe aus (11^a) bis (13^a) mit x anstatt a einführt. Danach folgt die verticale Verschiebung aus (14):

$$\eta = \int_0^l \frac{q\,\partial x}{TE}\left(\frac{x^3}{3} + n^2\frac{x^5}{15}\right) + \int_0^l (l - x)\frac{q\,\partial x}{TE}\left(\frac{x^2}{2} + n^2\frac{x^4}{6}\right)$$

$$= \frac{q}{TE}\left(\frac{l^4}{8} + n^2\frac{l^6}{60}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

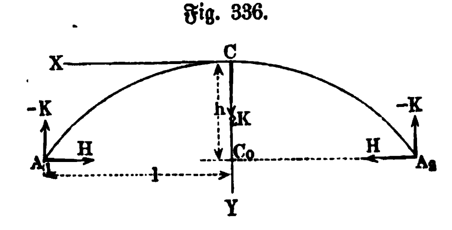
und die horizontale Verschiebung aus (15):

$$\xi = \int_0^l \frac{q\,\partial x}{TE} n \left(5\frac{x^4}{12} + n^2 \frac{x^6}{10}\right) + \int_0^l n (l^2 - x^2) \frac{q\,\partial x}{TE} \left(\frac{x^2}{2} + n^2 \frac{x^4}{6}\right)$$

$$= \frac{q}{TE} n \left(\frac{3 l^5}{20} + n^2 \frac{l^7}{42}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

Die hier entwickelten Gleichungen krummer einseitig eingeklemmter Balken können nun dazu dienen, die Verhältnisse der Biegung bogenförmiger Träger festzustellen. Zu dem Ende sei $A_1 C A_2$, Fig. 336, die Mittellinie eines parabolischen Balkens von der Spannweite $A_1 A_2 = 2l$ und der Höhe in der Mitte $CC_0 = h$, dessen Gleichung also wieder durch (6):

Fig. 336.



$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2$$

gegeben ist. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß der Träger in A_1 und A_2 auf horizontalen Stützflächen ohne Reibung ruhe, so daß ein seitliches Verschieben der Stützpunkte möglich ist, und daß der Träger in der Mitte mit einem Gewichte $2K$ belastet sein soll. Unter dieser Voraussetzung wird in jedem Fußpunkte A_1 und A_2 durch die feste Stütze eine vertical aufwärts gerichtete Reaction $V = -K$ gegen den Träger geäußert, wogegen eine horizontale Reaction wegen der angenommenen Verschieblichkeit der Enden nicht auftritt. Man denke sich nunmehr den Träger zur Hälfte CA_2 in eine feste Wand eingeschlossen, was hier deswegen angängig ist, ohne an den Bedingungen des Gleichgewichtes etwas zu ändern, weil der Träger wegen der symmetrischen Anordnung immer im Scheitel C eine horizontale Tangente beibehält. Hierdurch ist die Untersuchung des Trägers auf die vorstehend durchgeführte eines einseitig bei C horizontal eingeklemmten Balkens $A_1 C$ zurückgeführt, welcher am freien Ende A_1, also am Hebelarme l, einer Verticalkraft $-K$ ausgesetzt ist. Man erhält daher ohne Weiteres die verticale und horizontale Verschiebung jedes Fußpunktes A_1 und A_2 in Bezug auf den fest vorausgesetzten Scheitel C, wenn man in (12ᵃ) und (13ᵃ) für V den Werth $-K$, und $a = l$ sowie $H = 0$ setzt, zu:

$$\eta = -\frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + n^2 \frac{l^5}{15}\right) = -\frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + \frac{h^2 l}{15}\right) \cdot \cdot \cdot \quad (18)$$

$$\xi = -\frac{K}{TE} n \left(\frac{5 l^4}{12} + n^2 \frac{l^6}{10}\right) = -\frac{K}{TE}\left(\frac{5 h l^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right) \cdot \quad (19)$$

Das negative Vorzeichen von $\xi = x - x_1$ deutet an, daß die Schenkel A_1 und A_2 nach außen treten und das von $\eta = y_1 - y$ bedeutet eine Verminderung des verticalen Abstandes zwischen $A_1 A_2$ und C, d. h. also eine Senkung des Scheitels C um η.

Nimmt man an, daß der Bogen $A_1 C A_2$ gleichmäßig mit q pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet ist, so erhält man die Verschiebungen, wenn man zu den durch diese gleichförmig vertheilte Last nach (16) und (17) sich ergebenden Werthen

$$\eta = \frac{q}{TE}\left(\frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60}\right)$$

und

$$\xi = \frac{q}{TE}\left(\frac{3\,h\,l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42}\right)$$

diejenigen Beträge hinzufügt, welche durch die verticalen Stützreactionen $-\,q\,l$ in A_1 und A_2 erzeugt werden. Danach findet sich mit Bezug auf (12^a) und (13^a):

$$\eta = \frac{q}{TE}\left(\frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60}\right) - \frac{q\,l}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + n^2\,\frac{l^5}{15}\right)$$

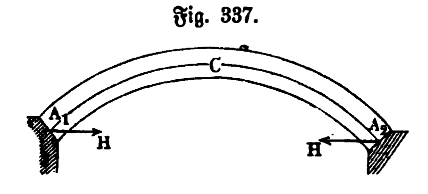
$$= -\,\frac{q}{TE}\left(\frac{5\,l^4}{24} + \frac{h^2 l^2}{20}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\xi = \frac{q}{TE}\left(\frac{3\,h\,l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42}\right) - \frac{q\,l}{TE}\,n\left(\frac{5\,l^4}{12} + n^2\,\frac{l^6}{10}\right)$$

$$= -\,\frac{q}{TE}\left(\frac{4\,h\,l^3}{15} + \frac{8\,h^3 l}{105}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Wenn nun aber vorausgesetzt wird, daß der Bogenträger sich mit seinen Fußpunkten A_1 und A_2 gegen unverschiebliche Widerlager, Fig. 337, stemmt, so hat man sich zu denken, daß von jedem dieser Widerlager außer der verticalen Reaction V noch ein horizontaler nach innen gerichteter Schub H auf den Bogenschenkel ausgeübt wird, welcher genau in solcher Größe auftritt, daß die durch denselben hervorgerufene horizontale Verschiebung gerade die oben durch (19) und (21) berechneten Verschiebungen ξ aufhebt, welche durch die Belastung $2K$ bezw. $2ql$ nach außen veranlaßt werden. Durch die Horizontalkraft H in A_1 wird nun eine horizontale Verschiebung des Endes A_1 erzeugt, welche sich aus (13^a) mit $V = 0$ zu

Fig. 337.



$$\xi = \frac{H}{TE}\left(\frac{8\,h^2 l}{15} + \frac{16\,h^4}{105\,l}\right) \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

bestimmt. Daher hat man, um die Größe des horizontalen Widerlagerdruckes H zu ermitteln, einfach den Werth (22) gleich demjenigen (19) oder (21) zu setzen, je nachdem der Bogen im Scheitel C durch $2\,K$ oder über der ganzen Länge gleichmäßig durch $2\,q\,l$ belastet ist. Diese Gleichsetzung liefert bei der Belastung des Scheitels aus (22) und (19) den gesuchten Horizontalschub:

$$H = -K \frac{\frac{5}{12}\,h l^2 + \frac{h^3}{10}}{\frac{8}{15}\,h^2 l + \frac{16}{105}\,\frac{h^4}{l}} = rot - K\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28\,l}\right), \quad . \; (23)$$

und bei gleichmäßig vertheilter Belastung aus (22) und (21):

$$H = -q \frac{\frac{4}{15}\,h l^3 + \frac{8}{105}\,h^3 l}{\frac{8}{15}\,h^2 l + \frac{16}{105}\,\frac{h^4}{l}} = -q\,\frac{l^2}{2h} \quad \ldots \quad (24)$$

Die Horizontalkraft H, welche in dem Falle einer Belastung des Scheitels durch $2\,K$ vermittelst der Gleichung (23) bestimmt ist, bringt für sich allein eine verticale Verschiebung hervor, die nach (12ᵃ) sich bestimmt zu:

$$\eta = \frac{K}{TE}\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28\,l}\right)\left(5\,\frac{h\,l^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right).$$

Addirt man daher diese Verticalverschiebung algebraisch zu der durch (18) gegebenen, welche durch die Belastung $2\,K$ des Scheitels und die verticalen Stützreactionen in A_1 und A_2 allein hervorgerufen werden, so erhält man die Senkung des Scheitels:

$$\eta = \frac{K}{TE}\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28\,l}\right)\left(5\,\frac{h\,l^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right) - \frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + \frac{h^2\,l}{15}\right)$$

$$= -\frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{128} + \frac{23\,h\,l^2}{6720}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

oder für die meisten Fälle genau genug zu:

$$\eta = -\frac{K}{TE}\,\frac{l^3}{128} \quad \ldots \ldots \quad (25^a)$$

Das negative Zeichen deutet auf eine Verringerung des verticalen Abstandes h zwischen dem Scheitel und den Kämpfern, d. h. auf eine Senkung des Scheitels. Vergleicht man diese Senkung mit derjenigen eines

geraden Balkens von der Länge $L = 2\,l$ und der Belastung $Q = 2\,K$ in der Mitte, für welchen die Durchbiegung nach §. 35 zu:

$$f = \frac{Q\,L^3}{48\,TE} = \frac{2\,K\,(2\,l)^3}{48\,TE} = \frac{K\,l^3}{3\,TE}$$

ist, so erkennt man, daß die Senkung des Bogenscheitels nur $\frac{3}{128}$ von der Durchbiegung des geraden Balkens beträgt.

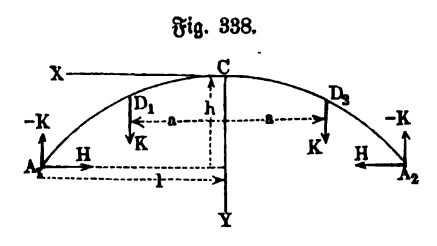
Wenn man in gleicher Art für einen durch die gleichmäßig vertheilte Last $2\,q\,l$ angegriffenen Bogenträger die durch den Horizontalschub $H = -\,q\,\frac{l^2}{2\,h}$ allein erzeugte verticale Verschiebung η des Fußpunktes nach (12ᵃ) bestimmt, so erhält man diese Größe zu:

$$\eta = \frac{q}{TE}\,\frac{l^2}{2h}\left(5\,\frac{h\,l^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right) = \frac{q}{TE}\left(\frac{5\,l^4}{24} + \frac{h^2\,l^2}{20}\right), \quad . \quad . \quad (26)$$

also gleich und entgegengesetzt derjenigen Verschiebung, welche durch die Belastung $2\,q\,l$ und die verticalen Stützreactionen nach (20) erzeugt werden, so daß man daraus schließt, daß in diesem Falle der Scheitel durch die Biegung gar keiner Senkung ausgesetzt ist. In diesem Falle ist überhaupt das Biegungsmoment in allen Punkten des Trägers gleich Null, indem in jedem Querschnitte die Mittelkraft der äußeren Kräfte in die Richtung der Tangente an die Parabel hineinfällt. Der Bogen verhält sich daher genau so wie die parabolische Gurtung eines Parabelträgers (§. 56), oder wie eine parabolische Kette mit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung. Für diese Belastungsart ist die parabolische Trägerform daher eine sogenannte Gleichgewichtscurve, und die ganze Formänderung des Bogens reducirt sich auf diejenige, die durch die Verkürzung entsteht, welcher der Bogen in Folge der Druckspannungen ausgesetzt ist.

Um auch die Wirkung einer einseitigen Belastung des Bogenträgers zu ermitteln, sei der Träger zunächst in zwei gleichweit um a vom Scheitel C abstehenden Punkten D_1 und D_2, Fig. 338, mit je K belastet. Für diesen Fall, in welchem die verticale Stützreaction in A_1 und A_2 jederseits $-\,K$ beträgt, bestimmt sich der horizontale Schub H in gleicher Weise wie vorstehend. Denkt man nämlich

Fig. 338.



wieder die eine Hälfte $C\,A_2$ des Trägers in eine feste Wand eingeschlossen, so hat man die horizontale Verschiebung, welche das Balkenende A_1 durch

die Belastung K in D_1 erleidet, gleich und entgegengesetzt derjenigen zu setzen, welche die Reactionen $-K$ und $-H$ in A_1 hervorbringen. Man findet diese von K veranlaßte Verschiebung von A_1 nach (15), wenn man die angenäherten Formeln (11^b) und (13^b) zu Grunde legt zu:

$$\xi = \xi_d + n(l^2 - a^2)\varphi_d = \frac{K}{TE} 5n \frac{a^4}{12} + n(l^2 - a^2)\frac{K}{TE}\frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{K}{TE} n \left(\frac{l^2 a^2}{2} - \frac{a^4}{12}\right), \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

während durch $-K$ und $-H$ in A_1 wirkend eine horizontale Verschiebung erzeugt wird, die aus (13^b), wenn l für a gesetzt wird, sich berechnet zu:

$$\xi = -\frac{K}{TE} 5n \frac{l^4}{12} + \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{l^5}{15} \quad \ldots \ldots (28)$$

Setzt man die Summe von (27) und (28) gleich Null, so folgt daraus der Horizontalschub:

$$H = \frac{15}{8n^2 l^5} K \left(\frac{5nl^4}{12} - \frac{nl^2a^2}{2} + \frac{na^4}{12}\right)$$

$$= \frac{5}{32nl} K \left(5 - 6\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4}\right), \quad \ldots \ldots (29)$$

Es ist nun leicht ersichtlich, daß zu diesem Horizontalschube jede der beiden in D_1 und D_2 angebrachten Belastungen K die Hälfte des Betrages liefert. Dies folgt daraus, daß die Belastung K in D_1 auf A_1 denselben Einfluß ausüben muß, wie die Belastung K in D_2 ihn auf A_2 äußert, und daraus, daß die Horizontalkräfte stets in beiden Widerlagern in gleicher Größe auftreten.

Wenn daher der Bogen nur in einem Punkte der einen Hälfte, etwa in D_1, durch die Last K angegriffen wird, so ist der Horizontalschub der Widerlager auch nur halb so groß, als (29) anzeigt, daher hat man für diesen Fall:

$$H = \frac{5}{64nl} K \left(5 - 6\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4}\right) \quad \ldots \ldots (30)$$

Selbstredend sind die verticalen Reactionen der beiden Widerlager für diesen Fall der einseitigen Belastung nun nicht mehr von gleicher Größe, sondern durch:

$$V_1 = K\frac{l + a}{2l} \text{ für } A_1 \ldots \ldots \ldots \ldots (31)$$

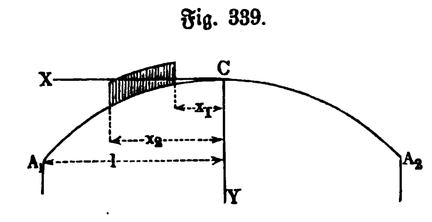
und

$$V_2 = K\frac{l - a}{2l} \text{ für } A_2 \ldots \ldots \ldots \ldots (32)$$

gegeben.

Wenn man in (30) für K im Abstande a von der Mitte die Belastung $q\,\partial x$ eines Elementes im Abstande x einführt, so hat man für H den durch dieses Element erzeugten Betrag ∂H zu setzen, und man erhält daher für einen Bogenträger, welcher nach Fig. 339 einerseits zwischen den Abscissen x_1 und x_2 gleichförmig mit $q\,(x_2 - x_1)$ belastet ist, durch Integration den Horizontalschub:

Fig. 339.



$$H = \int_{x_1}^{x_2} \frac{5}{64\,n\,l}\, q\,\partial x \left(5 - 6\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$= \frac{5}{64\,n\,l}\, q \left[5\,(x_2 - x_1) - 2\,\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^2} + \frac{1}{5}\,\frac{x_2^5 - x_1^5}{l^4}\right], \quad (30^a)$$

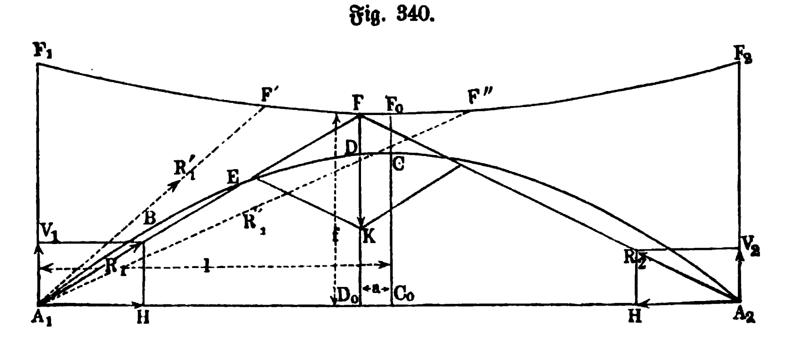
welcher Ausdruck für den Fall der Belastung einer ganzen Bogenhälfte, also mit $x_1 = 0$ und $x_2 = l$, entsprechend der Gleichung (24) in

$$H = \frac{5}{64\,n\,l}\, q \left(5\,l - 2\,l + \frac{1}{5}\,l\right) = q\,\frac{l^2}{4\,h}$$

übergeht.

Denkt man sich für den Bogenträger $A_1\,C\,A_2$, Fig. 340, welcher in D durch die Belastung K angegriffen wird, die Horizontalkraft H berechnet,

Fig. 340.



und diese in jedem Widerlager A_1 und A_2 mit der daselbst auftretenden verticalen Reaction V_1 und V_2 zu je einer Mittelkraft R_1 und R_2 vereinigt, so müssen diese beiden letzteren Auflagerreactionen R_1 und R_2 mit der Belastung K im Gleichgewichte sein, folglich ihre Richtungen sich in einem Punkte F der Richtung von K schneiden. Die Höhe $F D_0 = f$ dieses

Durchschnittspunktes über der Horizontalen $A_1 A_2$ durch die Widerlager ist leicht zu bestimmen, denn man hat nach der Figur:

$$\frac{V_1}{H} = \frac{F D_0}{A_1 D_0} = \frac{f}{l - a}$$

oder

$$V_1 (l - a) = f H,$$

d. h. mit Rücksicht auf (30) und (31):

$$K \frac{l^2 - a^2}{2 l} = f \frac{5}{64 n l} K \left(5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4}\right).$$

Hieraus folgt jene Höhe f, wenn $n = \frac{h}{l^2}$ eingeführt wird:

$$f = \frac{32}{5} h \frac{l^2 - a^2}{5 l^2 - 6 a^2 + \frac{a^4}{l^2}} = \frac{32}{5} \frac{h}{5 - \frac{a^2}{l^2}}, \quad \ldots \quad (33)$$

also unabhängig von der Größe der Belastung K, und nur abhängig von deren Lage (a) und von der Form des Parabelbogens.

Wenn man in dieser Gleichung nach und nach für $\frac{a}{l}$ alle Werthe von 0 für den Scheitel C bis 1 für die Kämpfer A_1 und A_2 einführt, so erhält man für die Höhen f des Schnittpunktes F über $A_1 A_2$ Werthe zwischen

$$f_0 = \frac{32}{25} h = 1{,}28\, h$$

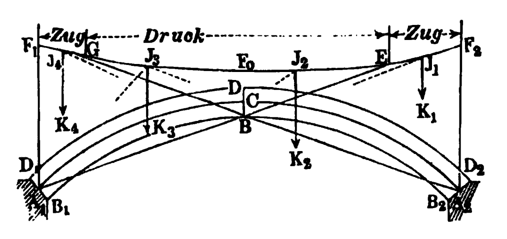
in C und

$$f_1 = \frac{32}{20} h = 1{,}6\, h$$

über den Kämpfern A_1 und A_2, und durch alle diese Ordinaten f wird eine Curve $F_1 F F_0 F_2$ festgelegt, in welcher der mehrerwähnte Schnittpunkt F der Stützreactionen R sich bewegt, wenn die Last K von A_1 nach A_2 fortschreitet. Wenn daher in irgend welchem Punkte wie D eine Last K wirkt, so ruft dieselbe in A_1 eine Reaction R_1 hervor, deren Richtung durch $A_1 F$ gegeben ist, und welche daher auf den Bogentheil $A_1 E$ ein Biegungsmoment in B äußert, das durch $R_1 b$ ausgedrückt ist, unter b den normalen Abstand des Punktes B von der Reactionsrichtung $A_1 F$ verstanden. Dieses Biegungsmoment fällt daher mit diesem Abstande b zu Null aus in dem Punkte E, in welchem die Bogenlinie von der Reactionsrichtung $A_1 F$ geschnitten wird. Hieraus folgt weiter, daß die Verticalebene durch F eine Scheide der Belastungen bildet, welche in E entgegengesetzte Biegungsmomente hervorrufen. Es ist nämlich ebenfalls aus der Figur zu ersehen, daß eine Versetzung der Last K nach F', links von FD, eine Reaction R_1' in A_1 erzeugt, welche das Trägerstück $A_1 E$ um E rechts herum zu drehen

strebt, während die Last in einem Punkte rechts von F, etwa in F'', eine im entgegengesetzten Sinne drehende Reaction in A_1 hervorruft. Diese Eigenschaft der Curve F kann daher dazu dienen, für irgend welchen Querschnitt des Bogenträgers den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln.

Fig. 341.



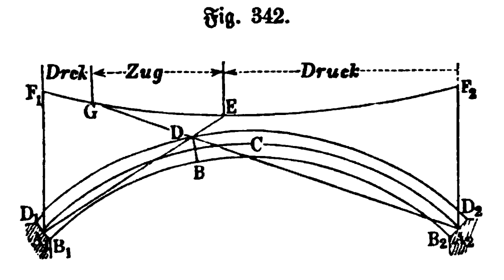
Es sei zu dem Ende wieder durch $A_1 C A_2$, Fig. 341, die Mittellinie eines Bogenträgers dargestellt, welcher etwa aus den beiden Gurtungen $B_1 B B_2$ und $D_1 D D_2$ mit zwischengesetzten Füllungsgliedern bestehen möge. Es sei ferner $F_1 F_0 F_2$ die gemäß der Gleichung (33) ermittelte Curve, welche den geometrischen Ort für die Schnittpunkte der beiderseitigen Stützreactionen R darstellt. Um für die obere Gurtung in irgend einem Querschnitte des Bogenträgers, z. B. BD, den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln, denkt man sich nach dem Früheren B als Momentenmittelpunkt angenommen. Legt man nun durch B die beiden nach A_1 und A_2 gerichteten Strahlen, welche die Curve F in E und G treffen, so ist leicht zu ersehen, daß die Verticalebenen durch diese Schnittpunkte Grenzscheiden für die Belastungen bilden, welche in der Obergurtung bei D entgegengesetzte Anstrengungen hervorrufen.

Irgend eine Belastung K_1 des Feldes zwischen E und A_2 äußert nämlich auf das Trägerstück $A_1 B D$ eine Reactionswirkung R_1 in der Richtung $A_1 J_1$, welche das Trägerstück $A_1 B$ um B linksherum zu drehen strebt, so daß dadurch in der oberen Gurtung bei D eine Zugspannung hervorgerufen wird. Eine Last K_2 dagegen zwischen B und E ruft die rechts um B drehende Reaction von der Richtung $A_1 J_2$ hervor, und erzeugt somit Druckspannung in D. Dasselbe gilt auch für eine zwischen B und G wirkende Last K_3, denn deren Einfluß auf das Trägerstück $A_1 BD$ stellt sich dar als die Mittelkraft aus der in der Richtung $A_1 J_3$ wirkenden Reaction R_1 und der Belastung K_3, und diese Mittelkraft ist nichts anderes, als der in der Richtung $J_3 A_2$ wirkende Auflagerdruck gegen die Stütze A_2. Da diese Kraft auch um B rechtsdrehend wirkt, so muß sie in D ebenfalls Druckspannung erzeugen. Endlich wird eine die Strecke zwischen G und A_1 angreifende Last K_4 eine Wirkung in der Richtung $J_4 A_2$ auf das Bogenstück $A_1 BD$ ausüben, folglich wegen der linksdrehenden Wirkung Zugspannung in D hervorrufen. Die obere Gurtung wird daher in D den äußersten Anstrengungen ausgesetzt sein, wenn die bewegliche Last ent-

weder nur die Strecke EG, oder nur die beiden Strecken $F_1 G$ und EF_2 bedeckt.

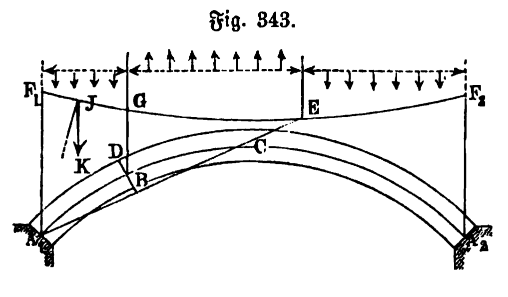
In gleicher Weise findet sich für die untere Gurtung in B, Fig. 342, die ungünstigste Belastung, wenn man den oberen Knotenpunkt D als Momentenmittelpunkt betrachtet, und von D nach A_1 und A_2 zieht. In der Figur ist durch die Bezeichnung Zug und Druck ersichtlich gemacht, welcher Art die Spannungen sind, die durch eine Belastung der betreffenden Abtheilung in B hervorgerufen werden. Es muß dabei bemerkt werden, daß die hier ins Auge gefaßten, durch die bewegliche Last K hervorgerufenen Zug- oder Druckspannungen zu denjenigen Spannungen hinzutreten, welche vermöge der constanten Belastung durch das Eigengewicht p hervorgerufen werden. Da diese letzteren Spannungen immer Druckspannungen sind, so erkennt man, daß die ungünstigste für die Dimensionen der Gurtungen maßgebende Belastungsart diejenige sein wird, bei welcher auch durch die bewegliche Last nur Druckspannung erzeugt wird, d. h. wenn die in den Figuren 341 und 342 mit Druck bezeichneten Abtheilungen allein belastet sind, also die innere, wenn es sich um die Obergurtung, und die beiden äußeren, wenn es sich um die Untergurtung handelt.

Fig. 342.



Die mehrerwähnte Curve F, welche den geometrischen Ort für die Durchschnittspunkte der Stützreactionen darstellt, kann auch dazu dienen, denjenigen Belastungszustand zu ermitteln, für welchen die tangentiale Abscheerungskraft in irgend einem Querschnitte ihren größten Werth erreicht, so daß hieraus auch die größten Anstrengungen der Füllungsglieder bestimmt werden können. Es sei nämlich BD, Fig. 343, wieder ein beliebiger Querschnitt des Bogens und $A_1 E$ senkrecht zu diesem Querschnitte gezogen, so ist nach dem Obigen klar, daß ein in der verticalen Ebene durch E wirkendes Gewicht in BD keine tangentiale Schubkraft erzeugen kann, da die hervorgerufene Reaction R_1

Fig. 343.

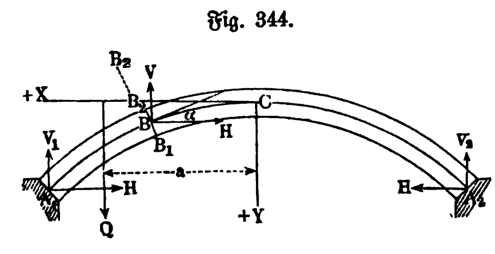


der Stütze A_1 normal zu der Querschnittsfläche BD gerichtet ist. Man erkennt daraus, daß jede rechts von E zwischen E und A_2 wirkende Belastung eine Schubkraft in DB erzeugt, welche bestrebt ist, das Bogenstück A_1BD nach innen oder unten zu verschieben, während eine Belastung zwischen E und der Verticalebene G durch die Mitte des Querschnittes eine Auflagerreaction R_1 erzeugt, welche das Stück A_1BD aufwärts zu verschieben trachtet. Eine Belastung der Strecke GA_1 dagegen muß wieder abwärts wirkende Schubkräfte hervorrufen, da der Einfluß einer solchen Belastung K auf A_1BD sich wieder als Mittelkraft aus K und der nach A_1J gerichteten Reaction R_1, d. h. als der nach JA_2 gerichtete Druck gegen die jenseitige Stütze A_2 bestimmt.

Den Horizontalschub H für diese ungünstigsten Belastungszustände hat man in jedem Falle nach der Gleichung (30^a) zu ermitteln.

Spannungen der Bögen. Hat man in der vorstehend angegebenen Art für einen bestimmten Belastungszustand eines Bogens die horizontale Schubkraft H, sowie die verticalen Auflagerreactionen V_1 und V_2 in A_1 und A_2, Fig. 344, ermittelt, so bestimmt sich für irgend einen Querschnitt durch den Punkt B die daselbst auftretende Spannung wie folgt. Auf diesen Querschnitt wirkt eine Horizontalkraft, welche für den Bogen an jeder Stelle den constanten Werth $-H$ der horizontalen Widerlagerreaction hat, und eine verticale Kraft V, welche sich aus der Differenz zwischen der aufwärts gerichteten Auflagerreaction $-V_1$ in A_1 und den zwischen A_1 und B wirkenden Belastungen Q, also zu §. 66.

Fig. 344.



$$V = Q - V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

bestimmt. Es sind hier wieder diese Kräfte positiv oder negativ angenommen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenaxen wirken. Bezeichnet nun α den Neigungswinkel der parabolischen Mittellinie des Bogens in B gegen den Horizont, so erhält man die nach dieser Tangente, d. h. normal zu dem Querschnitte B_1B_2 gerichtete Spannung zu

$$S = V \sin\alpha + H \cos\alpha = V\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{H\partial x}{\partial s}.$$

Für die Parabel hat man nun nach (7) und (8):

$$\partial y = 2nx\partial x \text{ und } \partial s = (1 + 2n^2x^2)\,\partial x,$$

so daß man hiermit

$$S = \frac{V2nx + H}{1 + 2n^2x^2}$$

oder annähernd

$$S = (V2nx + H)\,(1 - 2n^2x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

erhält.

Setzt man zunächst wieder voraus, der Bogenträger sei wie ein gerader Balken mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gesetzt, so daß $H = 0$ ist, so findet man bei einer Belastung des Scheitels C durch $2K$, also mit $V = -K$, die Spannung

$$S = -K\,2nx\,(1 - 2n^2x^2).$$

Die Spannung ist daher in diesem Falle im Scheitel gleich Null und wächst mit x, so daß sie an den Enden für $x = l$ den größten Werth

$$S_{max} = -K2nl\,(1 - 2n^2l^2) = -2K\frac{h}{l}\left(1 - 2\frac{h^2}{l^2}\right)$$

annimmt.

Wäre unter derselben Voraussetzung verschieblicher Auflager der Träger gleichmäßig mit q pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet, so wäre $V = -qx$, und daher die Spannung

$$S = -2qnx^2\,(1 - 2n^2x^2),$$

oder angenähert

$$S = -2qnx^2,$$

da man den Werth $2n^2x^2 = 2\frac{h^2x^2}{l^4}$ als klein gegen 1 vernachlässigen kann. Auch hierfür ist die Spannung im Scheitel gleich Null, und sie erreicht ihren größten Werth an den Enden zu

$$S_{max} = -2qnl^2 = -2qh.$$

Nimmt man dagegen an, daß der Bogen sich in A_1 und A_2 gegen feste Widerlager stemme, so hat man bei einer Belastung des Scheitels durch $2K$ die Verticalkraft $V = -K$ und nach (23) die Horizontalkraft

$$H = -K\left(\frac{25}{32}\frac{l}{h} - \frac{h}{28l}\right),$$

womit man aus (35)

$$S = \left[-K2nx - K\left(\frac{25}{32}\frac{l}{h} - \frac{h}{28l}\right)\right](1 - 2n^2x^2)$$

erhält.

Dies schreibt sich, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von n:

$$S = K\left(-2nx - \frac{25\,l}{32\,h} + \frac{h}{28\,l} + \frac{25}{16}\,\frac{l n^2}{h}\,x^2\right)$$

$$= K\left(\frac{25}{16}\,\frac{h}{l^3}\,x^2 - 2\,\frac{h}{l^2}\,x - \frac{25\,l}{32\,h} + \frac{h}{28\,l}\right) \quad . \; . \; . \quad (36)$$

Dieser Ausdruck wird mit:

$$\frac{25}{16}\,\frac{h}{l^3}\,2x = 2\,\frac{h}{l^2}, \text{ d. h. mit } x = \frac{16}{25}\,l = 0{,}64\,l$$

ein Maximum von dem Betrage:

$$S_{max} = -\,K\left(\frac{25\,l}{32\,h} + \frac{423\,h}{700\,l}\right).$$

Wenn dieser Bogen gleichmäßig belastet ist, so hat man:

$$V = -\,q\,x,$$

und nach (24):

$$H = -\,q\,\frac{l^2}{2\,h},$$

so daß man hiermit die Druckkraft:

$$S = \left(-q x . 2 n x - q\,\frac{l^2}{2\,h}\right)(1 - 2\,n^2 x^2) = -\,q\left(\frac{h}{l^2}\,x^2 + \frac{l^2}{2\,h}\right) \quad (37)$$

erhält, und wenn dieser Bogen noch außerdem das Gewicht $2K$ im Scheitel trägt, ist:

$$S = K\left(\frac{25}{16}\,\frac{h}{l^3}\,x^2 - 2\,\frac{h}{l^2}\,x - \frac{25}{32}\,\frac{l}{h} + \frac{h}{28\,l}\right) - q\left(\frac{h}{l^2}\,x^2 + \frac{l^2}{2\,h}\right) \quad . \quad (38)$$

Durch Differentiation erhält man hieraus denjenigen Werth von x, für welchen S zu einem Maximum wird, aus:

$$K\left(\frac{25}{8}\,\frac{h}{l^3}\,x - 2\,\frac{h}{l^2}\right) - 2\,q\,\frac{h}{l^2}\,x = 0$$

zu

$$x = \frac{16\,K}{25\,K - 16\,q\,l}\,l.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich nur, so lange er Werthe liefert, welche kleiner als l sind; wenn dagegen $x > l$, d. h. wenn $16\,K > 25\,K - 16\,q\,l$ ist, oder für $K \leqq \frac{16}{9}\,q\,l$ stellt sich die größte Druckkraft S an den Enden A_1 und A_2 ein.

Die Druckkraft S erzeugt in dem Querschnitte F des Bogens eine specifische Druckspannung von der Größe:

$$s_d = \frac{S}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Außerdem wird aber der Bogen noch durch ein gewisses Moment M der äußeren Kräfte auf Biegung beansprucht, wodurch beiderseits in den von der neutralen Axe entferntesten Fasern die Biegungsspannung:

$$s_b = M \frac{e}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

hervorgerufen wird, wenn wie bisher T das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die durch dessen Schwerpunkt gehende horizontale Axe und e den Abstand dieser letzteren von der äußersten Faserschicht bedeutet. Das Moment M der äußeren Kräfte erhält man in dem vorausgesetzten Belastungszustande des Bogens, Fig. 344, dann zu:

$$M = - V_1 (l - x) + H (h - y) + Q (a - x),$$

worin man für V_1 und H die verticale und horizontale Auflagerreaction einzuführen hat, welche dem zu Grunde gelegten Belastungszustande gemäß nach dem Vorstehenden zu ermitteln sind. Wenn man daher mit s die höchstens zulässige specifische Faserspannung des Materials pro Quadrateinheit bezeichnet, so gilt für die Bestimmung der Querschnittsdimensionen die Bedingung:

$$s = s_d \pm s_b = \frac{S}{F} \pm \frac{Me}{T} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Setzt man z. B. eine Belastung des Scheitels durch $2K$ voraus, so hat man:

$$V_1 = - K, H = - K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28 l}\right)$$

nach (23), und

$$S = K \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28 l}\right)$$

nach (36), folglich die Spannungen in den äußersten Fasern:

$$s = \frac{K}{F} \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28 l}\right)$$
$$\pm \frac{Ke}{T} \left[(l - x) - \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28 l}\right)(h - y)\right] \quad . \; . \quad (42)$$

Hieraus folgt für den Bogenscheitel mit $x = y = 0$:

$$s_c = - \frac{K}{F} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28 l}\right) \pm \frac{Ke}{T} \left(\frac{7}{32} l + \frac{h^2}{28 l}\right) \quad . \quad (42^a)$$

während für die Enden A_1 und A_2 mit $x = l$; $y = h$ die Spannung in allen Punkten zu:

$$s_a = \frac{S}{F} = - \frac{K}{F} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{45}{112} \frac{h}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (42^b)$$

sich ergiebt.

Um für diesen Fall die schwächste Stelle, für welche s ein Maximum wird, zu erhalten, findet man aus (42) durch $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$:

$$\frac{K}{F}\left(\frac{25}{8}\frac{h}{l^3}x - 2\frac{h}{l^2}\right) + \frac{Ke}{T}\left[-1 + \left(\frac{25}{32}\frac{l}{h} - \frac{h}{28l}\right)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0,$$

oder mit $\frac{\partial y}{\partial x} = 2nx = 2\frac{h}{l^2}x$, wenn man mit $\frac{TFl^2}{K}$ multiplicirt:

$$T\frac{25}{8}\frac{h}{l}x - T2h - Fel^2 + Fe\left(\frac{25}{16}l - \frac{h^2}{14l}\right)x = 0,$$

woraus

$$x = \frac{T2h + Fel^2}{\frac{25}{8}T\frac{h}{l} + Fe\left(\frac{25}{16}l - \frac{h^2}{14l}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

folgt. Wenn man hierin das Glied $\frac{h^2}{14l}$ vernachlässigt, so folgt annähernd

$$x = \frac{16}{25}l,$$

und durch Einführung dieses Werthes und

$$y = \frac{h}{l^2}x^2 = \frac{256}{625}h$$

in (42) erhält man daher die größte Spannung:

$$s_{max} = -\frac{K}{F}\left(\frac{25}{32}\frac{l}{h} + \frac{423}{700}\frac{h}{l}\right) + \frac{Ke}{T}\left[\frac{9}{25}l - \left(\frac{25}{32}\frac{l}{h} - \frac{h}{28l}\right)\frac{369}{625}h\right]$$

$$= -\frac{K}{F}\left(\frac{25}{32}\frac{l}{h} + \frac{423}{700}\frac{h}{l}\right) - \frac{Ke}{T}\left(\frac{81}{800}l - \frac{369}{17500}\frac{h^2}{l}\right) \quad . \quad . \quad (44)$$

Wenn die Last $2lq$ gleichmäßig über den Bogen vertheilt ist, so hat man, wie oben gefunden, das Moment M und also auch die Biegungsspannung für jeden Querschnitt gleich Null; die ganze Spannung ist also die aus S sich ergebende nach (37) durch:

$$s = \frac{S}{F} = -\frac{q}{F}\left(\frac{h}{l^2}x^2 + \frac{l^2}{2h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

bestimmt.

Durch die Druckkraft S wird auch eine Zusammendrückung des Bogenträgers in tangentialer Richtung, also eine Verkürzung der Bogenlänge, und in Folge davon eine Senkung des Scheitels herbeigeführt, welche sich folgenderart bestimmt. Bezeichnet man mit σ die Verkürzung eines Bogenstückes zwischen dem Scheitel und einem Punkte mit der Abscisse x, ist also

unter $\partial\sigma$ die Verkürzung des Bogenelementes ∂s verstanden, so hat man nach den für die rückwirkende Elasticität geltenden Regeln:

$$\partial\sigma = \frac{S}{FE}\,\partial s = \frac{S}{FE}\,(1 + 2n^2x^2)\,\partial x,$$

wenn E den Elasticitätsmodul des Bogenmaterials bedeutet. Man erhält daher die Verkürzung σ für das Stück zwischen den Abscissen 0 und x zu:

$$\sigma = \int\limits_0^x \frac{S}{FE}\,(1 + 2n^2x^2)\,\partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Für einen in der Mitte mit $2K$ belasteten Bogen hat man daher nach (36), wenn wiederum der Querschnitt F überall von gleicher Größe vorausgesetzt wird:

$$\sigma = \frac{K}{FE}\int\limits_0^x \left(\frac{25}{16}\frac{h}{l^3}x^2 - 2\frac{h}{l^2}x - \frac{25}{32}\frac{l}{h} + \frac{h}{28l}\right)\left(1 + 2\frac{h^2}{l^4}x^2\right)\partial x$$

$$= \frac{K}{FE}\left(-\frac{h}{l^2}x^2 - \frac{25}{32}\frac{l}{h}x + \frac{h}{28l}x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

und für die Bogenhälfte mit $x = l$:

$$\sigma = -\frac{K}{FE}\left(\frac{27}{28}h + \frac{25}{32}\frac{l^2}{h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47^a)$$

Wenn dagegen der Bogen gleichmäßig mit $2lq$ belastet ist, so erhält man mit $S = -q\left(\frac{h}{l^2}x^2 + \frac{l^2}{2h}\right)$ nach (37):

$$\sigma = -\frac{q}{FE}\int\limits_0^x \left(\frac{h}{l^2}x^2 + \frac{l^2}{2h}\right)\left(1 + 2\frac{h^2}{l^4}x^2\right)\partial x$$

$$= -\frac{q}{FE}\left(\frac{2}{3}\frac{h}{l^2}x^3 + \frac{l^2}{2h}x + \frac{2}{5}\frac{h^3}{l^6}x^5\right) \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

und für die Bogenhälfte:

$$\sigma = -\frac{q}{FE}\left(\frac{2}{3}hl + \frac{l^3}{2h} + \frac{2}{5}\frac{h^3}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48^a)$$

Wenn der Bogen beiden Belastungen $2K$ und $2ql$ ausgesetzt ist, so bestimmt sich die Verkürzung einer Bogenhälfte durch die Summe von (47^a) und (48^a).

Aus der Verkürzung einer Bogenhälfte läßt sich auch die Senkung η des Scheitels bestimmen. Man findet nämlich die Bogenlänge s der Parabel durch Integration von (8) zu:

$$s = x + \frac{2}{3} n^2 x^3 = x + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^4} x^3$$

und für die Bogenhälfte mit $x = l$:

$$s = l + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiiren nach h:

$$\partial s = \frac{4}{3} \frac{h}{l} \partial h \text{ oder } \partial h = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \partial s.$$

Setzt man daher für ∂s die Verkürzung σ ein, so giebt ∂h die Veränderung von h, d. h. die Senkung des Scheitels:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma.$$

Beispielsweise würde für gleichzeitige Belastung des Bogens mit $2K$ im Scheitel und mit $2lq$ in gleichmäßiger Vertheilung die Senkung des Scheitels nach (47^a) und (48^a) annähernd zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l^3}{h^2 FE} \left(\frac{25}{32} K + \frac{q\,l}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

folgen.

Nach den vorstehenden Ermittelungen ist es nunmehr auch leicht, den Einfluß von Temperaturänderungen auf die Spannungsverhältnisse der Bogenträger zu ermitteln. Denkt man sich nämlich zunächst den Bogenträger mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gestellt, so wird die mit der Zunahme der Temperatur verbundene Verlängerung des Trägers eine Vergrößerung der horizontalen Entfernung der Enden A_1 und A_2 und somit eine Verschiebung der letzteren nach außen im Gefolge haben. Gesetzt diese Verschiebung betrage für jedes Ende den Werth τl, unter τ die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Aenderung der Längeneinheit verstanden, so kann man sich die Wirkung der festen Widerlager derartig denken, daß dieselben Horizontalkräfte H auf die Trägerenden ausüben, von genügender Größe, um die Verschiebung wieder aufzuheben. Man erhält daher den hierzu erforderlichen Horizontalschub aus (13^b), wenn man darin $V = 0$ setzt und l für a einführt, durch:

$$\xi = \tau l = -\frac{H}{TE} \frac{8}{15} h^2 l.$$

Der hieraus folgende Horizontaldruck:

$$H = \frac{15}{8} \frac{\tau TE}{h^2}$$

erzeugt im Querschnitte durch den Scheitel eine Druckspannung:

$$s_d = \frac{H}{F}$$

und eine Biegungsspannung:

$$s_b = \frac{Me}{T} = \frac{Hhe}{T},$$

so daß die durch die Temperaturzunahme erzeugte Spannung im Scheitel den größten Werth:

$$s_t = \frac{H}{F} + \frac{Hhe}{T} = \frac{15}{8}\frac{\tau E}{h^2}\left(\frac{T}{F} + he\right) \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

annimmt.

Hierin kann man den Ausdehnungscoefficienten für Eisen zu 0,000012 für 1° C. annehmen, so daß $\tau = 0{,}000012\,t$ zu setzen ist, wenn t die Temperaturveränderung in Graden C. bedeutet. Um diese durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung muß die durch die Belastung erzeugte geringer sein, als die höchstens zulässige, und hierdurch wird der Vortheil einer günstigen Materialverwendung großentheils wieder aufgehoben, welcher sonst mit dem elastischen Bogenträger verbunden ist.

Beispiel. Ein gußeiserner Bogenträger von 5 m Spannweite und 1 m Pfeilhöhe der parabolischen Mittellinie hat in seinem Scheitel ein Gewicht von 5000 kg zu tragen. Wie groß hat man die Breite b des rechteckigen Querschnitts im Scheitel anzunehmen, wenn die Höhe daselbst 0,3 m gewählt wird, unter der Bedingung, daß mit Berücksichtigung einer Temperaturschwankung von 30° C. die größte Faserspannung den Betrag von $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nicht übersteige?

Hier ist, unter $a = 300$ mm die Höhe und unter b die gesuchte Breite des Querschnitts im Scheitel verstanden:

$$F = b \,.\, 300 \text{ und } T = \frac{b}{12}\, 300^3,$$

daher

$$\frac{T}{F} = \frac{300^2}{12} \text{ und } e = \frac{a}{2} = 150,$$

daher erhält man nach (50) die durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung, wenn der Elasticitätsmodul $E = 10\,000$ gesetzt wird:

$$s_t = \frac{15}{8}\,\frac{0{,}000012 \,.\, 30 \,.\, 10\,000}{1000 \,.\, 1000}\left(\frac{300 \,.\, 300}{12} + \frac{300 \,.\, 1000}{2}\right)$$

$$= \frac{0{,}054}{8}\left(\frac{90}{12} + \frac{300}{2}\right) = 0{,}054 \,.\, 19{,}7 = 1{,}06 \text{ kg}.$$

Die durch die Belastung erzeugte Spannung darf daher nicht mehr als $6 - 1{,}06 = 4{,}94$ kg betragen. Für den Scheitel erhält man nun aus (42a) durch Einführung von $K = 2500$, $l = 2{,}5$ m und $h = 1$ m die größte Spannung:

$$s_0 = -\frac{2500}{b.300}\left(\frac{25}{32}\,\frac{2,5}{1} - \frac{1}{28.2,5}\right) - \frac{2500.150}{\frac{1}{12}\,b\,300^3}\left(\frac{7}{32}\,2500 + \frac{1000.1000}{28.2500}\right)$$

$$= -\frac{16,15}{b} - \frac{93,53}{b} = -\frac{109,68}{b}.$$

Daher folgt:

$$b = \frac{109,68}{4,94} = 22,2\,\text{mm}.$$

Wenn der Bogen außerdem noch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection verbreitete Last von $q = 500$ kg pro Meter Länge zu tragen hätte, so würde dadurch im Scheitel nach (45) noch eine Spannung:

$$s = -\frac{500}{b.300}\,\frac{2,5.2,5}{2.1} = -\frac{5,21}{b}$$

eintreten, so daß man für diesen Fall die erforderliche Breite aus:

$$b = \frac{16,15 + 93,53 + 5,21}{4,94} = \frac{114,89}{4,94} = 23,2\,\text{mm}$$

erhalten würde.

Die Senkung des Scheitels durch die Compression des Materials berechnet sich in diesem letzteren Falle nach (49) zu:

$$\eta_1 = \frac{3}{4}\,\frac{2,5^3}{1000^2}\,\frac{1000^3}{23,2.300.10\,000}\left(\frac{25}{32}\,2500 + 500.2,5\right)$$

$$= \frac{15,63.32,03}{928} = 0,54\,\text{mm},$$

während die durch die Biegung sich nach (25a) zu:

$$\eta_2 = \frac{2500}{\frac{1}{12}\,23,2\,.\,300^3\,10\,000}\,\frac{2,5^3\,1000^3}{128} = \frac{3906}{6682} = 0,59\,\text{mm},$$

also die gesammte Senkung zu:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 1,13\,\text{mm}$$

berechnet.

Anmerkung. Für einen geraden Balken von gleicher Spannweite und Belastung hätte man für die Mitte das Biegungsmoment durch:

$$M = 5000\,\frac{5}{4} + 500\,\frac{5^2}{8} = 7812,5\,\text{mkg},$$

folglich erhielte man bei gleicher Höhe des Trägers die erforderliche Breite b aus:

$$M = s\,\frac{T}{e} = 6\,\frac{b\,h^2}{6} = b\,h^2$$

zu

$$b = \frac{7812,5.1000}{300.300} = 86,7\,\text{mm}.$$

Dieses Resultat zeigt die günstigere Verwendung des Materials bei dem Bogenträger im Vergleich zu dem geraden Balken, welche auch dann noch stattfindet, wenn man bei dem letzteren einen vortheilhafteren Querschnitt als den rectangulären wählen wird.

§. 67. **Bogenträger aus Holz und Gusseisen.** Bei gleichem Querprofile und gleichem Tragmodul, sowie unter übrigens gleichen Verhältnissen, besitzen, dem Vorstehenden zufolge, die Träger mit bogenförmiger Axe, die sogenannten Bogenträger, eine größere Tragkraft als die Balkenträger, deren Längenaxe eine gerade ist. Da nun die Bogenträger aus Gußeisen direct beim Gusse die Bogenform erhalten, so kann der Tragmodul bogenförmiger Balken von dem der geraden Balken nicht sehr verschieden sein, und deshalb ist denn auch bei gußeisernen Trägern die Anwendung der Bogenform von besonderem Vortheil. Anders ist es aber bei Trägern aus Holz oder Schmiedeeisen. Da das Holz und in einem gewissen Grade auch das Eisenblech durch das Biegen bei seiner Verwendung zu Bogenträgern an Tragkraft verliert, so ist der Tragmodul eines Trägers aus gebogenem Holze oder Eisenblech kleiner als der eines geraden Trägers oder Balkens und daher bei diesen Stoffen die Bogenform mit Vorsicht und namentlich immer nur von mäßiger Krümmung anzuwenden. Ist r der Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens und e der größte Abstand seiner Fasern von der neutralen Axe, so hat man die specifische Ausdehnung oder Zusammendrückung dieser Fasern (s. Bd. I):

$$\sigma = \frac{e}{r},$$

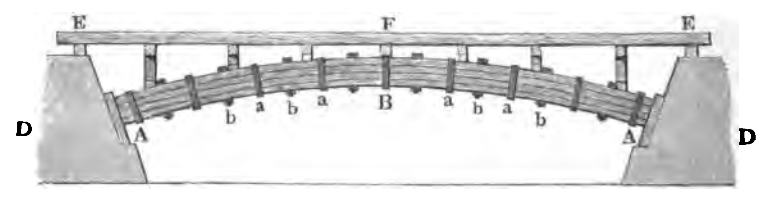
und daher die entsprechende Spannung:

$$s = \sigma E = \frac{e}{r} E,$$

wo E den Elasticitätsmodul bezeichnet.

Da hiernach die Spannung des gebogenen Balkens direct wie die Dicke oder Höhe ($2e$) und umgekehrt wie der Halbmesser r der Krümmung desselben wächst, so setzt man ihn mit Vortheil aus dünnen brettförmigen Stücken (Bohlen) zusammen, indem man dieselben mit ihren breiten Flächen über einander legt, zusammenschraubt u. s. w. Einen solchen Bohlenbogen ABA, welcher aus vier über einander liegenden Bohlen besteht, führt Fig. 345 vor Augen. Dieser Bogen trägt einen Balken EFE und stützt

Fig. 345.



sich gegen die Widerlager DD. Die Bohlen, aus welchen derselbe besteht, werden durch Bänder $a, a \ldots$ und Schrauben $b, b \ldots$ zusammengehalten.

Die Balkenbögen werden aus ganzen Balken in ähnlicher Weise zusammengesetzt; übrigens verbindet man auch die über einander liegenden Balken noch durch Verzahnung oder durch eingesetzte Dübel, wie gerade Balken, noch fester mit einander. Zum Biegen der Balken und Bohlen zu Tragbögen ist Lärchen-, Kiefern-, Tannen- und Eichenholz, und zwar im grünen Zustande, zu verwenden. Man biegt diese Holzstücken von der Mitte aus nach den Enden zu auf einem besonderen Gerüste, und läßt sie auf diesem mindestens zwei Monate lang im gespannten Zustande liegen. Bei diesem Biegen des frischen Holzes wird natürlich die Elasticitätsgrenze bedeutend überschritten, und es ist daher zu erwarten, daß der Festigkeitsmodul des trockenen Balkens, welcher eine bleibende Bogenform angenommen hat, kleiner ist als derjenige, welchen er ohne Biegung haben würde. Ardant findet ihn kaum ein Viertel von dem eines einfachen geraden Balkens. Nach Thl. I wäre z. B. für Holz im Mittel die relative Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze:

$$\sigma = \frac{e}{r} = \frac{1}{600},$$

und daher der entsprechende Krümmungshalbmesser:

$$r = 600\,e,$$

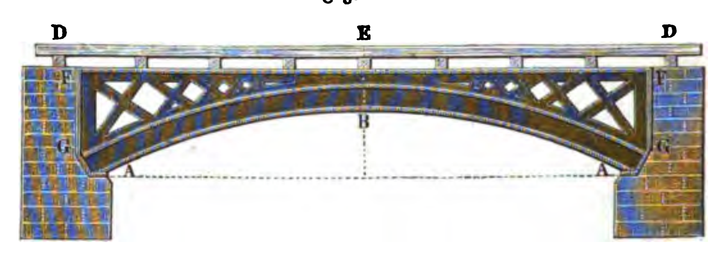
z. B. für $e = 0{,}15$ m, $r = 90$ m, daher bei einer Spannweite $2l = 16$ m die zulässige Pfeilhöhe nur $h = \frac{l^2}{2r} = \frac{64}{180} = 0{,}355$ m, und folglich das Verhältniß $\frac{h}{2l} = \frac{1}{45}$. Erfahrungsmäßig kann man nach Wiebeking (s. dessen allgemeine Wasserbaukunst Bd. III) Balken von Tannenholz um $\frac{h}{2l} = \frac{1}{25}$, und solche von Eichenholz um $\frac{h}{2l} = \frac{1}{40}$ biegen; die viel schwächeren Bohlen von vielleicht nur zwei Zoll Stärke lassen sich natürlich in einem viel stärkeren Verhältnisse krümmen, z. B. um $\frac{h}{2l} = \frac{1}{10}$. Die einzelnen Balken und Bohlen haben eine Länge von höchstens 16 m; bei größeren Spannweiten muß man folglich mehrere Balken oder Bohlen der Länge nach an einander anstoßen (schiften).

Bei einer anderen Construction von Bohlenbögen werden die Bohlen nicht über, sondern neben einander gelegt, weshalb dieselben auch nicht krumm gebogen, sondern nur krumm geschnitten werden. Hierbei geht jedoch viel Holz verloren; auch erfordert diese Construction eine sehr solide Verbindung der Bohlen oder Felgen unter einander.

Schmiedeeiserne Tragbögen lassen sich natürlich mit Vortheil aus Eisenblech ausschneiden und zusammennieten.

Die Art und Weise, wie ein gußeiserner Bogen als Träger dient, ist aus Fig. 346 zu ersehen. Der eigentliche Bogen ABA ist außen und innen durch eine breite Rippe verstärkt und zur Unterstützung des Balkens DED dient eine breite Tragwand FF, welche den ganzen Bogen oben

Fig. 346.



horizontal begrenzt. Das Ganze stützt sich mittelst starker Flanschen an die Widerlagsmauern G, G. Wenn man diese Bögen aus mehreren Theilen zusammensetzt, so läßt man die einzelnen Stücke in Flanschen an einander anstoßen und verbindet dieselben mit einander durch Schraubenbolzen.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen abgehandelte Theorie der Tragkraft von krummen Balken oder Bögen ist von Ardant (s. dessen am Ende des Capitels angeführte Schrift) durch Versuche an verschiedenen Holzbögen erprobt worden. Was z. B. den Horizontalschub anlangt, so ergab sich für den Fall, daß die Last $2K$ in der Mitte des Bogens hängt, der Horizontalschub nach (23) zu:

$$H = K\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28l}\right),$$

und für den Fall, daß dieselbe längs der Sehne des Bogens gleichmäßig vertheilt ist, dieser Schub nach (24) zu:

$$H_1 = q\,\frac{l^2}{2h} = q2l\,\frac{l}{4h} = \frac{Ql}{4h}.$$

Obgleich diese Formeln nur unter der Voraussetzung gefunden worden sind, daß die Träger nach der Parabel gebogen sind, so stimmen doch dieselben mit den Ergebnissen der Versuche an nach dem Kreise gebogenen Trägern ziemlich überein. So findet z. B. Ardant für einen Halbkreisbogen, im ersten Falle:

$$H = 0{,}32\,.\,2K = 0{,}64\,K,$$

und im zweiten Falle:

$$H_1 = 0{,}22\,.\,2ql = 0{,}22\;Q,$$

während die Formeln, wenn man darin $l = h$ setzt, auf:

$$H = 0{,}745\,K \text{ und } H_1 = 0{,}25\;Q$$

führen.

Bei den häufiger angewendeten gedrückten Bögen ist, wie zu erwarten war, die Uebereinstimmung zum Theil noch größer.

Für die gleichförmig vertheilte Belastung mit $Q = 2lq$ ist, wenn das Verhältniß der halben Spannweite l zur Spannhöhe h:

$\frac{l}{h} =$	2	3	4	5	10	beträgt,
nach Ardant: $H =$	$0{,}54\,Q$	$0{,}775\,Q$	$1{,}02\,Q$	$1{,}33\,Q$	$3{,}33\,Q$,	

und dagegen nach der Formel $H = \frac{Q l}{4 h}$:

$H =$	$0{,}50\,Q$	$0{,}75\,Q$	$1{,}00\,Q$	$1{,}250\,Q$	$2{,}500\,Q$.

Was die Senkung des Scheitels betrifft, welche eine längs der Sehne gleichmäßig vertheilte Last hervorbringt, so kann dieselbe natürlich bei der Kreisform des Trägers nicht Null sein. Ardant findet dieselbe für einen Halbkreisbogen:

$$\eta = 0{,}007\,\frac{Q\,l^3}{T E} = 0{,}084\,\frac{Q\,l^3}{b a^3 E},$$

wenn b und a die Querschnittsdimensionen des Bogens bezeichnen.

Bei einer längs der Sehne gleichmäßigen Belastung hat der Parabelbogen nur durch seine Druckfestigkeit zu widerstehen, und es folgt der entsprechende Querschnitt dieses Tragbogens aus (45), wenn man darin $x = l$ und $2ql = Q$ setzt:

$$F = \frac{q}{s}\left(h + \frac{l^2}{2h}\right) = \frac{Q}{2s}\left(\frac{h}{l} + \frac{l}{2h}\right).$$

Ein kreisbogenförmiger Träger muß dagegen auch durch seine Biegungsfestigkeit widerstehen, und es findet Ardant für denselben, wenn dessen Halbmesser durch r bezeichnet wird:

$$F = a b = \left(\mu + \frac{\nu r}{4a}\right)\frac{Q}{2s},$$

wobei für

$\frac{l}{h} =$	2	3	4	5	10	15	20
$\mu =$	1,080	1,550	2,040	2,660	6,660	7,630	9,520
und $\nu =$	0,792	0,263	0,117	0,053	0,034	0,022	0,001

zu setzen ist. Nach Ardant wäre für Tragbögen aus Holz

der Tragmodul s nur $= 0,3$ kg,

und für solche aus Gußeisen

der Tragmodul $s = 5$ kg

zu setzen.

Beispiel. Eine Brücke soll aus mehreren Brückenfeldern von je 17 500 kg Belastung und 24 m Spannweite bestehen, und die Unterstützung dieser Last soll durch sieben Bögen von 4 m Höhe erfolgen, welche Querschnittsdimensionen hat man diesen Bögen zu geben?

Es ist hier $Q = \frac{175000}{7} = 25000$ kg; $h = 4$ m und $l = 12$ m. Bei einer parabolischen Form der Bögen wäre der Querschnitt:

$$F = ab = \left(\frac{4}{12} + \frac{12}{8}\right)\frac{25000}{2.s} = 0,917\,\frac{Q}{s},$$

und dagegen bei der Kreisform, da hier der Halbmesser r aus $r^2 = l^2 + (r - h)^2$ zu $r = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{h} + h\right) = 20$ m, sowie $\mu = 1,550$ und $\nu = 0,263$ ist:

$$F = ab = \left(1,550 + 0,263\,\frac{20.1000}{4a}\right)\frac{Q}{2s} = \left(0,775 + \frac{657}{a}\right)\frac{Q}{s}.$$

Für hölzerne Bögen ist $s = 0,3$ kg, daher $\frac{Q}{s} = 83333$, folglich im ersten Falle, d. h. bei der parabolischen Form:

$$ab = 0,917\,.\,83333 = 76417 \text{ qmm},$$

woraus, wenn man $b = \frac{2}{3}a$ nimmt, die Höhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot 76417} = \sqrt{114626} = 339 \text{ mm und } b = 226 \text{ mm}$$

folgt.

Im zweiten Falle bei der Kreisform dagegen ist:

$$ab = \frac{25000}{0,3}\left(0,755 + \frac{657}{a}\right),$$

oder, wenn wieder $b = \frac{2}{3}a$ gesetzt wird:

$$a^3 = \frac{3}{2}\,\frac{25000}{0,3}\,(0,775\,a + 657) = 125000\,(0,775\,a + 657),$$

woraus

$$a = 50\,\sqrt[3]{0,775\,a + 657} = 50\,.\,10,25 = 512 \text{ mm und } b = 341 \text{ mm}$$

folgt.

Will man im letzteren Falle zur Vermeidung der bedeutenden Holzstärken den Bogen aus Gußeisen construiren und setzt etwa $b = \frac{1}{8}a$ voraus, so erhält man ebenso mit $s = 5$ kg aus:

$$ab = \frac{1}{8}a^2 = \frac{25000}{5}\left(0,775 + \frac{657}{a}\right)$$

die Höhe

$$a = \sqrt[3]{40\,000}\;\sqrt[3]{0{,}775\,a + 657} = 332\,\text{mm}$$

und

$$b = 41{,}5\,\text{mm}.$$

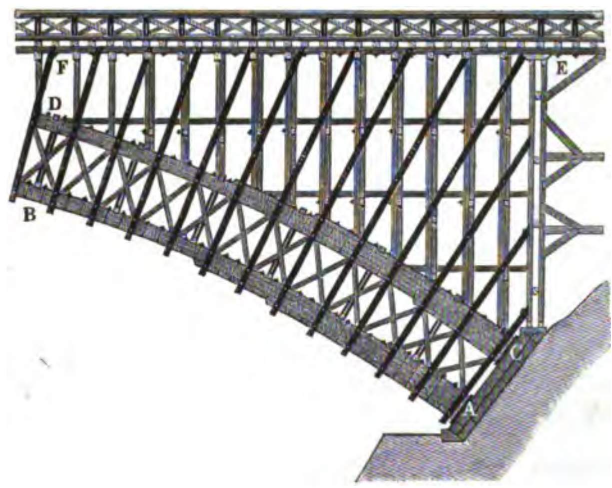
Der Horizontalschub jedes Bogens ist nach der vorstehenden Tabelle für $\frac{l}{h} = 3$ bei dem Kreisbogen:

$$H = 0{,}775\,.\,25\,000 = 19\,375\,\text{kg},$$

also für alle sieben Bögen 135 625 kg, während der Verticaldruck jedes Auflagers 87 500 kg beträgt. Hiernach ist die zur Herstellung der genügenden Stabilität erforderliche Stärke der Pfeiler nach den im ersten Capitel gegebenen Regeln festzustellen.

Eine der großartigsten Holzbrücken ist die auf der Newyork-Erie-Eisenbahn befindliche Cascadebrücke von Brown, welche über eine Schlucht von circa 94 m Weite und 55 m Tiefe gespannt ist. Von dieser Brücke zeigt Fig. 347 die Seitenansicht eines am Widerlager anstoßenden Stückes. Wie

Fig. 347.

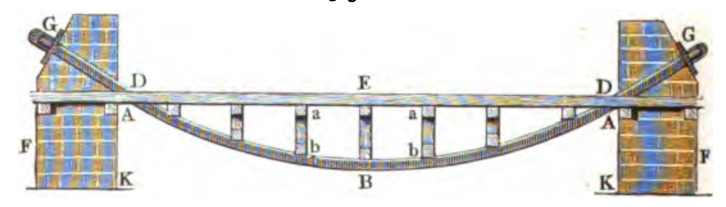


man sieht, so besteht diese Brücke in der Hauptsache aus Tragbögen AB, CD mit zwischen befindlichen Kreuzstreben. Diese Tragbögen sind größtentheils aus 3, nach den Enden zu aus 4, 5, und dicht an den Widerlagern sogar aus 6 Balken zusammengesetzt. Die Stärke dieser Balken ist 200 und 225 mm, und die der Kreuzstäbe 200 und 200 mm. Das Ende eines jeden Balkens ruht in einem eisernen Schuh, und diese Schuhe stützen sich auf eine untermauerte gußeiserne Platte. Die ganze Brückenbahn EF ruht mittelst verticaler Tragsäulen auf vier solchen Doppelträgern, welche unter einander wieder durch Kreuzstreben verbunden sind.

Anmerkung. Die größeren Holzbrücken haben zum Theil noch größere Spannweiten als die steinernen Brücken. Bei der oberen Schuylkill-Brücke kommt ein Bogen von über 100 m Spannweite und 6 m Höhe vor. Die alten Schweizer Brücken, sowie die Wiebeking'schen Brücken, haben schon Spannweiten von 50 bis 60 m. Bei der Trenton-Brücke hat der mittlere Bogen eine Spannweite von 60 m und eine Höhe von 8 m. Eine sehr große Gitterbrücke ist bei Wittenberge über die Elbe geführt. Dieselbe hat 11 Oeffnungen zu je 53,5 m und 3 zu je 37,5 m Spannweite. Die Tragwände dieser Brücke haben eine Höhe von 6 m, während ihr Abstand von einander nur 4 m mißt. Die Versuche, welche vorläufig mit einem Theile dieser Brücke angestellt worden sind, haben sehr günstige Resultate geliefert; bei der Fahrt und dem Stillstande einer Locomotive von 600 Centner Gewicht betrug die Senkung nur 15 mm; bei einem Marsche von 240 Mann über die Brücke war dieselbe nur 14 mm, erst bei einer gleichmäßigen Belastung von 2000 Centnern und einer Ueberfahrt von zwei Locomotiven von 1260 Centner Gewicht betrug die Senkung 78 mm. Siehe die Nachrichten darüber in der Eisenbahnzeitung, 1850, Nr. 29 bis 31, oder polyt. Centralblatt, 1850, Lief. 18.

§. 68. **Hängebögen.** Wenn man den Tragbogen nicht nach oben, sondern nach unten, folglich in die Richtung der Last stellt, so findet in Hinsicht auf den seither betrachteten Fall nur der Unterschied statt, daß der Bogen durch die Belastung dort comprimirt und hier ausgedehnt wird, daß er also im ersten Falle durch seine Druck- und im letzteren Falle durch seine Zugfestigkeit widerstehen muß. Da das Schmiedeeisen eine größe Zug- und das Gußeisen eine größere Druckfestigkeit besitzt, so ist das erstere mehr zu einer solchen umgekehrten Bogenstellung geeignet als das Gußeisen. Einen solchen Tragbogen führt Fig. 348 vor Augen. Es ist ABA ein schmiede-

Fig. 348.



eiserner Bogen, DED der von ihm getragene Balken, ferner sind FK, FK die beiden Widerlagspfeiler, und G, G Keile und Unterlagsplatten, womit sich die Bögen von außen gegen die Widerlager stützen. Natürlich sind es alle Mal mindestens zwei neben einander liegende Tragbögen, welche einen oder mehrere Balken wie DED unterstützen, und es besteht immer die Verbindung dieser Theile unter einander aus den Querbalken $a, a \ldots$, $b, b \ldots$ und Tragsäulen $ab, ab \ldots$ Die Wirkung eines solchen Tragbogens auf die Widerlager ist, wie bei den umgekehrten Häng- und Sprengwerken, von außen nach innen gerichtet; man hat also hier dafür zu sorgen,

daß die Widerlager nicht um die inneren Kanten K, K nach innen kippen. Uebrigens kann man einen Balken DED durch einen solchen Bogen ebenso gut von oben als von unten unterstützen, wenn man nur die Tragsäulen ab, ab durch Hängesäulen ersetzt. Man hat es dann mit einem sogenannten Hängebogen zu thun und nennt auch die durch Hängebögen getragenen Brücken Hängebrücken. In der Regel bildet man diese Bögen nicht aus krummem Holz oder Eisen, sondern man läßt dieselben entweder aus Seilen, und namentlich Drahtseilen, oder aus schmiedeeisernen Ketten bestehen. Die hierzu verwendeten Spann- oder Tragseile bestehen aus Draht von 1 bis 4 mm Dicke, und haben je nach der Spannweite u. s. w. eine Stärke von 25 bis 250 mm. Die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz, welche eine Spannweite von 273 m hat, wird z. B. von vier Seilen getragen, welche aus 1056 Drähten von je 3,2 mm Stärke bestehen, und 136 mm dick sind, und die Drahtbrücke über den Niagara-Wasserfall, von 257 m Spannweite, besteht aus vier Drahtseilen, welche bei 3640 Drähten einen Durchmesser von 250 mm haben. Damit die nur neben einander liegenden und übrigens gehörig gefirnißten Drähte eines Taues gehörig zusammenhalten, sind sie in Abständen von circa 0,3 m ungefähr 0,3 m lang mit anderem Draht umwickelt.

Die Glieder der Tragketten bestehen aus mehreren neben einander liegenden und hochkantig gestellten Eisenschienen von 2,5 bis 4 m Länge, und sind durch cylindrische Bolzen mit einander verbunden. Der Querschnitt eines Kettengliedes und folglich auch die Anzahl und die Querschnittsdimensionen der einzelnen Schienen eines ganzen Gliedes sind natürlich von der Spannweite, Höhe u. s. w. abhängig. Die 132 m spannende Kettenbrücke zu Prag wird z. B. von acht Ketten getragen, deren Glieder aus je sechs 3,14 m langen, 105 mm hohen und 15 mm dicken Schienen zusammengesetzt sind; die 198 m spannende Kettenbrücke zu Pesth ruht hingegen nur auf vier Ketten mit 3,75 m langen und 0,270 m hohen Gliedern, welche je 10 bis 11 Schienen enthalten, die zusammen in der Mitte der Kette eine Dicke von 310 mm und an den Enden derselben eine solche von 315 mm haben. Endlich hat man Hängebrücken aus über einander liegenden Eisenbändern construirt; eine größere Brücke dieser Art befindet sich zu Suresnes bei Paris. Dieselbe hat eine Spannweite von 63 m und es besteht hier jedes Tragseil aus 20 über einander liegenden gewalzten Eisenbändern von 81 mm Breite und 3,83 bis 4,15 mm Dicke.

Das Hängewerk, welches die Brückenbalken mit den Spann- oder Tragseilen verbindet, besteht entweder aus schmiedeeisernen Hängestangen oder aus Hängeseilen. Die Art und Weise, wie diese Stangen oder Seile einerseits mit den Spannketten und andererseits mit den Balken der Brücke zu verbinden sind, ist aus Folgendem zu ersehen.

Hat eine Drahtbrücke nicht je zwei neben einander hängende Seile, so hängt man die Hängeseile mittelst einfacher Oehre an das Tragseil; besteht sie hingegen aus je zwei neben einander hängenden Seilen, so werden die Hängeseile mittelst Haken an ein solches Seilpaar aufgehangen. Diese Aufhängungsweise ist in Fig. 349 dargestellt. AB und CD sind die beiden Seile, DE ist der Haken und FG stellt das Hängeseil vor. Das Tragseil CD ist unmittelbar beim Haken abgeschnitten gedacht. Die Enden HK der Querbalken oder Unterzüge, auf welchen die ganze Brücke ruht, sind entweder mit Bügeln LM umgeben, deren hakenförmige Köpfe in die unteren Oehre G der Hängeseile eingehakt werden, oder sie sind von unten mit Eisenplatten bekleidet, und es werden die durch die Querbalken und diese Platten gehenden, zu diesem Ende durchlochten oder schraubenförmig zugeschnittenen Enden der Hängestangen durch Keile oder starke Schraubenmuttern mit den ersteren fest verbunden.

Fig. 349.

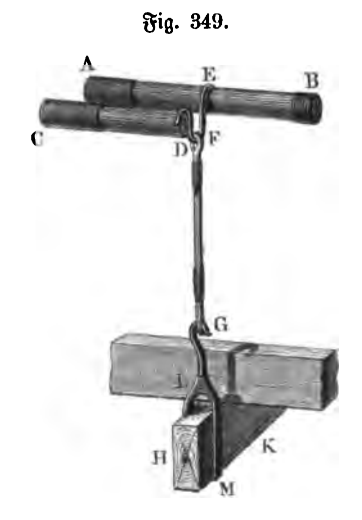


Fig. 350.

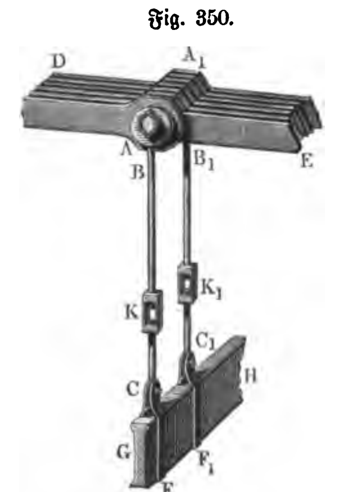
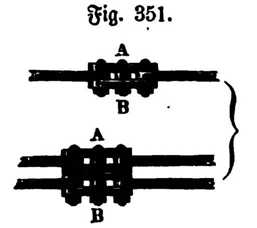


Fig. 351.

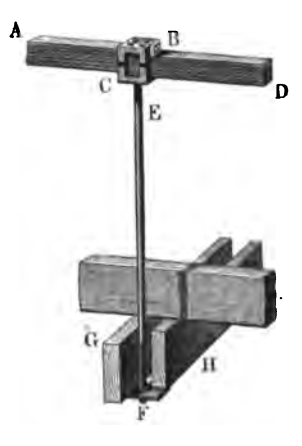


Die Art und Weise, wie die Hängestäbe an die **Tragketten** angehangen werden, ist aus Fig. 350 und Fig. 351 zu ersehen. Bei der ersteren Anordnung hängen die Hängestäbe BC, B_1C_1 unmittelbar an dem Bolzen AA_1, Fig. 350, welcher die Kettenglieder DA und EA_1 mit einander verbindet. Die mit Stell- oder Scheerengliedern K, K_1 versehenen Hängestangen sind auch hier mittelst Bügel CF, C_1F_1 an die gußeisernen Querbalken angeschlossen. Bei älteren Kettenbrücken sind die

Kettenglieder durch besondere Blätter mit einander verbunden, welche in ihrer Mitte noch besondere Bolzen A, B, Fig. 351, tragen, woran die Hängestangen aufgehangen werden.

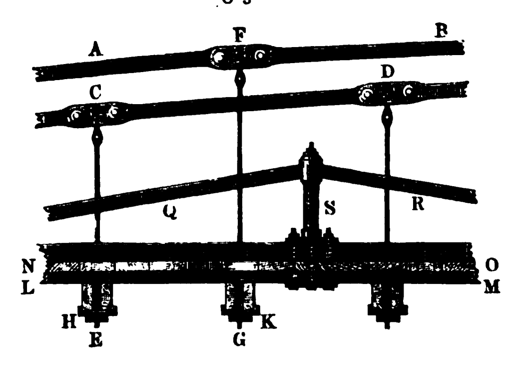
Die Aufhängung der Brücke an ein Bandeisenseil ist in Fig. 352 abgebildet. Es ist hier an jeder Stelle, wo oben ein Band AB endigt, und unten ein neues Band hinzutritt, eine gußeiserne Klemmbüchse BC aufgesetzt, an welche die Enden B und C, nachdem sie durch dieselbe gegangen sind, durch je zwei Schrauben befestigt werden. Die mit einem Kopfe in der Klemmbüchse aufgehangene Hängestange EF trägt an ihrem unteren Ende eine Eisenplatte F, auf welcher die Enden von zwei Querbalken G und H aufruhen, zwischen denen die Hängestange hindurchgeht.

Fig. 352.



Meist hat man auf einer und derselben Seite der Brücke zwei Tragketten über einander, wie z. B. AB und CD, Fig. 353, und deshalb gehen auch doppelt so viel Hängestäbe als Kettenglieder nach der Brücke herab; ist folglich die Länge der Kettenglieder 3 bis 4 m, so beträgt die Entfernung zwischen je zwei Hängestäben CE und FG 1,5 bis 2 m. Die Figur zeigt auch

Fig. 353.



noch, wie die unteren Enden der Kettenstäbe durch Fußplatten H, K und Keile E, G mit den Querbalken verbunden sind. Auf den Querbalken liegen die Längenschwellen wie LM, quer darüber wieder eine Bohlenlage NO, oder eine Holzpflasterung u. s. w.

Was die Breite der Brückenbahn anlangt, so rechnet man auf eine Laufbahn 1 bis 2 m und auf eine Fahrbahn 2 bis 4 m; eine Brücke mit zwei Lauf- und zwei Fahrbahnen erhält folglich eine Totalbreite von 6 bis 12 m.

Um der Brücke eine größere Steifigkeit zu geben, versieht man die Brückenbahn noch mit besonderen Verstrebungen, wie z. B. QRS, Fig. 353; sehr zweckmäßig sind z. B. die nach dem Principe der Gitterwände construirten Steifwände. Man kann auch nach Cadiat und Dudry die Querbalken durch einen Gitterbalken ersetzen, wobei sich die Last eines Balkens auf das ganze Gitterwerk vertheilt. Auch giebt man zu diesem Zwecke der Brückenbahn eine schwache Wölbung.

Die Bogenhöhe der Hängebrücken ist in Ansehung der ganzen Brückenlänge meist sehr klein ($^1/_7$ bis $^1/_{25}$ der Sehne), daher die Spannung der Seile oder Ketten sehr bedeutend (s. Bd. I); es haben daher auch die Pfeiler, über welche die Seile oder Ketten weggehen, und die Anker, mit denen die Seil- oder Kettenenden an den Ufern befestigt sind, eine bedeutende Kraft auszuhalten, und es sind deshalb Pfeiler von großer Stabilität und Widerlager von bedeutendem Widerstande in Anwendung zu bringen. Die Entfernungen zwischen je zwei Pfeilern macht man, um nicht zu schwere Seilketten zu erhalten und die Pfeiler nicht zu sehr zu belasten, nicht gern über 160 m, doch kommen auch Umstände vor, welche zu größeren Spannweiten nöthigen; es beträgt dieselbe z. B. bei der Menai-Kettenbrücke in England 176 m und bei der Seilbrücke zu Freiburg in der Schweiz sogar 264 m.

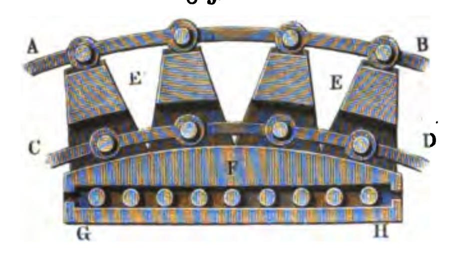
Wenn die Kette zu beiden Seiten eines Pfeilers ungleich gespannt wird, was bei einer einseitigen Belastung stets eintritt, so sucht dieselbe über ihrem Lager nach der Seite der größeren Spannung fortzugleiten; da nun aber die Kette mit dem Kopfe des Pfeilers durch die aus der Mittelkraft der Spannungen entspringende Reibung bis zu einem gewissen Grade verbunden ist, so hat hiernach der Pfeiler einer der Reibung gleichen Seitenkraft durch seine Stabilität zu widerstehen. Aus diesem Grunde hat man denn auch Pfeiler von großen Breiten und Dicken anzuwenden, oder besondere Mittel zu benutzen, um diese Wirkungen der ungleichen Belastung zu ermäßigen. Diese Mittel bestehen entweder darin, daß man die Ketten über Rollen oder Walzen laufen läßt, und dadurch die gleitende Reibung auf eine kleinere Zapfen- oder Walzenreibung zurückführt, oder daß man die Ketten an einen Sector anschließt, welcher, sich auf dem Kopfe des Pfeilers wälzend, sich nach der einen oder nach der anderen Seite hin neigen läßt, oder daß man endlich gar den Pfeiler durch eine Säule ersetzt, welche um eine horizontale Axe drehbar ist. In der Anordnung von Fig. 354 sind die zwei Ketten AB, CD über gewöhnliche Leitrollen E, E, F, F gelegt, in Fig. 355 liegen hingegen die beiden Ketten auf einem gußeisernen Sattel

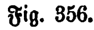
EFE, welcher wieder auf neun gußeisernen Walzen ruht. Diese Walzen werden endlich von einer Fußplatte *GH* unterstützt, die auf dem Kopfe des Kettenpfeilers festsitzt. Wenn die beiden Ketten auf der einen Seite mehr als auf der anderen belastet sind, so rollt der ganze Sattel sammt den darauf liegenden Ketten so weit fort, bis die Spannung der Ketten auf der einen Seite nahezu gleich derjenigen auf der anderen Seite geworden ist. In Fig. 356 ist eine Kettenführung dargestellt, welche bei einer Kettenbrücke über die Maas bei Seraing zur Anwendung gekommen ist. Die obere Kette *EAF* ist hier an einen Hebel *CA* angeschlossen, dessen Drehungsaxe *C* auf dem Kopfe einer gußeisernen Säule ruht, während die untere Kette *GBH* an einem kleineren Hebel *DB* befestigt ist, dessen Drehungsaxe *D* auf dem ersteren Hebel selbst sitzt.

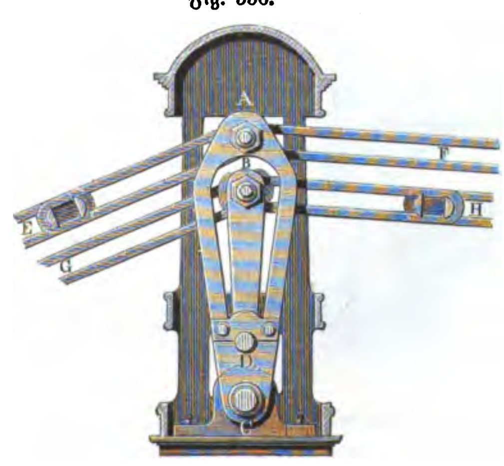
Fig. 354.



Fig. 355.

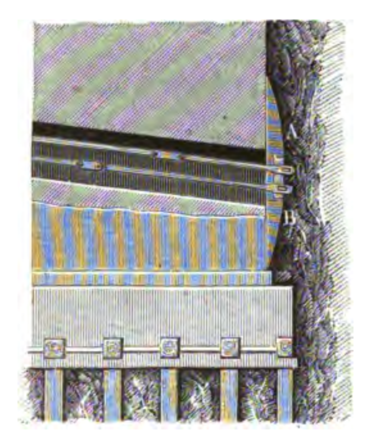



Fig. 356.



Damit die Mittelkraft aus den beiden Spannungen der über einen Pfeiler weggehenden Kette vertical wirke, und so vom Pfeiler am sichersten aufgenommen werde, ist es nöthig, daß die Theile der Kette zu beiden Seiten des Pfeilers gleiche Neigung gegen den Horizont haben. Läßt sich diese Gleichheit nicht herstellen, wie es z. B. bei den Uferpfeilern sehr oft der Fall ist, so muß man die Pfeiler bedeutend verstärken.

Fig. 357.

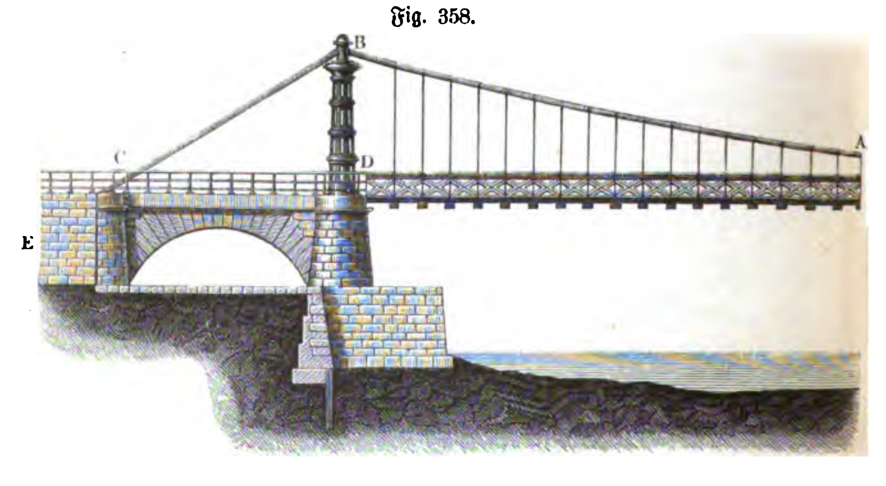


Um die Kettenenden an den Ufern zu verankern, versieht man dieselben mit starken Bolzen und legt diese in Lager, welche auf einer großen und dicken Eisenplatte AB, Fig. 357, sitzen, die sich gegen eine dicke Widerlagsmauer, oder gegen ein Gewölbe, oder gar gegen das feste Gestein stemmt. Durch Keile läßt sich dann noch die Kette in gehöriger Spannung erhalten, wenn sie durch Dehnung etwa schlaff geworden ist.

Eine neuere Hängebrückenanlage ist die von Brialmont construirte Kettenbrücke über die Maas bei Seraing.

Die Seitenansicht von einem Stück dieser Brücke führt Fig. 358 vor Augen. Diese Brücke, welche bei einer Breite von 5 m und einer Bogen-

Fig. 358.

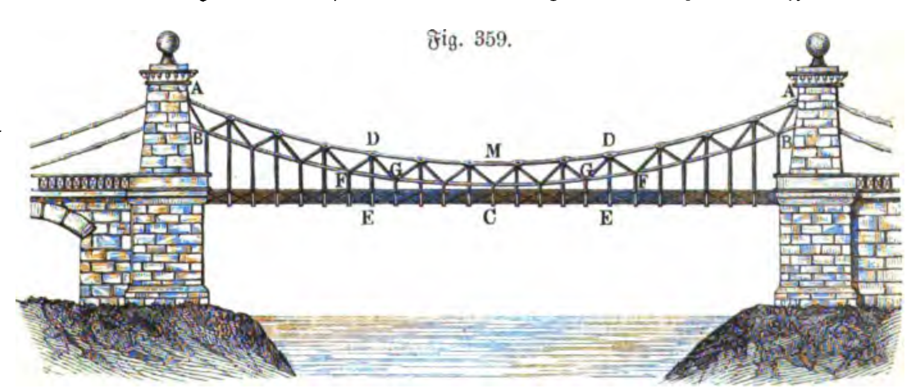


höhe von 7 m, eine Spannweite von 105 m hat, besteht aus acht und zwar auf jeder Seite aus vier nahe über und neben einander liegenden Doppel-

ketten. Die Glieder dieser Ketten, deren Metalldicke 25 und Höhe 50 mm mißt, bilden Scheeren oder Ringe von 3 m Länge und 100 mm lichter Weite. Die auf einer Seite neben einander liegenden Doppelketten sind durch 100 mm dicke Bolzen mit einander verbunden, und an die letzteren sind die 3 cm dicken Hängestangen angeschlossen. Die Tragketten *AB* sind mit den Spannketten *BC* durch die in Fig. 356 abgebildeten Hebel verbunden, welche in einem 8 m hohen und aus vier Stücken und einem cylindrischen Kern bestehenden gußeisernen Thurme enthalten sind. Die Befestigung der Kettenenden in der Widerlagsmauer *E* ist ähnlich wie Fig. 357 darstellt. Die ganze Brücke wiegt auf das laufende Meter 1010 kg, und nimmt man die Belastung eben so groß an, so berechnet sich die Spannung der Ketten auf 418910 kg, so daß auf ein Quadratmillimeter derselben eine Spannung von 10 kg kommt. Die Hängestangen sind dagegen nur mit 2 kg und die gußeisernen Pfeiler mit $2^1/_2$ kg pro Quadratmillimeter belastet.

Die Eisenbahnkettenbrücke über den Donau-Canal in Wien, ausgeführt von den Ingenieuren Schnirch und Fillunger ist in Fig. 359 skizzirt.

Fig. 359.



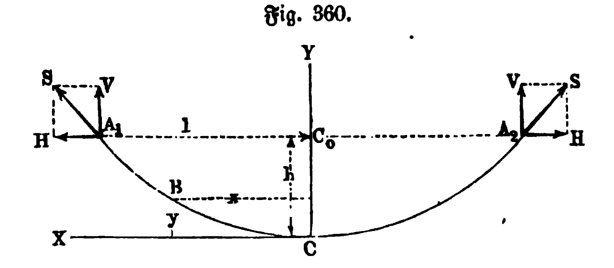
Dieselbe besteht aus je zwei durch Diagonalstäbe *DF*, *DG* . . . mit einander verbundenen Hängeketten *AMA* und *BGGB*, welche wie gewöhnlich, die Brückenbahn *ECE* mittelst verticaler Hängestangen tragen. Diese Brücke hat eine Spannweite von 264 Wiener Fuß (83,45 m), eine Bogenhöhe von $13^1/_5$ Fuß (4,17 m) und trägt eine Fahrbahn mit Doppelgeleisen von 35 Fuß Breite. Der Gesammtquerschnitt der Ketten ist 248 Quadratzoll (1720 qcm), und der Materialaufwand dieser Brücke besteht aus 7290,8 Ctr. Schmiedeeisen und aus 668 Ctr. Gußeisen.

Theorie der Hängebrücken. Die Curve, welche von der Kette oder dem Seile einer Hängebrücke gebildet wird, hängt wesentlich von der §. 69.

Art der Belastung ab, dieselbe kommt einer Ellipse sehr nahe und liegt zwischen einer Parabel und einer Kettenlinie, wie diese letzteren Curven sich bezw. ergeben, wenn die Last gleichmäßig entweder über die Horizontalprojection, oder über die Kettenlänge verbreitet ist. Es geht daraus hervor, daß die Kettenbrückenlinie sich bei der belasteten Brücke mehr der Parabel, dagegen bei der unbelasteten Brücke mehr der Kettenlinie nähern wird. Da die Brücken vorzugsweise für den Zustand der Belastung zu untersuchen sind, so rechtfertigt es sich, wenn die Curve der Kette oder des Seils der leichteren Durchführbarkeit der Rechnung wegen als Parabel angesehen wird.

Es sei hier wie für den Bogenträger der Scheitel oder tiefste Punkt C, Fig. 360, als Coordinatenanfang für verticale und horizontale Axen ge-

Fig. 360.



wählt, und mit $2\,l = A_1 A_2$ die Spannweite oder horizontale Entfernung der Aufhängepunkte, mit $h = C_0\,C$ die Pfeilhöhe der Kette bezeichnet, so hat man unter der gemachten Voraussetzung einer parabelförmigen Kettenlinie deren Gleichung wieder durch

$$y = \frac{h}{l^2}\,x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ausgedrückt. Für irgend einen Punkt B mit den Abscissen x und y ist die Neigung α gegen den Horizont durch

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{h}{l^2}\,2\,x = \frac{2\,y}{x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

also für den Aufhängepunkt A_1 durch

$$tg\,\alpha_1 = \frac{2\,h}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

gegeben. Setzt man wieder ein Bogenelement

$$\partial b = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \left(1 + 2\,\frac{h^2}{l^4}\,x^2\right)\partial x,$$

so erhält man die Länge des Kettenbogens zwischen dem Scheitel C und einem Punkte B zu

$$b = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l^4}x^2\right)x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und daher die Länge des halben Bogens CA_1 mit $x = l$ zu

$$b = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}\right)l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3^a)$$

Die Längen λ der einzelnen Hängestangen vom Scheitel aus nach den Aufhängepunkten hin bestimmen sich aus (1), wenn man darin nach einander für x die Werthe $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n} \ldots \frac{nl}{n}$ einführt, unter n die Anzahl der Intervalle einer Brückenhälfte verstanden. Demgemäß hat die νte Hängestange, von der Mitte aus gezählt, die Länge

$$\lambda_\nu = h\left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Hängestangen werden durch das Gewicht der von ihnen getragenen Fahrbahn und durch ihr eigenes Gewicht auf Zug in Anspruch genommen, und man erhält daher den nöthigen Querschnitt f einer solchen Hängestange von der Länge λ aus der Beziehung

$$f s_1 = \frac{l}{n} q + f \lambda \gamma,$$

worin γ das specifische Gewicht des Eisens, s_1 die zulässige Materialspannung desselben und q die Belastung der Brückenbahn für die Längeneinheit und die halbe Brückenbreite bedeutet. Daraus folgt der Querschnitt einer Hängestange

$$f = \frac{q\,l}{n\,(s_1 - \lambda\gamma)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wofür man wegen der Kleinheit von $\lambda\gamma$ im Vergleiche zu s_1 genügend genau

$$f = \frac{q\,l}{n\,s_1} = \frac{Q}{n\,s_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^a)$$

setzen kann, unter Q die Belastung einer K e t t e n h ä l f t e zwischen dem tiefsten Punkte und einem Aufhängepunkte verstanden. Hieraus folgt das Gewicht aller n Hängestangen einer Kettenhälfte, wenn man unter λ die mittlere Durchschnittslänge derselben versteht, zu

$$G_1 = n f \lambda \gamma = q\,\frac{l\,\lambda}{s_1}\,\gamma = \frac{Q\,\lambda\,\gamma}{s_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^b)$$

Um nun den Querschnitt F der Tragkette zu ermitteln, hat man die volle Belastung der Brücke über ihre ganze Länge durch die größte Last $2\,Q = 2\,l\,q = 2\,l\,(p + k)$ vorauszusetzen. Die Tragkette hat dann

außer dieser Last $2\,Q$ noch das Gewicht $2\,G_1$ der Hängestangen und ihr eigenes Gewicht $2\,G$ zu tragen, welches letztere mit Rücksicht auf (3^a) sich zu

$$2\,G = F\,2\,b\,\gamma = 2\,F\,l\,\gamma\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{h^2}{l^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

bestimmt.

In jedem Aufhängepunkte A_1 und A_2 hat man daher einen verticalen Auflagerdruck V gleich der Belastung der halben Kette $Q + G + G_1$, und da $V = S\,sin\,\alpha_1$ und $H = S\,cos\,\alpha_1$ ist, unter S die Endspannung der Kette verstanden, so folgt zunächst diese Spannung

$$S = \frac{V}{sin\,\alpha_1} = \frac{Q + G + G_1}{sin\,\alpha_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

sowie der horizontale Zug der Kette

$$H = V\,cotg\,\alpha_1 = (Q + G + G_1)\,cotg\,\alpha_1 = (Q + G + G_1)\,\frac{l}{2\,h} \cdot (8)$$

Führt man in (7) für G_1 und G die Werthe aus (5^b) und (6) ein, und setzt $S = F\,s$, so erhält man

$$S\,sin\,\alpha_1 = F\,s\,sin\,\alpha_1 = Q\left(1 + \frac{\lambda\,\gamma}{s_1}\right) + F\,b\,\gamma,$$

woraus der erforderliche Kettenquerschnitt zu

$$F = \frac{Q}{s_1} \cdot \frac{s_1 + \lambda\,\gamma}{s\,sin\,\alpha_1 - b\,\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

folgt, in welche Gleichung man für b den Werth aus (3^a) und nach (2^a):

$$sin\,\alpha_1 = \frac{tg\,\alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2\,\alpha_1}} = \frac{2\,h}{\sqrt{l^2 + 4\,h^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

einführen kann. Hat man hieraus F und damit nach (6) das Gewicht G der halben Kette bestimmt, so findet man aus (8) den Horizontalzug H, welcher auch die Spannung im tiefsten Punkte C der Kette angiebt.

Man kann einer Hängebrücke dadurch eine größere Steifigkeit gegen Schwingungen ertheilen, daß man die Brückenbahn nicht durch verticale, sondern mit Hülfe geneigter Hängestangen an die Tragketten anhängt, derart, daß vom tiefsten Punkte C der Kette, Fig. 361, die Hängestangen wie NO, DA nach beiden Seiten symmetrisch gegen die Verticale unter dem Winkel β geneigt sind. Bezeichnet hier $CD_1 = CD_2 = l_1$ die halbe Länge der Brücke, und $C_0 A_1 = C_0 A_2 = l$ die halbe Entfernung der Aufhängepunkte A_1 und A_2, welche um die Höhe $C\,C_0 = h$ über dem tiefsten Punkte der Kette gelegen sind, so hat man zunächst

$$l_1 = l - h\,cotg\,\beta,$$

und die Länge der äußersten Hängestange $A_1 D_1 = A_2 D_2$:

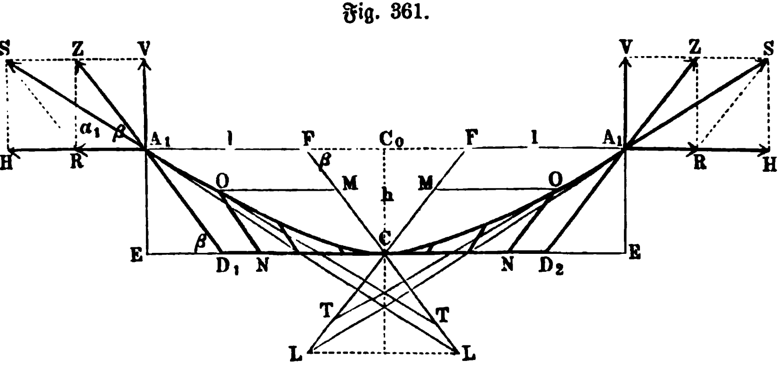
$$h_1 = \frac{h}{\sin \beta}.$$

Bezeichnet wieder n die Felderzahl der halben Brücke CD_1, so wirkt auf jede Hängestange ein verticales Gewicht $\frac{l_1}{n} q$, welches in der Hängestange eine Zugkraft

$$Z = \frac{l_1 q}{n \sin \beta} \quad \text{. . . . . (11)}$$

hervorruft. Mit diesen Zugkräften Z greifen die Hängestangen die Tragkette an, und es ergiebt sich, daß jede Kettenhälfte $A_1 C$ und $A_2 C$ in Folge

Fig. 361.



dieser parallelen Kräfte von gleicher Größe und gleichen gegenseitigen Abständen gleichfalls die Gestalt einer Parabel annehmen wird, für welche die durch den tiefsten Punkt C parallel der Zugstange $D_1 A_1$ gezogene Richtung CF einen Durchmesser darstellt. Daher ist für jeden Punkt wie O die Subtangente MT gleich der doppelten, in der Richtung von CF gemessenen Abscisse ON, und die Tangente an die Parabel in A_1 schneidet den Durchmesser CF in einem Punkte L so, daß

$$FL = 2 A_1 D_1 = 2 h_1 = \frac{2 h}{\sin \beta}$$

ist. Bezeichnet man daher wieder mit α_1 den Neigungswinkel der Kette in A_1 gegen den Horizont, so hat man aus dem Dreiecke FA_1L:

$$\frac{\sin FLA_1}{\sin FA_1L} = \frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{FA_1}{FL} = \frac{l_1}{2 h_1},$$

woraus man

$$\cotg \alpha_1 = \cotg \beta + \frac{l_1}{2 h_1 \sin \beta}$$

folgert. Setzt man hierin $cotg\,\beta = \frac{E D_1}{E A_1} = \frac{l - l_1}{h}$ und $h_1 \sin\beta = h$, so erhält man auch für den Winkel α_1:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{2h}{2l - l_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2^b)$$

Der Verticaldruck V in jedem Aufhängepunkte A_1 und A_2 bestimmt sich auch hier gleich der Belastung einer halben Brücke zu

$$V = Q + G + G_1,$$

und daher die Kettenspannung am Ende zu

$$S = \frac{V}{\sin\alpha_1} = \frac{Q + G + G_1}{\sin\alpha_1}, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

sowie der horizontale Kettenzug zu

$$H = V\,cotg\,\alpha_1 = \frac{Q + G + G_1}{tg\,\alpha_1} = (Q + G + G_1)\,\frac{2l - l_1}{2h} \cdot \quad (8^a)$$

Jede Hängestange übt hier auf die Brückenbahn CD_1 einen nach außen gerichteten Zug $Z \cos\beta$ aus, so daß jede Brückenhälfte durch eine Horizontalkraft

$$H_1 = Q\,cotg\,\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11^a)$$

gespannt wird, wodurch die Durchbiegung der Bahn sich vermindert.

Die Tragketten werden durch die angehängte Last verlängert und nehmen in Folge davon auch eine größere Bogenhöhe an; gleichfalls geht aus der Temperaturveränderung eine Veränderung der Bogenlänge b und damit der Pfeilhöhe h hervor. Wenn die letztere aus h in h' übergeht, so hat sich die Bogenlänge

$$b = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}\right) l$$

in

$$b' = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{h'^2}{l^2}\right) l,$$

also um

$$\sigma = b' - b = \frac{2}{3}\,\frac{h'^2 - h^2}{l}$$

vergrößert, daher hat man, wenn man die Veränderung der Pfeilhöhe $h' - h = \eta$ und annähernd $h' + h = 2h$ setzt, die Verlängerung der halben Kette

$$\sigma = \frac{4}{3}\,\frac{h}{l}\,\eta,$$

sowie umgekehrt

$$\eta = \frac{3}{4}\,\frac{l}{h}\,\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Spannung der Kette ist nun für verschiedene Punkte verschieden und variirt nach (7) und (8) zwischen $H = V \, cotg \, \alpha_1$ im Scheitel und $S = \frac{V}{sin \, \alpha_1}$ an den Enden. Nimmt man dafür überall eine mittlere Spannung

$$S_0 = \frac{H + S}{2} = V \frac{1 + cos \, \alpha_1}{2 \, sin \, \alpha_1}$$

an, so erhält man daraus für den halben Kettenbogen b eine elastische Verlängerung

$$\sigma = \frac{S_0}{FE} b = \frac{V}{FE} \frac{1 + cos \, \alpha_1}{2 \, sin \, \alpha_1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l,$$

wofür annähernd

$$\sigma = \frac{V l}{FE \, sin \, \alpha_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

gesetzt werden kann. Mit diesem Werthe für die Verlängerung σ erhält man daher aus (12) die durch die Belastung V hervorgerufene Vergrößerung der Bogenhöhe:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{V}{FE sin \, \alpha_1} \frac{l^2}{h}, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

oder, wenn man $sin \, \alpha_1 = \frac{2 h}{\sqrt{l^2 + 4 h^2}} =$ annähernd $\frac{2 h}{l}$ setzt:

$$\eta = \frac{3}{8} \frac{V}{FE} \frac{l^3}{h^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14^a)$$

Um die Veränderung der Bogenhöhe h bei einer Temperaturveränderung von $\pm t^0$ C. zu ermitteln, hat man nur die hierdurch hervorgerufene Längenänderung der halben Kette von $\pm$ 0,000012 $b t$ in den Ausdruck (12) für σ einzuführen, und erhält die gesuchte Veränderung der Bogenhöhe zu

$$\eta_t = \pm \frac{3}{4} \frac{l}{h} 0{,}000012 \, b t = \pm 0{,}000009 \, t \frac{l b}{h} \quad \ldots \quad (14^b)$$

Beispiel. Es sind für eine Hängebrücke mit verticalen Hängestangen bei einer Spannweite von 40 m und einer Bogenhöhe von 4 m die Querschnittsverhältnisse zu ermitteln, wenn die auf jede Kette entfallende halbe Brückenbahn ein Eigengewicht von 1000 kg pro laufenden Meter hat und eine zufällige Belastung durch Menschengedränge von 1200 kg pro laufenden Meter für jede Tragkette zu rechnen ist, und wenn die höchste Materialspannung in den Tragketten den Werth $s = 10$ kg, diejenige in den Hängestangen dagegen nur denjenigen $s_1 = 2$ kg nicht übersteigen soll?

Nimmt man die Entfernung der Hängestangen zu 1 m an, so hat jede derselben eine Last von 1000 + 1200 = 2200 kg zu tragen, und daher bestimmt sich der Querschnitt f einer Stange (5ᵃ) zu $\frac{2200}{2} = 1100$ qmm, daher der

Durchmesser des Rundeisens zu 37,5 mm. Nimmt man den Regeln für die Quadratur der Parabel zufolge die mittlere Länge der Hängestangen zu $\lambda = \frac{h}{3} = 1{,}333$ m und das specifische Gewicht des Eisens zu 7,6 an (1 cbmm = 0,0000076 kg), so erhält man nach (5^b) das Gewicht der 20 Hängestangen einer halben Kette zu:

$$G_1 = 20 \,.\, 1100 \,.\, 1333 \,.\, 0{,}0000076 = 223 \text{ kg}.$$

Die Last Q für eine halbe Kette ist ferner:

$$Q = 20 \,.\, (1000 + 1200) = 44000 \text{ kg}.$$

Ferner hat man die Länge b einer halben Kette gleich:

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{4 \,.\, 4}{20 \,.\, 20}\right) 20 = \frac{77}{75} 20 = 20{,}533 \text{ m},$$

und den Neigungswinkel α_1:

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 \,.\, 4}{\sqrt{400 + 64}} = 0{,}3714; \; (\alpha_1 = 21^0 \, 50'),$$

und man erhält daher den Querschnitt der Tragkette nach (9) zu:

$$F = \frac{44000}{2} \frac{2 + 1333 \,.\, 0{,}0000076}{10 \,.\, 0{,}3714 - 20533 \,.\, 0{,}0000076} = 22000 \frac{2{,}010}{3{,}714 - 0{,}156}$$
$$= 12429 \text{ qmm},$$

welchen Querschnitt man etwa durch vier Flacheisenstäbe von je 25 mm Stärke und 125 mm Höhe erreichen kann. Das Gewicht G einer halben Kette bestimmt sich daher zu:

$$G = 12429 \,.\, 20533 \,.\, 0{,}0000076 = 1940 \text{ kg},$$

so daß man in jedem Aufhängepunkte den Verticaldruck:

$$V = 44000 + 1940 + 223 = 46163 \text{ kg},$$

und den Horizontalzug nach (8):

$$H = 46163 \frac{20}{2 \,.\, 4} = 115408 \text{ kg}$$

erhält.

Nimmt man den Elasticitätsmodul des Ketteneisens zu $E = 20000$ an, so erhält man nach (14) die elastische Vergrößerung der Pfeilhöhe h durch die Belastung zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{46163}{12429 \,.\, 20000 \,.\, 0{,}3714} \frac{20000^2}{4000} = 37{,}5 \text{ mm}.$$

Für jeden Grad der Temperaturdifferenz ermittelt sich diese Veränderung nach (14^b) zu:

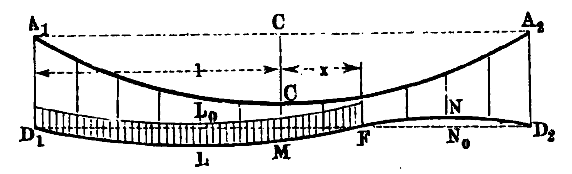
$$\eta_t = \pm\, 0{,}000009 \frac{20 \,.\, 20533}{4} = \pm\, 0{,}92 \text{ mm}.$$

also beispielsweise für 30° C. zu circa 28 mm.

§. 70. **Fortsetzung.** Für die einseitige Belastung der Hängebrücke, Fig. 362, lassen sich die Biegungsverhältnisse nach Rankine unter der Voraussetzung ermitteln, daß durch die mobile Last auf der nur an den Enden D_1 und D_2 festgehaltenen Brückenbahn die parabolische Form der Kette nicht wesentlich

verändert werde. Denkt man sich, daß die bewegliche Last, welche wie bisher den Betrag k pro Längeneinheit haben möge, die Brücke von D_1 bis F auf eine Länge $l + x$ bedecke, so vertheilt sich diese Last $k(l + x)$ nach der

Fig. 362.



gemachten Voraussetzung über die ganze Tragkette $A_1 C A_2$ und man hat für die Hängestangen derselben pro Längeneinheit eine Spannung:

$$k_0 = k\,\frac{l + x}{2\,l}$$

zu rechnen. Mit den dieser Spannung entsprechenden Zugkräften werden daher die Hängestangen die Brückenbahn nach oben zu biegen streben und das unbelastete Stück $D_2 F$ auch thatsächlich biegen, während das belastete Stück $A_1 F$ wegen des Uebergewichtes von k über k_0 convex nach unten gebogen wird. Man kann sich daher die beiden Balkenstrecken $D_1 F$ und $D_2 F$ wie zwei auf Stützen frei aufruhende Balken von den Längen $l + x$ und $l - x$ vorstellen, welche durch die gleichmäßig vertheilten specifischen Belastungen $k - k_0$ und bezw. k_0 nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden. Man erhält die gesammte Größe dieser Lasten für beide Strecken gleich, nämlich für $D_2 F$ zu:

$$(l - x)\,k_0 = (l - x)\,k\,\frac{l + x}{2\,l} = k\,\frac{l^2 - x^2}{2\,l} = K_0,$$

und für $D_1 F$ ebenfalls zu:

$$(l + x)\,(k - k_0) = (l + x)\,k\left(1 - \frac{l + x}{2\,l}\right) = k\,\frac{l^2 - x^2}{2\,l} = K_0 \quad (15)$$

Diese Kraft K_0 und also auch die Abscheerungskraft $\frac{K_0}{2}$ in F erreicht ihr Maximum für $x = 0$, d. h. wenn die Hälfte der Brücke mit der mobilen Last bedeckt ist.

Die größten Biegungsmomente für die beiden Strecken $D_1 F$ und $D_2 F$ stellen sich in deren Mitten L und N ein, und zwar berechnen sich dieselben bekanntlich für die belastete Strecke $D_1 F$ zu:

$$M_l = K_0\,\frac{l + x}{8} = k\,\frac{(l + x)\,(l^2 - x^2)}{16\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und für die unbelastete Strecke $D_2 F$ zu:

$$M_n = K_0 \frac{l-x}{8} = k \frac{(l-x)(l^2-x^2)}{16\,l} \quad . \quad . \quad . \quad (16^a)$$

Durch Differentiiren überzeugt man sich leicht, daß M_l ein Maximum wird für $x = +\frac{l}{3}$ und M_n für $x = -\frac{l}{3}$, und zwar wird für diese Werthe:

$$M_{max} = \pm \frac{2}{27} l^2 k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16^b)$$

Wenn daher die Brückenbahn zu $l + x = \frac{4}{3} l$ oder zu $^2/_3$ ihrer Länge belastet ist, so ist die belastete Strecke dem größten Biegungsmomente ausgesetzt. Die Kraft K_0 bestimmt sich in diesem Falle zu

$$K_0 = k \frac{8\,l^2}{9 \cdot 2\,l} = \frac{4}{9} k\,l,$$

und die Durchbiegungen der beiden Strecken D_1F und D_2F ergeben sich nach §. 35, 4 zu:

$$f_1 = \frac{5}{8} K_0 \frac{\left(\frac{4}{3}\,l\right)^3}{48\,TE} = \frac{10}{729} \frac{k\,l^4}{TE} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und

$$f_2 = \frac{5}{8} K_0 \frac{\left(\frac{2}{3}\,l\right)^3}{48\,TE} = \frac{5}{2916} \frac{k\,l^4}{TE} = \frac{1}{8} f_1 \quad . \quad . \quad . \quad (17^a)$$

Ist andererseits die Brückenbahn nur auf $^1/_3$ ihrer ganzen Länge belastet, so findet sich die größte Beanspruchung des unbelasteten Stückes, welches nunmehr eine Durchbiegung gleich f_1 nach oben annimmt, während die belastete Strecke sich nur um $f_2 = \frac{1}{8} f_1$ nach unten durchbiegt.

Bei den Kettenbrücken ist es von besonderem Interesse, die Wirkung von Stößen und Erschütterungen zu untersuchen, wie solche z. B. dadurch entstehen, daß geschlossene Menschenmassen, wie Truppenkörper, im tactmäßigen Schritte über die Brücke marschiren. Dadurch kann, wie die folgende Rechnung ergeben wird, die Sicherheit der Brücke bedenklich gefährdet werden.

Es sei wieder p das Gewicht der ruhenden Belastung der Brückenbahn pro Längeneinheit und angenommen, daß eine Verkehrslast k pro Längeneinheit längs der ganzen Brücke in einem gewissen Augenblicke mit der Geschwindigkeit v auf die Bahn aufschlage. Nach den Gesetzen des Stoßes werden unmittelbar nach dem Aufschlagen die Gewichte $p + k$ mit einer Geschwindigkeit:

$$w = \frac{k\,v}{p + k}$$

niedersinken, und es ist vermöge dieser Geschwindigkeit in den Massen der ganzen Brückenbahn ein Arbeitsvermögen:

$$2\,l\,(p + k)\,\frac{w^2}{2g} = 2\,l\,\frac{k^2}{p + k}\,\frac{v^2}{2g} = A\,. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

enthalten. Dieses Arbeitsvermögen wird dazu aufgebraucht, in den Hängestangen und der Tragkette gewisse Ausdehnungen hervorzubringen. Bekanntlich berechnet sich die durch die Kraft P einer Stange vom Querschnitte F und der Länge l ertheilte Ausdehnung zu:

$$\sigma = \frac{P\,l}{FE},$$

und die zur Ausdehnung aufgewendete Arbeit zu:

$$A_0 = P\,\frac{\sigma}{2} = \frac{P^2\,l}{2\,F\,E}.$$

Bezeichnet man demgemäß mit F_2 den Querschnitt aller Hängestangen und mit λ die mittlere Länge derselben, ferner mit P die Kraft, mit welcher die sämmtlichen Hängestangen durch den Stoß gespannt werden, so ist den Hängestangen eine Ausdehnung:

$$\sigma_2 = \frac{P\,\lambda}{F_2\,E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ertheilt und dazu eine Arbeit:

$$A_2 = \frac{P\,\sigma_2}{2} = \frac{P^2\,\lambda}{2\,F_2 E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18^a)$$

verwendet.

Durch die Kraft P, mit welcher sämmtliche Hängestangen in Folge des Stoßes gespannt werden, wird in der Kette eine Spannung erzeugt, welche an den Aufhängepunkten durch:

$$S = \frac{P}{2\,sin\,\alpha_1}$$

gegeben ist.

Nimmt man hier die Spannung für alle Punkte der Kette von derselben Größe S an, so erlangt man für die Kette von der Länge $2\,b$, wenn deren Querschnitt F_1 ist, eine Längenausdehnung:

$$2\,\sigma_1 = \frac{S\,2\,b}{F_1\,E} = \frac{P\,b}{sin\,\alpha_1\,F_1\,E}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wozu eine Arbeit erforderlich gewesen ist von:

$$A_1 = \frac{S\,2\,\sigma_1}{2} = \frac{1}{4}\,\frac{P^2\,b}{sin^2\,\alpha_1\,F_1\,E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18^b)$$

Setzt man nun $A = A_1 + A_2$, so erhält man aus:

$$2\,l\,\frac{k^2}{p+k}\,\frac{v^2}{2g} = P^2\left(\frac{b}{4\,sin^2\alpha_1\,F_1\,E} + \frac{\lambda}{2\,F_2 E}\right) = P^2 u:$$

$$P = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{l}{g u}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

wenn der Kürze wegen der Ausdruck:

$$\frac{b}{4\,sin^2\alpha_1\,F_1\,E} + \frac{\lambda}{2\,F_2 E} = u$$

gesetzt wird.

Die mittlere Senkung der Brückenbahn in Folge der Ausdehnung der Hängestäbe beträgt nach (19):

$$\sigma_2 = \frac{P\lambda}{F_2\,E}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

und die mittlere Senkung derselben in Folge der Ausdehnung der Tragkette hat man nach (12) zu:

$$\eta = \frac{3}{4}\,\frac{l}{h}\,\sigma_1 = \frac{3}{8}\,\frac{l}{h}\,\frac{P\,b}{sin\,\alpha_1\,F_1\,E} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Vernachlässigt man die Ausdehnung σ_2 der Hängestäbe, so wird nach (21):

$$P = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{l}{g}\,\frac{4\,sin^2\alpha_1\,F_1 E}{b}} \quad \ldots\ldots \quad (23^a)$$

und daher:

$$\eta = \frac{3}{4}\,\frac{l}{h}\sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{l}{g}\,\frac{b}{F_1\,E}} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

oder annähernd, wenn man $b = l$ setzt:

$$\eta = \frac{3}{4}\,\frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{k^2}{p+k}\,\frac{v^2}{g\,F_1\,E}} \quad \ldots\ldots \quad (24^a)$$

Wenn man sich vorstellt, daß in dem vorgedachten Falle einer tactmäßigen Bewegung von Menschen der hier betrachtete Stoß n mal hinter einander und zwar immer dann stattfinde, wenn die Brücke in Folge des vorhergegangenen Stoßes die größte Durchsenkung η erlangt hat, so ist die aufgewendete Stoßarbeit:

$$n\,A = n\,l\,\frac{k^2}{p+k}\,\frac{v^2}{g},$$

und folglich beträgt nunmehr die Senkung:

$$\eta' = \eta\,\sqrt{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Die hierbei erfolgende Ausdehnung der Kette ist nach (20) und (23^a):

$$2\,\sigma' = \frac{P\,b}{\sin\alpha_1\,F_1\,E} = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{4\,l\,b\,n}{g\,F_1\,E}}$$

annähernd

$$= 2\,l\,\sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{n}{g\,F_1 E}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

und die Spannung der Kette:

$$S' = \frac{2\,\sigma'}{2\,b}\,F_1\,E = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{n\,F_1 E}{g}}. \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Selbstverständlich sind die Abmessungen (F_1) der Kette so zu wählen, daß die **Summe der Spannungen**, welche aus der **ruhenden** Belastung und aus den **Erschütterungen** sich ergeben, den für das Material höchstens zulässigen Betrag nicht überschreitet.

Beispiel. Wenn bei der in dem Beispiele des vorigen Paragraphen berechneten Kettenbrücke vorausgesetzt wird, daß die Verkehrslast (Menschengedränge) nicht ruhend sei, sondern mit einer Geschwindigkeit $v = 1$ m aufschlage, so hat man mit $p = 1000$ kg und $k = 1200$ kg:

$$\frac{k^2}{p+k} = 655,$$

und da der Querschnitt der Kette zu 12429 qmm gefunden wurde, so folgt mit $E = 20000$ die Verlängerung der Tragkette in Folge eines Stoßes der Masse nach (26):

$$2\,\sigma' = 2\,l\,\sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k}\,\frac{1}{g\,F_1\,E}} = 40\sqrt{655\,\frac{1}{9{,}81\,.\,12429\,.\,20000}} = 0{,}0208\,\text{m}.$$

Demgemäß ist die entsprechende Vergrößerung der Kettenspannung pro Quadratmillimeter Querschnitt, da die Länge der ganzen Kette zu $2\,b = 2\,.\,20{,}533$ m ermittelt wurde, gleich

$$s' = \frac{0{,}0208}{2\,.\,20{,}533}\cdot 20000 = 10{,}13\,\text{kg}.$$

Da durch die ruhende Belastung die Ketten nur mit einer specifischen Spannung von $s = 10$ kg beansprucht werden, so erkennt man hieraus, wie durch den gedachten Stoß die Anstrengung mehr als verdoppelt wird. Nimmt man etwa an, daß das Ketteneisen bei einer Spannung von 40 kg zerrissen werde, so würde demnach eine durch Stoßwirkungen hervorgerufene zusätzliche Anstrengung von 40 — 10 = 30 kg pro Quadratmillimeter den Bruch herbeiführen, und hierzu würde eine Anzahl n solcher aufeinander folgenden Stöße genügen, welche sich aus:

$$30 = 10{,}13\,\sqrt{n}$$

zu

$$n = \left(\frac{30}{10{,}13}\right)^2 = 8{,}76 \backsim 9$$

ermittelt.

Anmerkung. Damit eine Hängebrücke den Wirkungen der beweglichen Last den nöthigen Widerstand entgegensetzen könne, versieht man die Brückenbahn

wohl mit besonderen Tragwänden, welche die in einzelnen Punkten wirkenden Lasten auf eine größere Länge der Kette vertheilen. Diese Träger sind bei der gänzlich belasteten, sowie bei der vollständig leeren Brücke gar nicht beansprucht, indem für diese Belastungszustände die Gewichte durch die Hängestangen direct auf die Ketten übertragen werden, und die Träger sind daher nur auf die einseitigen Belastungen zu berechnen. Auch pflegt man wohl die Brücken mit Zugseilen zu versehen, welche von der Brückenbahn nach dem Boden oder den Brückenpfeilern herabgehen, wie z. B. bei der Niagarabrücke; ferner wendet man wohl unterhalb eine Gegenkette an, welche durch aufwärtsgehende Zugstangen mit der Brückenbahn verbunden wird. Desgleichen vergrößert man die Steifigkeit einer Hängebrücke dadurch, daß man zwei Tragketten über einander hängt und dieselben unter einander verstrebt, wie einen Fachwerksträger.

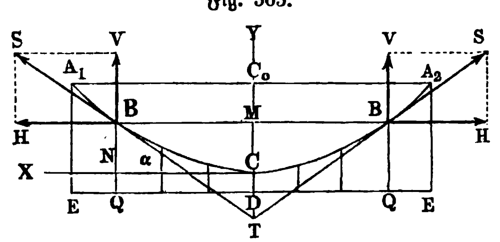
§. 71. **Ketten von gleichem Widerstande.** Da die Spannung der Tragketten einer Brücke von unten nach oben allmälig zunimmt, so sollte man auch den Querschnitt dieser Ketten vom Scheitel nach den Aufhängepunkten hin entsprechend größer werden lassen. Gewöhnlich sucht man dieser Forderung annähernd dadurch zu genügen, daß man entweder die Anzahl oder die Dicke der Schienen in den einzelnen Kettengliedern nach den Aufhängepunkten hin vergrößert. Streng genommen hätte man den Ketten die Form von Körpern gleichen Widerstandes zu geben, für welche die Forderung zu stellen ist, daß für jeden Punkt, dessen Querschnitt F und in welchem die Spannung S ist, die Bedingung:

$$\frac{S}{F} = s = const.$$

gilt, wenn wieder s die zulässige Materialspannung pro Flächeneinheit bedeutet.

Es seien $CN = x$ und $CM = y$, Fig. 363, die Ordinaten des Punktes B des Kettenbogens, dessen Tangente BT den Winkel α mit der

Fig. 363.



horizontalen X Axe bildet, so hat man, unter F den Querschnitt der Kette daselbst und unter γ das specifische Gewicht derselben verstanden, das Gewicht eines Bogenelementes ∂b durch $F \partial b . \gamma$ und daher das Gewicht des Bogenstückes CB durch:

$$G = \gamma \int F \partial b = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b$$

ausgedrückt.

Wenn daher das Gewicht der Brückenbahn pro laufenden Meter durch q bezeichnet wird, so ist die Verticalkraft in B:

$$V = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b + q x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

oder, da

$$S = \frac{H}{\cos \alpha} = H \frac{\partial b}{\partial x}$$

ist, wenn H den constanten Horizontalzug bedeutet, so folgt auch:

$$V = \frac{\gamma H}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + q x, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

woraus ferner

$$\frac{V}{H} = tg\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{q x}{H}$$

sich ergiebt. Durch Differentiiren erhält man:

$$\partial \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma}{s} \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x = \frac{\gamma}{s} \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x$$
$$= \frac{\gamma}{s} \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \partial x + \frac{q}{H} \partial x$$

und daher

$$\partial x = \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial\, tg\, \alpha}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} tg^2 \alpha}.$$

Da im Scheitel C die Spannung gleich H ist, so kann man, wenn F_0 den Querschnitt der Kette daselbst bedeutet, $H = F_0 s$ setzen, und erhält, wenn man noch

$$\frac{q}{F_0} = \gamma_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

einführt:

$$\partial x = \frac{s \,.\, \partial\, tg\, \alpha}{\gamma + \gamma_1 + \gamma\, tg^2 \alpha}, \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

welcher Ausdruck zu integriren ist, um die Gleichung für die Kettenbrücken-linie zu finden. Es kann bemerkt werden, daß der Gleichung $q = F_0 \gamma_1$ zufolge unter γ_1 das specifische Gewicht desjenigen Körpers zu denken ist, welcher bei einer Grundfläche F_0 gleich dem Kettenquerschnitte im Scheitel und bei einer Höhe von 1 m ein Gewicht hat, das gerade gleich der Be-

lastung q von 1 laufenden Meter Brücke ist. Um obige Gleichung zu integriren, schreibt man sie:

$$\partial x = \frac{s . \partial\, tg\, \alpha}{(\gamma + \gamma_1) \cdot \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} tg^2 \alpha\right)}$$

$$= \frac{s . \partial \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\, tg\, \alpha}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)} \left[1 + \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\, tg\, \alpha\right)^2\right]}$$

$$= \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} \frac{\partial u}{1 + u^2},$$

wenn der Kürze wegen $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\, tg\, \alpha = u$ gesetzt wird. Da nun aber bekanntlich:

$$\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = arc.\, tg\, u$$

ist, so hat man im vorliegenden Falle:

$$x = \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}\, arc.\, tg \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\, tg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

sowie umgekehrt:

$$tg\, \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\, tg\, \alpha,$$

d. i.:

$$tg\, \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\, tg\, \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad . \quad . \quad (33)$$

Die Integrationsconstante ist Null, weil für $x = 0$ auch $\alpha = 0$ ist. Diese Gleichung:

$$\partial y = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\, tg\, \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s}\, \partial x$$

liefert durch nochmalige Integration vermöge der bekannten Integralformel:

$$\int tg\, w\, \partial w = -\, log\, nat\, cos\, w = ln \frac{1}{cos\, w} = ln\, sec\, w,$$

$$y = \frac{s}{\gamma}\, log\, nat\, sec\, \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

wobei ebenfalls die Constante Null ist, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muß, was der Fall ist, da $sec\ 0 = 1$ und $log\ nat\ 1 = 0$ ist. Diese

Gleichung (34) kann dazu dienen, für jedes x das zugehörige y zu ermitteln, wenn $\gamma_1 = \frac{q}{F_0}$ gegeben ist.

Sind die Coordinaten x und y gegeben, so kann man γ_1 wie folgt bestimmen. Es ist, unter e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems verstanden, nach (34):

$$sec\,\frac{x\sqrt{\gamma(\gamma+\gamma_1)}}{s} = e^{\frac{\gamma}{s}y}.$$

Setzt man den Bogen:

$$\frac{x\sqrt{\gamma(\gamma+\gamma_1)}}{s} = \psi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

also

$$log\;nat\;sec\,\psi = \frac{\gamma}{s}\,y,$$

so folgt

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{s\,\psi}{x}\right)^2,$$

und daher

$$\gamma_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{s\,\psi}{x}\right)^2 - \gamma = \left[\left(\frac{s\,\psi}{\gamma\,x}\right)^2 - 1\right]\gamma \quad \ldots \quad (36)$$

Hieraus bestimmt sich weiter der Querschnitt F_0 der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma\left[\left(\frac{s\,\psi}{\gamma\,x}\right)^2 - 1\right]} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

und die Horizontalspannung:

$$H = F_0\,s = \frac{q\,s}{\gamma\left[\left(\frac{s\,\psi}{\gamma\,x}\right)^2 - 1\right]} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Ferner hat man bekanntlich für jeden Punkt der Kette die Verticalspannung:

$$V = H\,tg\,\alpha,$$

die Tangentialspannung:

$$S = \frac{H}{cos\;\alpha}$$

und den Querschnitt:

$$F = \frac{S}{s} = \frac{H}{s\,cos\,\alpha} = \frac{F_0}{cos\;\alpha},$$

wobei sich α einfach nach (33) und (35) durch

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{\gamma+\gamma_1}{\gamma}}\;tg\,\psi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

bestimmen läßt.

Das Gewicht $G = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b$ des Kettenstückes CB ist endlich gefunden durch (28) zu:

$$G = V - qx = H tg \alpha - qx. \quad \ldots \quad (40)$$

Die Aufgabe wird durch die vorstehenden Formeln insofern noch nicht genau gelöst, als bei der Entwickelung derselben auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen keine Rücksicht genommen worden ist. Es fällt indessen dieses Gewicht klein genug aus, um auch hier eine mittlere Hängestangenlänge $\lambda = \frac{y}{3}$ einführen und folglich auch das Gewicht $G_1 = F_1 \lambda \gamma$ setzen zu können.

Nun ist aber der Querschnitt sämmtlicher Hängestangen an CB zusammen genommen durch:

$$F_1 = \frac{qx}{s_1 - \lambda\gamma} \text{ annähernd } \frac{qx}{s_1}$$

gegeben, daher folgt das Gewicht derselben:

$$G_1 = \frac{\gamma\lambda}{s_1} qx,$$

und man hat, um es zu berücksichtigen, in der vorstehenden Rechnung überall anstatt qx den Werth:

$$\left(1 + \frac{\gamma\lambda}{s_1}\right) qx$$

einzuführen.

Anmerkung. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe mit Rücksicht auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen ist zu finden in „The Mechanical Principles of Engineering and Architecture by Moseley, London 1843". S. auch in Bd. I des Civilingenieurs die Abhandlung von Dr. O. Schlömilch über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit.

Beispiel. Für die Kettenbrücke in §. 69 erhält man, wenn in

$$log\,nat\,sec\,\psi = \frac{\gamma}{s} y; \;\; \gamma = 0{,}0000076$$

$s = 10$, und für y die ganze Pfeilhöhe $h = 4000$ mm eingesetzt wird:

$$log\,nat\,sec\,\psi = \frac{0{,}0000076}{10} 4000 = 0{,}00304$$

oder

$$log\,cos\,\psi = log \frac{1}{sec\,\psi} = 0 - \frac{0{,}00304}{2{,}302586} = -0{,}001320$$
$$= 9{,}998680 - 10;$$

daher

$$\psi^0 = 4^0\,27'\,30'' = 4{,}4584^0$$

und

$$\psi = \frac{2 \,.\, 3,1416 \,.\, 4,4584}{360} = 0,077814,$$

so daß nun nach (36), wenn man darin für x die halbe Spannweite 20 m = 20 000 mm einsetzt,

$$\gamma_1 = \left[\left(\frac{10 \,.\, 0,077814}{0,0000076 \,.\, 20\,000}\right)^2 - 1\right] 0,0000076 = 25,204 \,.\, 0,0000076$$

$$= 0,0001916 \text{ kg}$$

sich ergiebt.

Da die Belastung einer halben Kette 44 000 kg und das Gewicht der zugehörigen Hängestäbe 223 kg beträgt, so hat man die Belastung pro 1 mm der Länge:

$$q = \frac{44\,223}{20\,000} = 2,2112 \text{ kg},$$

und es ist der erforderliche Querschnitt der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{2,2112}{0,0001916} = 11\,540 \text{ qmm}.$$

Für den Aufhängewinkel α_1 hat man nach (39):

$$tg\, \alpha_1 = \sqrt{\frac{0,0000076 + 0,0001916}{0,0000076}}\, tg\, 4^0\, 27'\, 30'' = 5,11 \,.\, 0,07797$$

$$= 0,3984 = tg\, 21^0\, 43'.$$

Der Querschnitt der Kette am Aufhängepunkte ist nun:

$$F_1 = \frac{F_0}{cos\, \alpha_1} = \frac{11\,540}{0,9290} = 12\,422 \text{ qmm}.$$

Die Horizontalspannung der Kette folgt:

$$H = F_0 s = 115\,400 \text{ kg},$$

und die Verticalspannung im Aufhängepunkte:

$$V = H\, tg\, \alpha_1 = 115\,400 \,.\, 0,3984 = 45\,975 \text{ kg},$$

daher ist das Gewicht einer Kettenhälfte:

$$G = V - q\, l = 45\,975 - 44\,223 = 1752 \text{ kg}.$$

Bei constantem Querschnitte ergab sich $G = 1940$, folglich ist die Ersparniß an Material für jede Kette:

$$2\,(1940 - 1752) = 376 \text{ kg}$$

gleich ca. 10 Proc. des Kettengewichtes.

Pfeiler und Widerlager. Von besonderer Wichtigkeit ist noch die Bestimmung der Dimensionen der Pfeiler und der Widerlagsmauern einer Hängebrücke. Sind S_1 und S_2 die Spannungen der über einen Pfeiler $ABCD$ weggehenden Ketten, Fig. 364 (a. f. S.), und α_1 und α_2 ihre Neigungswinkel, so hat man den Verticaldruck auf den Pfeiler: §. 72.

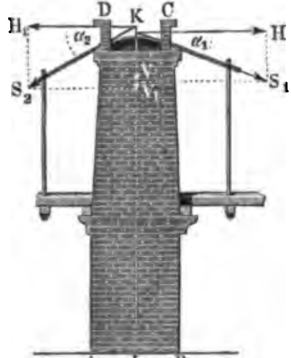
$$V = V_1 + V_2 = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2,$$

und den Horizontaldruck, da die Horizontalspannungen einander entgegenwirken:

$$H = H_1 - H_2 = S_1 \cos\alpha_1 - S_2 \cos\alpha_2.$$

Ist nun h die Höhe KL, b die Breite und d die Dicke AB eines Pfeilers, sowie dessen Dichtigkeit $= \gamma$, so hat man das Gewicht desselben:

Fig. 364.



$$G = d\,b\,h\,\gamma,$$

und den gesammten Verticaldruck:

$$V + G = S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2 + d\,b\,h\,\gamma.$$

Damit aber die Horizontalkraft:

$$H = H_1 - H_2$$

den Pfeiler nicht umstürze um die Kante B, ist es nöthig, daß das statische Moment

$$H.\overline{KL} = Hh = (S_1 \cos\alpha_1 - S_2 \cos\alpha_2)\,h$$

von dem statischen Moment

$$(V + G)\,\overline{BL} = (S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2 + d\,b\,h\,\gamma)\,\frac{d}{2}$$

übertroffen werde, daß also

$$d^2 + \frac{S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2}{b\,h\,\gamma}\,d > 2\,\frac{S_1 \cos\alpha_1 - S_2 \cos\alpha_2}{b\,\gamma}$$

oder

$$d^2 + \frac{V_1 + V_2}{b\,h\,\gamma}\,d = 2\,\sigma\,\frac{H_1 - H_2}{b\,\gamma}$$

sei, wobei σ den Stabilitätscoefficienten 2 bis 4 bezeichnet (s. §. 28).

Hiernach ist die nöthige Pfeilerdicke:

$$d = -\frac{V_1 + V_2}{2\,b\,h\,\gamma} + \sqrt{\frac{2\,\sigma\,(H_1 - H_2)}{b\,\gamma} + \left(\frac{V_1 + V_2}{2\,b\,h\,\gamma}\right)^2}.$$

Uebrigens ist der Sicherheit wegen für $S_1 \cos\alpha_1$ der größte und für $S_2 \cos\alpha_2$ der kleinste Werth zu setzen, also anzunehmen, daß die Kette einerseits vollständig und andererseits gar nicht belastet sei.

Diese Formel setzt voraus, daß die Kräfte S_1 und S_2 vollkommen übertragen werden auf den Pfeilerkopf, was allerdings nur eintritt, entweder wenn die Seilenden am Pfeilerkopf festsitzen, oder wenn die Reibung auf denselben die Differenz $S_1 - S_2$ der Spannungen übertrifft. Nach Thl. I ist diese Reibung:

$$F = \left[\left(1 + 2\,\varphi \sin\frac{\beta}{2}\right)^n - 1\right] S_2,$$

wenn φ den Reibungscoefficienten, n die Zahl der auf dem Pfeilerkopfe aufliegenden Kettenglieder und β den Centriwinkel bezeichnet, welcher einem Gliede entspricht; wenn daher

$$S_1 - S_2 < \left[\left(1 + 2\varphi \sin \frac{\beta}{2}\right)^n - 1\right] S_2$$

oder

$$S_1 < \left(1 + 2\varphi \sin \frac{\beta}{2}\right)^n S_2$$

ist, so legt sich die Kette fest auf den Pfeilerkopf auf; außerdem gleitet sie aber auf dem Pfeilerkopfe hin, und es ist deshalb in obige Formel:

$$S_1 = \left(1 + 2\varphi \sin \frac{\beta}{2}\right)^n S_2,$$

oder bei Seilen:

$$S_1 = e^{\varphi\alpha} S_2 \text{ (s. Thl. I)}$$

einzusetzen.

Legt man die Kette oder das Seil auf Rollen, so ist diese Differenz, und daher die nöthige Pfeilerstärke, viel kleiner. Sind die Rollenhalbmesser a und die Zapfenhalbmesser r, so hat man:

$$S_1 = S_2 + \varphi \frac{r}{a} (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2) = S_2 + \varphi \frac{r}{a} (V + V_1)$$

zu setzen, weil die auf den Rollenhalbmesser reducirte Zapfenreibung den Werth:

$$F = \varphi \frac{r}{a} (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2) \text{ hat.}$$

Besteht der Pfeiler in einem drehbaren Ständer, so ist statt r der Zapfenhalbmesser und statt a die Höhe des Ständers einzusetzen, und liegt das Seil auf Walzen, so hat man statt φr den Hebelarm $f = 0{,}5$ mm der wälzenden Reibung einzuführen, wobei auch a und r in Millimetern zu nehmen sind.

Aus der Spannung S der Spann- oder Endketten (Spann- oder Endseile) kann man auch noch die nöthigen Dimensionen der Widerlagsmauer AC, Fig. 365, bestimmen.

Fig. 365.

Die Spannung S sucht die Widerlagsmauer AC um die Kante C zu drehen, und wirkt dabei am Hebelarme:

$$CN = CD \sin \alpha = l \sin \alpha,$$

wenn α den Neigungswinkel SDC des Seiles gegen den Horizont und l die Länge CD der Mauer bezeichnet. Das Gewicht G der Mauer wirkt aber mit dem Momente:

$$G.\overline{CM} = hbl\gamma\,\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\,hbl^2\gamma$$

entgegen, wo h die Höhe BC, b die Breite und γ das specifische Gewicht der Mauer bezeichnet. Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$Sl\,sin\,\alpha = \frac{1}{2}\,hbl^2\gamma,$$

daher die nöthige Mauerlänge bei einem Stabilitätscoefficienten σ:

$$l = \frac{2\,\sigma\,S\,sin\,\alpha}{hb\gamma}.$$

Damit ferner dieselbe Mauer nicht fortgeschoben werde, muß ihre Reibung $\varphi\,(G - S\,sin\,\alpha)$ größer, als die Horizontalkraft $S\,cos\,\alpha$, also:

$$\varphi\,G > S\,(cos\,\alpha + \varphi\,sin\,\alpha)$$

sein. Man setzt hiernach:

$$l = \frac{\sigma\,S}{hb\gamma}\left(\frac{cos\,\alpha}{\varphi} + sin\,\alpha\right),$$

wobei $\varphi = 0,67$ und der Stabilitätscoefficient σ 2 bis 4 anzunehmen ist.

Wenn die Kette im Widerlagspfeiler nicht bloß befestigt, sondern auch aufgelagert ist, wie in Fig. 366, so ist der Hebelarm der Spannung S das Perpendikel $CL = c$, vom Stützpunkte C nach der Seilrichtung KL gefällt, und der Hebelarm des Pfeilergewichtes G die Hälfte CM der Pfeilerlänge $CE = l$, letztere, der Sicherheit wegen, nur bis zum Befestigungspunkte E des Seiles gemessen. Hiernach hat man

Fig. 366.

$$\frac{1}{2}\,hbl^2\gamma = Sc,$$

und daher mit Rücksicht auf Sicherheit

$$l = \sqrt{\frac{2\,\sigma\,S\,c}{hb\gamma}}.$$

In Hinsicht auf das Fortschieben über CE ist, wenn α die Neigung des Tragseiles KL gegen den Horizont bezeichnet:

$$\varphi\,(G + S\,sin\,\alpha) = S\,cos\,\alpha,$$

wonach

$$G = \frac{S \cos\alpha - \varphi S \sin\alpha}{\varphi},$$

und

$$l = \frac{\sigma S (\cos\alpha - \varphi \sin\alpha)}{\varphi h b \gamma}$$

folgt.

Beispiel. Bei der in dem Beispiele zu §. 71 berechneten Kettenbrücke fand sich die Verticalkraft der belasteten Kette:

$$V_1 = 45\,975 \text{ kg},$$

und die der unbelasteten zu:

$$V_2 = V_1 - 20.1200 = 21\,975 \text{ kg}.$$

Wird nun für die Rollen des Pfeilerkopfes $\frac{r}{a} = \frac{1}{4}$ und $\varphi = \frac{1}{4}$ angenommen, so ist die Zapfenreibung daselbst:

$$F = \varphi \frac{r}{a} (V_1 + V_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\, 45\,975 + 21\,975 = 4244 \text{ kg}$$

viel kleiner, als die Differenz der Spannungen. Es tritt daher eine Umdrehung der Rollen und Bewegung der Kette ein, wobei deren Spannung auf der einen Seite des Pfeilers sich vergrößert, auf der anderen abnimmt, so lange bis die Differenz der beiden Horizontalspannungen $H_1 - H_2$ den Betrag von 4244 kg erreicht. Ist nun die Pfeilerhöhe gleich 5 m, die Breite gleich 1,2 m und das specifische Gewicht der Mauermasse $\gamma = 2$, so hat man:

$$V_1 + V_2 = 67\,950 \text{ kg}, \quad b h \gamma = 1{,}2 . 5 . 2000 = 12\,000 \text{ kg}$$

und

$$H_1 - H_2 = F = 4244 \text{ kg},$$

so daß sich für einen Stabilitätscoefficienten $\sigma = 4$ die erforderliche Pfeilerdicke berechnet zu:

$$d = -\frac{67\,950}{2 . 12\,000} + \sqrt{\frac{2 . 4 . 4244}{1{,}2 . 2000} + \left(\frac{67\,950}{24\,000}\right)^2} = -2{,}83 + 4{,}71 = 1{,}88 \text{ m}.$$

Für die Widerlagsmauer der Spannkette, Fig. 365, erhält man, wenn $h = 5$ m, $b = 3$ m und der Neigungswinkel α gleich demjenigen α_1 der Tragketten am Pfeilerkopfe zu $21^0\, 43'$ angenommen, also $S \sin\alpha_1 = 45\,975$ kg gesetzt wird, für einen Stabilitätscoefficienten $\sigma = 2$:

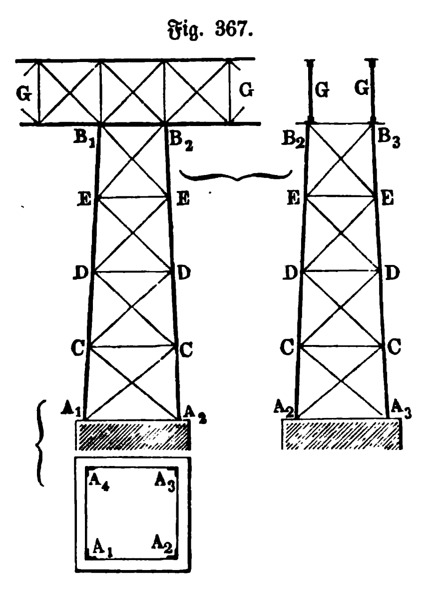
$$l = \frac{2 . 2 . 45\,975}{5 . 3 . 2000} = 6{,}13 \text{ m}.$$

Hinsichtlich der Pfeiler von Bogenbrücken wurde bereits in §. 64 die ungünstigste Belastungsart festgestellt und daselbst bemerkt, daß die Dimensionen dieser Pfeiler in derselben Art zu bestimmen sind, welche in Bezug auf die Widerlager der Gewölbe in §. 28 angeführt wurde.

Es sollen hier nur noch die sogenannten Fachwerkspfeiler erwähnt werden, welche man in neuerer Zeit vielfach, namentlich bei hohen in Eisen ausgeführten Wegeüberführungen zur Anwendung bringt.

Ein solcher Fachwerkspfeiler besteht im Allgemeinen aus vier in den Ecken A_1, A_2, A_3 und A_4, Fig. 367, des rechteckigen Pfeilergrundrisses aufgestellten Stielen AB, welche nach oben gegen einander schwach geneigt sind, und deren obere Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 die Ecken eines rechteckigen Rahmens bilden, auf welchem die Brückenträger GG ruhen. Diese Stiele sind in verschiedenen Höhen etagenweise durch die rahmenförmigen Querverbindungen C, D, E vereinigt, und endlich sind die auf diese Weise entstehenden trapezförmigen Felder der vier Seitenflächen des Pfeilers durch gekreuzte Diagonalen wie CD, DE ... versteift. Auch pflegt man wohl durch das Innere des Pfeilers derartige schräg stehende Zugbänder zwischen den diametral gegenüber stehenden Ständern anzubringen. Die Diagonalen werden wegen der gekreuzten Anordnung stets nur auf Zug beansprucht, und zwar wird je nach der Angriffsweise der äußeren Kräfte von je zwei gekreuzten Bändern bald das eine, bald das andere zur Wirkung kommen, in gleicher Art, wie dies im Vorstehenden in Bezug auf die Diagonalen der Fachwerksträger mehrfach besprochen worden ist.

Fig. 367.



Die äußeren Kräfte, welche diese Pfeiler angreifen, sind außer dem Eigengewichte der Pfeilertheile selbst das Gewicht der Brücke nebst der darauf befindlichen Verkehrslast, sowie der Druck des Windes gegen die Pfeiler, die Brückentheile, und gegen die auf der Brücke befindlichen Wagen. Außerdem ist hierzu natürlich bei Bogenbrücken noch der Horizontalschub der Bogenträger zu rechnen.

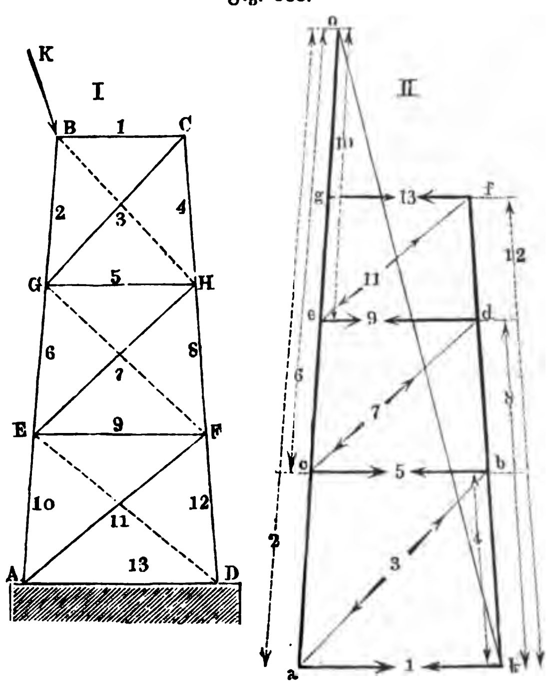
Kennt man diese angreifenden Kräfte, für welche man für die Construction die ungünstigsten Werthe zu Grunde zu legen hat, so wird man dieselben nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in solche Componenten zerlegen können, welche in die Ebenen der vier Seitenflächen des obeliskenförmigen Pfeilers hineinfallen.

Ist dies geschehen, so kann man eine solche Seitenwand des Pfeilers in ähnlicher Weise behandeln, wie einen Fachwerksträger, und es gelten die für

die letzteren angeführten Regeln auch hierfür. Am einfachsten wird auch hier die graphische Ermittelung zur Kenntniß der die einzelnen Constructionsglieder angreifenden Kräfte führen, und es genügt dazu in der Regel die bloße Verzeichnung des zugehörigen Kräftepolygons.

Als Beispiel sei durch *ABCD*, Fig. 368, I, eine solche Seitenwand eines Fachwerkpfeilers dargestellt, und angenommen, daß die auf dieses

Fig. 368.



Fachwerk in dessen Ebene wirkende resultirende äußere Kraft durch K' dargestellt sei. Es mag hier bemerkt werden, daß man auf etwaige senkrecht zu der Ebene *ABCD* wirkende Kraftcomponenten nicht zu rücksichtigen hat, indem diese Componenten sich immer zu solchen Mittelkräften zusammensetzen lassen, welche in die Ebenen der an *ABCD* anstoßenden Pfeilerwände hineinfallen.

Bei der vorausgesetzten Richtung der Kraft *K* ist es leicht einzusehen, daß die ausgezogenen Diagonalen *AF*, *EH*, *GC* in Spannung versetzt werden, während die punktirten Diagonalen *ED*, *GF* und *BH* wirkungslos sind. Demgemäß ergiebt sich also die Zeichnung des Kräftepolygons, Fig. 368, II, leicht wie folgt. Macht man der Richtung und Größe nach

entsprechend dem gewählten Kräftemaßstabe $ok = K$, und zieht oa parallel BA und durch k eine Parallele mit BC, so erhält man in $oa = 2$ die Druckkraft 2 in BG, während $ak = 1$ die Pressung 1 in dem horizontalen Gliede BC ergiebt. Letztere Kraft $ak = 1$ zerlegt sich nun wieder durch Parallelen mit GC und CD in die Zugspannung $ab = 3$ der Diagonale GC und die Druckspanuung $bk = 4$ in dem Ständerstücke CH.

Zerlegt man weiter die Zugkraft $ab = 3$ nach $ac \parallel AB$ und $cb \parallel GH$, so erhält man in $cb = 5$ die Druckkraft in GH, während das Stück $oc = 6$ diejenige Druckkraft angiebt, welche das Stück GE des Stiels AB unterhalb G zusammmenpreßt. Fährt man in dieser Weise fort, indem man $cd \parallel EH$, $de \parallel EF$, $ef \parallel AF$ und $fg \parallel AD$ zieht, so erhält man in den einzelnen Strecken des Kräftepolygons die Anstrengungen für die entsprechenden Fachwerksglieder. Die in Fig. I und II eingetragene gemeinsame Nummerirung läßt keinen Zweifel über die einzelnen Kräfte bestehen, und es wurden der Deutlichkeit wegen auch hier Druckspannungen durch stärkere, Zugspannungen durch schwächere Linien dargestellt.

§. 73. **Kuppeldächer.** Die kuppelförmigen Dächer, wie sie zur Ueberdeckung von Gebäuden kreisförmigen Grundrisses, z. B. Gasometergebäuden, Locomotivschuppen 2c. angewendet werden, haben immer die Form von Umdrehungskörpern mit verticaler Axe, und zwar kann der Meridianschnitt ebensowohl ein Kreisbogen wie auch eine andere Curve sein. Die Ueberdeckung geschieht hier mit Hülfe einer Anzahl von Sparren oder Tragrippen, welche, in Meridianebenen gelegen, von einander um gleiche Centriwinkel abstehen, an den äußeren Enden auf der unterstützenden Umfassungsmauer aufruhen, und im Innern entweder in einem Punkte der Axe zusammentreffen oder sich gegen einen centralen Schlußring stemmen, welcher etwa zur Anbringung eines Oberlichtes, Laterne, eingesetzt ist. Diese Sparren oder Rippen unterscheiden sich von gewöhnlichen Fachwerksträgern, welche man etwa diagonal und in der Mitte sich durchsetzend über dem Raume anordnen könnte, dadurch, daß ihnen die Untergurtung fehlt, und daß deren Zugkraft ersetzt ist entweder durch die Widerstandsfähigkeit der Umfassungsmauern oder durch die Spannkraft eines auf den letzteren gelagerten horizontalen eisernen Mauerringes, in ähnlicher Art, wie dies bereits in §. 30 gelegentlich der Kuppelgewölbe besprochen worden ist. Solche horizontale Ringe, welche Parallelkreise der Kuppelfläche darstellen, sind außerdem zwischen dem Auflager und dem Pole oder Scheitel der Kuppel noch mehrere zwischen den meridionalen Sparren angeordnet, die letzteren dadurch gegen einander versteifend. Die Decke der Kuppel wird dann ähnlich wie bei anderen Dächern durch Pfetten unterstützt, welche, auf

den Sparren befestigt, ebenfalls nach Parallelkreisen der Kuppelfläche angeordnet sind.

Zur Bestimmung der in den Constructionsgliedern eines Kuppeldaches wirkenden Kräfte sei zunächst allgemein eine homogene Kuppelfläche*) von geringer Dicke betrachtet, und vorausgesetzt, daß dieselbe rings um die Axe vollkommen symmetrisch belastet sei, und zwar sei das Gewicht für jede Flächeneinheit der Kuppelfläche incl. Schnee ꝛc. mit q bezeichnet. Durch diese Belastung werden in dem Materiale der Kuppel gewisse elastische Spannungen erzeugt, welche für den Zustand des Gleichgewichts an jedem Elemente der Fläche mit der Belastung dieses Elementes im Gleichgewichte stehen. Für die folgende Untersuchung ist die Annahme gemacht, daß bei der gedachten symmetrischen Belastung diese elastischen Kräfte in jedem Punkte in die Tangentialebene der Kuppelfläche daselbst hineinfallen, das Material daselbst also nur direct durch Zug- oder Druckkräfte, nicht aber durch Biegungsmomente in Anspruch genommen wird. Unter dieser Voraussetzung kann man alle auf ein Element der Fläche wirkenden elastischen Spannungen nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zerlegen, von denen die eine horizontal und tangential an den betreffenden Parallelkreis, die andere tangential an die zugehörige Meridianlinie des betrachteten Punktes gerichtet ist. Es mögen diese Spannungen pro Längeneinheit beziehungsweise mit p (nach dem Parallelkreise) und mit s (nach dem Meridian oder Sparren) bezeichnet werden, und es wird sich darum handeln, die Abhängigkeit dieser Spannungen von der Belastung q sowohl wie von der Form der Kuppelfläche und der Lage des betrachteten Punktes in der letzteren zu ermitteln.

Zu dem Ende sei für die Meridianlinie einer Kuppelfläche ABC, Fig. 369 (a. f. S.), der Scheitel C als Coordinatenanfang und die Umdrehungsaxe CC_0 der Kuppelfläche als Y Axe gewählt. Man denkt sich durch zwei um den kleinen Winkel $\omega = EC_1F$ gegen einander geneigte Meridianebenen EC_1 und FC_1 aus der Kuppelfläche einen schmalen sectorenförmigen Streifen herausgeschnitten und betrachtet das trapezförmige Element desselben, welches durch die beiden um ∂y von einander entfernten Parallelkreise von den Halbmessern $BB_0 = x$ und $DD_0 = x + \partial x$ begrenzt wird. Dieses Element, das in Fig. 369 III besonders gezeichnet ist, hat die Größe:

$$\partial F = x \omega \partial b, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

*) Die hier folgende Darstellung schließt sich in der Hauptsache an die Untersuchung von Schwedler, „Die Construction der Kuppeldächer“, in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, 1866, an.

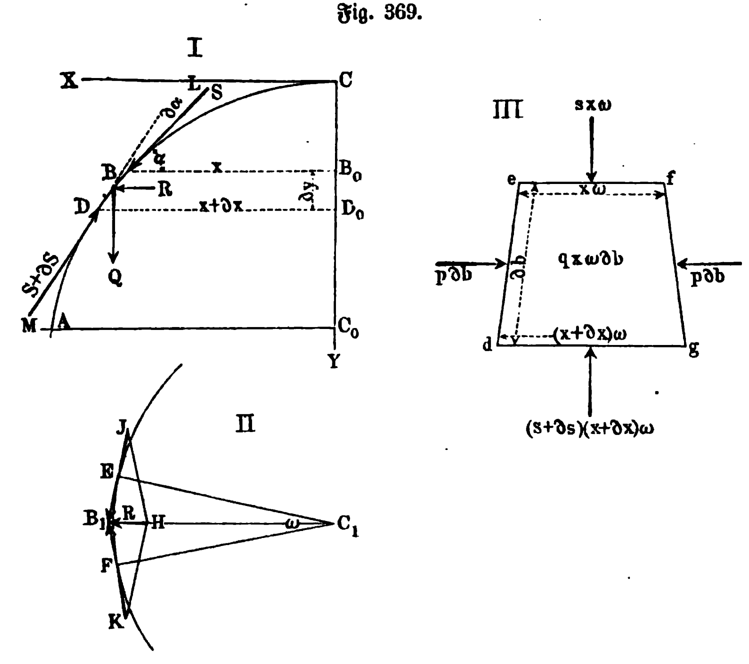
wenn mit ∂b das Bogenelement BD der Meridianlinie bezeichnet wird. Es wirkt daher in diesem Elemente als Belastung die Kraft:

$$Q = q \partial F = q x \omega \partial b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

vertical abwärts.

Außerdem wirken auf die vier Seiten des betrachteten Elementes nach dem Vorhergehenden vier Kräfte, von denen die beiden in der Ebene des

Fig. 369.



Parallelkreises wirkenden wegen der symmetrischen Belastung übereinstimmend die Größe:

$$P = p \partial b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

haben, und deren Richtungen JB_1 und KB_1 in II um den kleinen Winkel ω geneigt sind. Die beiden anderen in der Ebene des Meridians wirkenden Kräfte sind ausgedrückt durch:

$$S = s x \omega = LB \text{ auf } ef \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und durch:

$$S + \partial S = (s + \partial s)(x + \partial x)\, \omega = MD \text{ auf } dg \quad . \quad . \quad (5)$$

Um für diese fünf Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, kann man die beiden gleichen Spannungen JB_1 und KB_1 auf de und fg zu einer Mittelkraft HB_1 zusammensetzen, welche horizontal und radial ge-

richtet sein muß, und deren Größe R sich nach Fig. 369 II aus der Proportion:

$$JB_1 : HB_1 = C_1E : EF, \text{ d. h. } P : R = x : x\omega$$

zu

$$R = P\omega = \omega p \partial b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ergiebt.

Die vier auf das Element wirkenden Kräfte Q, S, $S + \partial S$ und R liegen sämmtlich in der Meridianebene, und es gelten daher für dieselben die betreffenden Gleichgewichtsbedingungen. Setzt man zunächst die Summe aller verticalen Kraftcomponenten gleich Null, so wird:

$$Q + S \sin \alpha - (S + \partial S) \sin (\alpha + \partial \alpha) = 0.$$

Da $\sin (\alpha + \partial \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha \partial \alpha = \sin \alpha + \partial (\sin \alpha)$ ist, so erhält man, da $\partial S \partial \alpha$ als klein höherer Ordnung verschwindet:

$$Q + S \sin \alpha - S \sin \alpha - S \partial (\sin \alpha) - \sin \alpha \partial S = 0$$

oder

$$Q = S \partial (\sin \alpha) + \sin \alpha \partial S = \partial (S \sin \alpha),$$

und wenn man darin für Q und S die Werthe aus (2) und (4) einsetzt und durch ω beiderseits dividirt:

$$q x \partial b = \partial (s x \sin \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

In derselben Weise erhält man wegen der Gleichheit der horizontalen Componenten aus:

$$R + S \cos \alpha = (S + \partial S) \cos (\alpha + \partial \alpha) = (S + \partial S)(\cos \alpha + \partial \cos \alpha)$$

$$R = S \partial (\cos \alpha) + \cos \alpha \partial S = \partial (S \cos \alpha),$$

und nach Einführung der Werthe für R und S aus (6) und (4):

$$p \partial b = \partial (s x \cos \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) erhält man für eine bestimmte Kuppelschale vom Halbmesser $B_0 B = x$, für welche die Bogenlänge CB des Meridians durch b ausgedrückt sein mag, durch Integration zwischen den Grenzen s und 0 die Ausdrücke:

$$s x \sin \alpha = \int_0^b q x \partial b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und

$$s x \cos \alpha = \int_0^b p \partial b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese beiden Gleichungen können dazu dienen, bei gegebener Form und Belastung der Kuppel die Größe der Spannungen s und p zu bestimmen. Als Beispiel möge eine kreisbogenförmige Meridianlinie ABC vom Halb-

messer r angenommen werden. Für diesen Fall ist $x = r \sin \alpha$ und die Bogenlänge $b = r\alpha$, daher $\partial b = r \partial \alpha$. Mit diesen Werthen, und wenn man q constant annimmt, erhält man aus (9):

$$s\, r \sin^2 \alpha = \int_0^\alpha q\, r^2 \sin \alpha\, \partial \alpha = q\, r^2\, (1 - \cos \alpha),$$

woraus

$$s = q\, r\, \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{q\, r}{1 + \cos \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (9^a)$$

folgt.

Setzt man diesen Werth in (8) für s ein, so erhält man:

$$p\, r\, \partial \alpha = \partial \left(q\, r\, \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\, r \sin \alpha \cos \alpha \right) = q\, r^2 \partial\, \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Nun ist:

$$\partial\, \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha}\, \partial \alpha$$

$$= \left(\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \partial \alpha,$$

folglich

$$p = q\, r \left(\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \quad \ldots \ldots \quad (10^a)$$

Da nach (9^a) s immer positiv ist, so ist dies ein Zeichen, daß die nach der Tangente des Meridians wirkende Kraft immer, wie in der Fig. 369 angenommen worden ist, in das Element hinein gerichtet ist, daher überall eine Druckkraft vorstellt. Diese specifische Spannung ist für den Scheitel mit $\alpha = 0$ gleich $s = q\, \frac{r}{2}$, für den Aequator mit $\alpha = 90^0$, $s = q\, r$ und sie wächst mit zunehmendem α bis zu dem Werthe ∞ für $\alpha = 180$.

Die Spannung p dagegen nach der Richtung der Parallelkreise hat für den Scheitel mit $\alpha = 0$ ihren größten positiven Werth von ebenfalls $p = \frac{q\, r}{2} = s$, und nimmt mit wachsendem α ab bis zu Null für einen Winkel, welcher aus:

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 + \cos \alpha},$$

oder aus

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 0{,}618$$

zu

$$\alpha = 51^0\, 50'$$

folgt. Bei weiterer Zunahme von α wird p negativ, d. h. die Druckspannung geht von hier aus in eine Zugspannung über, welche für den Aequator mit $\alpha = 90^0$ den Werth $- q r$ annimmt, von gleicher absoluter Größe mit s daselbst. Ein ähnliches Verhalten wurde schon in §. 30 gelegentlich der Betrachtung der Kuppelgewölbe gefunden.

Wenn die Kuppel, wie es bei den Ausführungen häufig der Fall ist, sehr flach, d. h. wenn die Pfeilhöhe h im Vergleiche mit dem größten Halbmesser r nur klein ist, so kann man die Belastung q mit genügender Genauigkeit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilt denken, und in (2) die Belastung des Elementes von der Größe $\partial F = \omega x \partial x$ zu $Q = q \omega x \partial x$ annehmen. Bezeichnet man nunmehr mit p_1 die Spannung in der Richtung des Parallelkreises bezogen auf die Einheit der horizontalen Abscisse x, so hat man nach Fig. 370 die Beziehung $p \partial b = p_1 \partial x$. Wenn man ferner die horizontale Componente der Meridianspannung:

Fig. 370.

$$s \cos \alpha = s_1, \text{ alſo } s \sin \alpha = s_1 \, tg \, \alpha = s_1 \frac{\partial y}{\partial x}$$

setzt, so gehen mit diesen Werthen die Gleichungen (7) und (8) über in:

$$q x \partial x = \partial \left(s_1 x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7^a)$$

und

$$p_1 \partial x = \partial (s_1 x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8^a)$$

woraus man durch Integration zwischen den Grenzen x und 0 erhält:

$$s_1 x \frac{\partial y}{\partial x} = \int_0^x q x \partial x = q \frac{x^2}{2},$$

also

$$s_1 \frac{\partial y}{\partial x} = q \frac{x}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7^b)$$

und

$$s_1 = \frac{1}{x} \int_0^x p_1 \partial x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8^b)$$

Nimmt man beispielsweise eine Parabel von der Pfeilhöhe h und Spannweite $2 r$ für die Meridianlinie an, hat man also:

$$\frac{y}{h} = \frac{x^2}{r^2} \text{ und daraus } \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{h x}{r^2},$$

so erhält man damit aus (7 b):

$$s_1 \, 2 \, \frac{hx}{r^2} = q \, \frac{x}{2} \text{ oder } s_1 = \frac{q\,r^2}{4\,h},$$

unabhängig von x, d. h. die horizontale Componente der Meridianspannung ist für alle Punkte der Kuppel von constanter Größe und zwar genau halb so groß als die Horizontalspannung eines parabolischen Bogens von gleichen Abmessungen (s. §. 65). Aus (8 a) folgt für diesen Fall, wo s_1 constant ist, ferner $p_1 = s_1$, d. h. in jedem Punkte der paraboloidischen Kuppelfläche ist auch der Druck nach der Richtung des Parallelkreises constant und von derselben Größe $\frac{q\,r^2}{4\,h}$ mit dem horizontalen Meridionaldrucke. Das Material wird sonach in dieser Kuppel nach allen Richtungen gleich stark gedrückt.

Man kann hier die Frage aufwerfen, nach welcher Form die Kuppel auszuführen ist, damit ein Druck in der Richtung der Parallelkreise überhaupt nicht stattfindet. Diese Frage beantwortet sich sofort, wenn man in (8 a) $p_1 = 0$ setzt, wodurch man:

$$0 = \partial\,(s_1 x) \text{ oder } s_1 x = C$$

erhält, unter C eine noch zu bestimmende Constante verstanden. Mit $s_1 = \frac{C}{x}$ erhält man alsdann aus (7 b):

$$C \, \partial\, y = \frac{1}{2} \, q \, x^2 \, \partial\, x$$

oder

$$C y = \frac{q}{6} \, x^3.$$

Die Constante C bestimmt sich dadurch, daß $x = r$ und $y = h$ zusammengehörige Werthe sind, zu:

$$C = \frac{q}{6\,h} \, r^3$$

und man erhält somit für die Meridianlinie die Gleichung:

$$\frac{y}{h} = \frac{x^3}{r^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

einer cubischen Parabel.

Eine nach dieser Linie ausgeführte Kuppel hat die Eigenschaft, daß man sie durch beliebige Meridianschnitte in sectorenförmige Streifen zerschneiden kann, ohne das Gleichgewicht zu stören, da in den Schnittflächen keinerlei Spannungen auftreten. Es fallen nämlich nicht bloß die auf diesen Schnittflächen senkrechten Kräfte p_1 fort, sondern es können auch keine in diesen Schnittflächen wirkenden Schubkräfte auftreten, wie man sich leicht folgenderart überzeugt. Schneidet man aus der Kuppelfläche durch zwei um den

kleinen Winkel ω geneigte Meridianebenen einen sectorenförmigen Streifen heraus, welcher im Halbmesser r den Querschnitt f haben möge, so ist der radiale Horizontaldruck an dieser Stelle auf den Querschnitt durch

$$f s_1 = f \frac{C}{r} = f \frac{q}{6h} r^2$$

ausgedrückt. Für irgend einen anderen Halbmesser x ist der Querschnitt durch $f \frac{x}{r}$ und die specifische Spannung durch

$$s_1 = \frac{C}{x} = \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x}$$

gegeben, folglich ist die gesammte Horizontalpressung ebenfalls durch

$$f \frac{x}{r} \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x} = f \frac{q}{6h} r^2$$

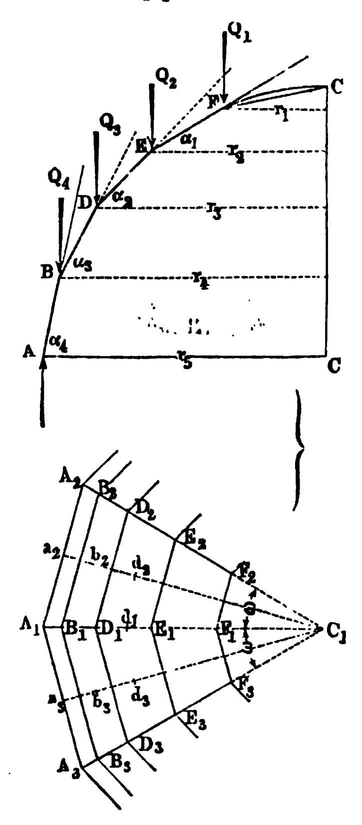
dargestellt. Diese Eigenschaft eines constanten Horizontaldrucks in jedem Streifen oder Sparren läßt die cubische Parabel als eine zweckmäßige Kuppelform erscheinen. Es muß indessen bemerkt werden, daß bei dieser Kuppelform der specifische Druck $s_1 = \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x}$ nach dem Scheitel hin zunimmt und im Scheitel selbst mit $x = 0$ unendlich groß werden würde. Wegen der beschränkten Festigkeit des Materials wird man daher diese Kuppelform nicht bis zum Scheitel, sondern nur bis zu einem gewissen, von der Widerstandsfähigkeit des Materials abhängigen Halbmesser fortsetzen dürfen, indem man den mittleren Raum durch eine besondere Kuppelschale von anderer Form oder durch eine Laterne ausfüllt, gegen deren Ring die äußere Kuppel sich anlehnt.

Die vorstehenden, für eine homogene Kuppelfläche gültigen Ermittelungen können nunmehr dazu dienen, für die in Wirklichkeit ausgeführten kuppelförmigen Dachconstructionen die Kräfte in den einzelnen Tragrippen oder Sparren und in den zwischen denselben angeordneten Ringen zu finden.

Es sei etwa durch $ABDEF$ (Fig. 371, a. f. S.) einer von den n Sparren einer solchen Kuppel dargestellt, an welchen sich in den Knotenpunkten A, B, D, E und F die polygonalen Ringe $A_2 A_1 A_3$, $B_2 B_1 B_3$ ... anschließen, deren innerster F eine Laterne stützen möge. Man hat sich alsdann vorzustellen, daß in irgend einem Sparren, wie $A_1 F_1$, diejenige Spannung s auftritt, welche beim Vorhandensein einer homogenen Kuppelschale in dem Ausschnitte $a_2 C_1 a_3$ auftreten würde, unter a_2 und a_3 die Mitten von $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ verstanden; d. h. man hat, um die Kraft des Sparrens $A_1 F_1$ in irgend einem Felde, etwa zwischen D und E zu finden, die nach den Gleichungen (9) und (10) zu ermittelnde specifische Spannung s mit dem

mittleren Abstande $d_2 d_3$ zweier Sparren daselbst zu multipliciren. Bezeichnet man die Abscisse $C_1 d_1$ der Mitte zwischen D und E mit x, so ist die Bogenlänge zwischen d_2 und d_3 bei n Sparren durch $x \frac{2\pi}{n}$ gegeben, und man hat daher die Sparrenkraft daselbst zu

Fig. 371.



$$S = s \frac{2\pi x}{n}$$

zu setzen. In gleicher Weise hat man die Kraft P in einem Ringtheile, wie $D_1 D_3$ gleich $p \,.\, b_3 d_3$, zu setzen, wenn p die aus (9) und (10) zu ermittelnde specifische Pressung nach der Richtung der Parallelkreise bei D bedeutet. Eine solche Bestimmung der Kräfte S und P in den Sparren und Ringen aus den allgemeinen Gleichungen der homogenen Kuppelfläche giebt natürlich nur annähernd richtige Resultate, welche den wirklichen Werthen um so näher kommen, je größer die Zahl der Sparren und der Ringe ist. Da nun aber in der Ausführung aus constructiven Rücksichten diese Zahl gewöhnlich nur gering angenommen wird, indem man meist nur 4 bis 6 Ringe und 16 bis 24 Sparren anzuwenden pflegt, so empfiehlt es sich, die Bestimmung der Kräfte S und P direct und ohne Benutzung der allgemeinen Formeln für die homogene Kuppelfläche vorzunehmen, was in folgender Weise geschehen kann.

Es seien die Halbmesser der in F, E, D, B und A angeordneten Ringe mit r_1, r_2, r_3, r_4 und r_5 bezeichnet, so kann man sich die ganze Kuppel in ringförmige Zonen getheilt denken, deren Gewichte als Belastungen für die einzelnen Ringe anzusehen sind. Diese Zonen hat man mitten zwischen den Knotenpunkten durch Kreise begrenzt zu denken, deren Halbmesser also

$$\frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \frac{r_2 + r_3}{2}, \quad \frac{r_3 + r_4}{2} \text{ und } \frac{r_4 + r_5}{2}$$

sind. Hat man die Gewichte dieser einzelnen Zonen, von denen die innerste die etwa daselbst angeordnete Laterne aufnimmt, festgesetzt, so findet man bei n Sparren in den $n$ten Theilen dieser Gewichte diejenigen Belastungen, welche in den einzelnen Knotenpunkten F, E, D, B und A jedes Sparrens wirksam sind. Es mögen diese Belastungen bezw. durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 ausgedrückt sein. Bezeichnet man ferner mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 die Neigungswinkel der Sparren in den entsprechenden Knotenpunkten gegen den Horizont, so erkennt man ohne Weiteres, daß man für die Pressungen S in den Sparren die Beziehungen hat:

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{Q_1}{\sin\alpha_1} \text{ für } EF \\
S_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{\sin\alpha_2} \text{ für } DE \\
S_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\sin\alpha_3} \text{ für } BD \\
S_4 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{\sin\alpha_4} \text{ für } AB
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Die Belastung Q_5 des untersten, auf der Mauer gelegenen Ringes A hat keinen Einfluß auf die Constructionsglieder, da sie direct von der Mauer aufgenommen wird.

Ebenso findet man die Ringspannungen P mit Rücksicht darauf, daß die horizontale Componente jeder Sparrenkraft S durch die beiden anschließenden Ringspannungen P aufgenommen werden muß, also aus der allgemeinen Gleichung

$$S\cos\alpha = 2P\sin\frac{\omega}{2},$$

wenn $\omega = \frac{2\pi}{n}$ den Mittelpunktswinkel zwischen zwei Sparren bedeutet.

Demnach wird der unterste auf der Mauer gelegene Ring A mit einer Kraft P_5 gezogen, welche zu

$$P_5 = \frac{S_4\cos\alpha_4}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{2\sin\frac{\pi}{n}}\operatorname{cotg}\alpha_4 \quad . \; . \quad (13)$$

sich bestimmt. Der innerste Ring F dagegen, welcher die Laterne trägt, und gegen welchen sich die Sparren nur von außen stemmen, ist einer Druckkraft P_1 ausgesetzt, welche bestimmt ist durch

$$P_1 = \frac{S_1\cos\alpha_1}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\operatorname{cotg}\alpha_1 \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Was die übrigen Ringe, z. B. denjenigen E anbetrifft, so wird derselbe durch die Belastung des innerhalb gelegenen Kuppeltheils einer Zugspannung

$$P_2' = \frac{S_1 \cos \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

und durch den Druck der außen herantretenden Sparrentheile DE einer Druckkraft

$$P_2'' = \frac{S_2 \cos \alpha_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 + Q_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \operatorname{cotg} \alpha_2,$$

also einer resultirenden Spannung

$$P_2 = P_2' - P_2'' = \frac{Q_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - (Q_1 + Q_2) \operatorname{cotg} \alpha_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}}, \quad (15)$$

ausgesetzt.

Ob diese Kraft einen Zug oder Druck darstellt, hängt vorzugsweise von der Größe der Winkel α, d. h. von der Form der Kuppel ab, und es wurde bereits im Vorstehenden gefunden, daß diese Ringspannung überall gleich Null ist, wenn die Meridianlinie nach einer cubischen Parabel gebildet ist, während eine kreisförmige Gestalt der Meridianlinie in den oberen Ringen der Kuppel (bis $\alpha = 51^0\ 50'$) Druckspannungen, in den unteren dagegen Zugspannungen zur Folge hat.

In dem Vorstehenden ist immer angenommen worden, daß die Kuppel vollständig und gleichförmig um die Axe herum durch die größte Belastung angegriffen werde. Es läßt sich aus den angegebenen Ermittelungen und den Gleichungen (12) erkennen, daß die Sparren bei dieser größten Belastung auch ihren größten Anstrengungen ausgesetzt sind. Anders verhält es sich mit der Anstrengung der Ringe. Die Gleichung (15) zeigt nämlich, daß der Werth $P = P' - P''$ für einen mittleren Ring seinen größten Betrag (größte Zug- oder kleinste Druckspannung) annimmt, wenn P' möglichst groß und P'' möglichst klein ist, d. h. wenn der Theil innerhalb des Ringes mit der größten Belastung (Schnee, Wind), der Theil außerhalb des Ringes dagegen mit der kleinsten Belastung, d. h. nur durch sein Eigengewicht belastet ist. Umgekehrt stellt sich in einem Ringe die größte Pressung (bezw. kleinste Spannung) ein, wenn der außerhalb gelegene Theil der Kuppel der größten und der innerhalb gelegene Theil der kleinsten Belastung ausgesetzt ist.

Im Vorhergehenden ist immer eine symmetrisch um die Axe vertheilte Belastung der Kuppel vorausgesetzt worden. So lange dieser Zustand vor-

handen ist, treten die Spannungen nur in den Sparren oder Meridianen und in den Ringen oder Parallelkreisen auf. Wenn indessen einseitige Belastungen statt finden, so stellen sich gewisse andere Spannungen ein, welche nicht mehr mit den Seiten der einzelnen Vierecke zusammenfallen, in welche die Kugelfläche durch die Sparren und Ringe zerlegt ist. Um daher einer Verschiebung dieser Vierecke entgegen zu treten, sind die letzteren mit Diagonalen zu versehen, und zwar hat man in jedem Felde zwei gekreuzte Diagonalen anzuordnen, wenn dieselben nur auf Zug als Bänder beansprucht werden sollen.

Die Ermittelung der Spannungen in diesen Diagonalen ist mit großen Schwierigkeiten der Rechnung verbunden, und es soll hier nur die von Schwedler angegebene Bestimmung der äußersten Grenzen angeführt werden, welche diese Spannungen höchstens werden erreichen können. Danach findet die ungünstigste Beanspruchung einer Diagonale für denjenigen Belastungszustand der Kuppel statt, für welchen von den beiden Hälften, in welche die Kuppel durch eine Diametralebene getheilt wird, welche die gedachte Diagonale schneidet, die eine Hälfte gar nicht, die andere Hälfte mit der größten Belastung angegriffen wird. Von den beiden Sparrenstücken, welche die Diagonale zwischen sich enthalten, ist dann das eine mit der größeren Kraft S_{max}, das andere mit derjenigen S_{min} gepreßt, welche Werthe man nach (12) berechnen kann, wenn man das eine Mal die ganze Kuppel gleichförmig mit der größten Last (Eigengewicht und zufällige Last), das andere Mal mit der kleinsten Belastung (Eigengewicht allein) belastet denkt. Würde man annehmen, daß diese Differenz $S_{max} - S_{min}$ lediglich durch die Diagonale aufgenommen würde, so erhielte man die größte Zugkraft dieser unter dem Winkel β gegen die Sparren geneigten Diagonale zu

$$T = \frac{S_{max} - S_{min}}{\cos \beta},$$

welcher Betrag in Wirklichkeit aber nie erreicht werden wird.

Hinsichtlich der Ausführung von Kuppeldächern muß auf den schon oben angeführten Artikel in der Zeitschrift für Bauwesen, 1866, verwiesen werden.

Schlußanmerkung. Zum weiteren Studium der Statik der Holz- und Eisenconstructionen sind folgende Schriften zu empfehlen: Eytelwein's Statik Bd. II., Gerstner's Mechanik Bd. I. und Kaiser's Handbuch der Statik. Ferner Navier, Resumé des leçons sur l'application de la mécanique. Part. I, Paris 1833, auch deutsch von Westphal unter dem Titel: Mechanik der Baukunst, ferner Rebhann, Theorie der Holz- und Eisenconstructionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. Wien 1856, Ardant, Theoretisch praktische Abhandlungen über Anordnung und Construction der Sprengwerke von großer Spannweite, aus dem Französischen von v. Kaven, Hannover 1844. Ausführlich über Dachconstructionen ist die Schrift von Winter, Berlin 1862.

Aeltere Werke sind: Elementary Principles of Carpentary etc. by Th. Tredgold, London 1820. Persy, Cours de stabilité des constructions. Sganzin, Cours des constructions. Cresy, An Encyclopaedia of Civil-Engineering, London 1847. Fairbairn, An account of the construction of the Britannia- and Convay-Tubular-Bridges etc. Dempsey, Tubular- and other Jron-Girder-Bridges, auch deutsch von Werther unter dem Titel: Praktisches Handbuch bei dem Bau eiserner Träger- oder Jochbrücken 2c., Dresden 1853; sowie Dempsey, Iron applied to railway structures und Malleable iron-bridges, sowie Examples for iron-roofs etc. Außerdem M. Becker, Die gußeisernen Brücken der badischen Eisenbahnen, Carlsruhe 1847, sowie dessen angewandte Baukunde des Ingenieurs und C. M. Bauernfeind, Vorlegeblätter zur Brückenbaukunde, neu bearbeitet von Frauenholz und Osimant, Stuttgart 1876. Siehe auch: Die Brücken- und Thalübergänge Schweizerischer Eisenbahnen von C. v. Etzel, Basel 1856, sowie Duggan, Specimens of the stone-iron- and wood-bridges, New-York 1850.

Ueber die Hängebrücken handelt schon Gerstner in seiner Mechanik und beschreibt namentlich die Hammersmith- und die Menaikettenbrücke von Telford. In theoretischer Hinsicht ist vorzüglich zu nennen: Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, auch deutsch von Scheffler unter dem Titel: Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architectur, Braunschweig 1845. In Navier's Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, Paris 1823, wird eine allgemeine Theorie der Kettenbrücken abgehandelt. Ueber die in Frankreich häufiger angewendeten Drahtbrücken handelt Seguin (der Aelt.) in einem Mémoire sur les ponts en fil de fer. Eine gedrängte Abhandlung über ältere Hängebrücken ist in Sganzin's Cours des constructions enthalten. Nächstdem findet man auch mehrere Kettenbrücken beschrieben, in den Annales des ponts et chaussées, ferner in Förster's Bauzeitung u. s. w. Ueber englische Kettenbrücken wird auch gehandelt in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen Jahrgang 5 und 11.

Ueber die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz handelt die letztere Zeitschrift im 32. Jahrgang (1853); die Hängebrücke über die Maas bei Seraing wird (nach Armengaud's publication industrielle) im „Civil-Ingenieur“ Bd. II. 1856 beschrieben. Die Prager Kettenbrücke von Schnirch ist in einer besonderen Schrift von Hennig, Prag 1842, beschrieben und ebenso die Kettenbrücke über die Donau zu Pesth von Clark in einer englischen Schrift: An account of the suspension bridge across the river Danube, London 1853. Die Brücke über den Niagara findet sich beschrieben in einer Schrift von Gzowski, Toronto 1873.

Ferner gehört hierher: Schnirchs erste Kettenbrücke für Locomotivenbetrieb von J. Fauta. Wien 1861.

Die Theorie der Hängebrücken mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung von H. Tellkampf, Hannover 1856, enthält in gedrängter Kürze das Wesentliche über die Theorie und Anwendung dieser Brücken.

Endlich ist noch folgende Schrift zum Studium der statischen Baukunst zu empfehlen:

Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken u. s. w. von Dr. H. Scheffler, Braunschweig 1857. Die Basis dieser Schrift bildet das zuerst

von Herrn Moseley aufgestellte und von Herrn Scheffler weiter ausgebildete „Princip des kleinsten Widerstandes“. S. das oben citirte Werk von Moseley, sowie die Abhandlungen Scheffler's im Crelle Journal für die Baukunst, Band 29 und 30.

Die Literatur über die Statik der Bauwerke und insbesondere über den Brückenbau hat sich in der neuesten Zeit so sehr ausgedehnt, daß hier nur die wichtigsten Schriften über diesen Gegenstand angezeigt werden können. Vor Allem ist zu nennen: Rankine's Manuel of Civil-Engineering, London 1862. Ferner die Schrift von Laißle und Schübler über den Bau der Brückenträger. Ueber die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz, nach Pauli's System ist 1863 in Mainz eine kurze Beschreibung erschienen. In dem Werke von Dr. A. Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen, Hannover 1863, wird von der Methode der statischen Momente der ausgedehnteste Gebrauch gemacht. Ein größeres Werk über Brücken ist folgendes: Traité théorique et practique de la construction des ponts metalliques par Molinos et Pronnier, Paris 1857. Siehe Bd. IV des Civilingenieurs „über die allgemeine Methode der Berechnung von Brücken“. Auch gehört hierher: Langer, Der Eisenbrückenbau. Wien 1863. Von besonderer Bedeutung sind die Arbeiten Schwedler's in verschiedenen Jahrgängen der Berliner Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, sowie die Vorträge über Brückenbau von E. Winkler, Wien 1870 bis 1875. Ferner ist hier zu nennen: Steiner's Bericht über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika mit einem Anhange über Dachstuhlconstructionen. Wien 1878. Interessant ist das Werk Föppl's, die neuen Trägersysteme für eiserne Brücken, Leipzig 1878. Eine geordnete Sammlung neuerer Brücken und deren statische Berechnung enthält das Werk von Heinzerling: Die Brücken der Gegenwart, Aachen 1873 bis 1877, ebenso wie auch dessen „Eisenhochbau der Gegenwart“, Aachen 1876 bis 1878, eine Sammlung eiserner Dächer enthält. Hier sind auch die verschiedenen Excursionsberichte und Sammlungen zu erwähnen, welche von den „Studirenden verschiedener technischer Hochschulen“ veröffentlicht sind. Viele Abhandlungen über eiserne Brücken und Brückenträger sind in den letzten Jahrgängen des Civilingenieurs, sowie in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, in der Berliner Bauzeitung, in der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins u. a. enthalten.

Alphabetisches Sachregister.

Die angeführten Ziffern geben die Seitenzahlen an.

H.

J.

K.

L.

M.

T.

U.

V.

W.